Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Hausübung, Blatt 09 **WS 14/15** **Abgabetermin: 16.01.2015**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[H22] Gekoppelte Oszillatoren in der Hamilton-Jacobi Theorie **5 Punkte**

Die Hamiltonfunktion eines Systems aus zwei gekoppelten harmonischen Oszillatoren ist gegeben durch

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_2^2(q_1 - q_2)^2 ,$$

wobei $p_i = m\dot{q}_i$. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen periodische Bahnen im Phasenraum auftreten.

a) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion auf die neuen Koordinaten $z_{1,2} = (q_1 \pm q_2)/\sqrt{2}$ um und formulieren Sie die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die Hamiltonsche charakteristische Funktion $W(z_1, z_2, \alpha_1, \alpha_2)$. (**1 Punkt**)

b) Führen Sie einen Separationsansatz durch und bestimmen Sie die Integralgleichungen für die Wirkungsvariablen

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_i}{\partial z_i} dz_i .$$

(**1 Punkt**)

c) Berechnen Sie die J_i und zeigen Sie, dass für die neue Hamitonfunktion gilt:

$$H = \omega_1 J_1 + \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}\, J_2 .$$

Hinweis: Für die Berechnung der Kurvenintegrale können Sie wie folgt vorgehen: Die Umkehrpunkte der periodischen Bewegung ergeben sich aus den Nullstellen $z_{1/2}^{\pm}$ der Wurzeln in den Integranden. Es gilt dann $\oint f_i\, dz_i = 2\int_{z_i^-}^{z_i^+} f_i\, dz_i$ mit $f_i = \frac{\partial W_i}{\partial z_i}$. (**2 Punkte**)

d) Indem Sie die dazugehörigen Winkelvariablen θ_i berechnen, zeigen Sie dass periodische Bahnen im Phasenraum des Systems existieren, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}} = \frac{n}{m} ; \quad n, m \in \mathbb{Z} .$$

(**1 Punkt**)

[H23] Lorentz-Gruppe **5 Punkte**

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^4$ zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle v, w\rangle := v^t \eta w$ für $v, w \in \mathbb{R}^4$, wobei η gegeben ist durch

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

d.h. $\langle v, w\rangle = v^0 w^0 - \sum_{i=1}^3 v^i w^i$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller linearen Abbildungen $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, welche das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant lassen, eine Gruppe bilden. Diese Gruppe wird auch als *homogene Lorentzgruppe* $\mathcal{L}$ bezeichnet und die Abbildungen Λ heißen auch *Lorentztransformationen.* (**3 Punkte**)

b) Zeigen Sie, dass $\det \Lambda = \pm 1$ und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ ist für $\Lambda \in \mathcal{L}$. Hierbei bezeichnet $\Lambda^0{}_0$ das Matrixelement in der nullten Zeile und nullten Spalte von Λ.
Man kann also die Lorentzgruppe in vier Komponenten aufteilen: $\mathcal{L}_\pm^\uparrow$ für $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ und $\det\Lambda = \pm 1$, bzw $\mathcal{L}_\pm^\downarrow$ für $\Lambda^0{}_0 \leq 0$ und $\det\Lambda = \pm 1$. (**2 Punkte**)

Bitte geben Sie auf jeder Ausarbeitung der Hausübungen ihren Namen, Matrikelnummer und Studiengang an!

Die Ausarbeitungen können in der Handbibliothek am ITP (Appelstr.2) im Postfach von Andreas Deser abgegeben werden. Die Abgabe ist bis Freitags <u>VOR</u> der Vorlesung, d.h. bis <u>10:15 Uhr</u>. Eine spätere Abgabe ist nicht möglich!