

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Hausübung, Blatt 08

WS 14/15 Abgabetermin: 19.12.2014

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[H19] Kanonische Transformation

2 Punkte

Seien $\{p, q\}$ kanonisch konjugierte Variable.

a) Untersuchen Sie ob

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \\ P = 2(q + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p \end{array} \right\}$$

eine kanonische Transformation ist. (1 Punkt)

b) Gegeben ist

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = q^\alpha \cos \beta p \\ P = q^\alpha \sin \beta p \end{array} \right\} \quad \text{mit } \alpha, \beta \text{ als Konstanten.}$$

Für welche Wahl von α und β ist die Transformation kanonisch? (1 Punkt)

[H20] Kanonische Transformation – Bewegungsgleichungen

5 Punkte

Wir wollen nun sehen, wie man die Lösung eines mechanischen Problems mit Hilfe einer kanonischen Transformation vereinfachen kann. Gegeben sei ein mechanisches System mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} p^2 q^4 + \frac{k}{2q^2}$$

und die Erzeugende einer kanonischen Transformation:

$$F(q, Q) = -\sqrt{mk} \frac{Q}{q}.$$

a) Geben Sie folgende Transformationsformeln an:

$$p = p(Q, P), \quad q = q(Q, P).$$

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie die neue Hamiltonfunktion $\tilde{H} = \tilde{H}(Q, P)$. (2 Punkte)

c) Finden und lösen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems in den neuen Variablen Q, P . (2 Punkte)

[H21] Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

3 Punkte

Die Sonne ist nicht perfekt kugelförmig. Ihr Gravitationspotential wird in guter Näherung beschrieben durch die Addition eines Korrekturterms zum Kepler-Potential:

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{GM}{r} + K \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2r^2}.$$

Dabei ist K eine Konstante.

- a) Bestimmen Sie die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die Bewegung eines Massenpunktes in diesem Potential. (**1 Punkt**)
- b) Zeigen Sie, dass die in a) erhaltene Differentialgleichung durch Separation der Variablen lösbar ist. Sie brauchen die Lösung nicht explizit zu bestimmen. (**2 Punkte**)

**Bitte geben Sie auf jeder Ausarbeitung der Hausübungen ihren Namen,
Matrikelnummer und Studiengang an!**

**Die Ausarbeitungen können in der Handbibliothek am ITP (Appelstr.2) im
Postfach von Andreas Deser abgegeben werden. Die Abgabe ist bis Freitags
VOR der Vorlesung, d.h. bis 10:15 Uhr. Eine spätere Abgabe ist nicht
möglich!**