Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Hausübung, Blatt 10 **WS 14/15** **Abgabetermin: 23.01.2015**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[H24] Lorentz-Gruppe...Fortsetzung **5 Punkte**

Wir wollen die Diskussion der Struktur der Lorentz-Gruppe aus der letzten Hausübung vertiefen. Dazu verwenden wir die Notation aus [H23].

a) Zeigen Sie, dass für

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^{\uparrow}\ , \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^{\downarrow}\ ,$$

und $\Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}$ folgendes gilt:

$$\Lambda P \in \mathcal{L}_-^{\uparrow}\ , \quad \Lambda T \in \mathcal{L}_-^{\downarrow}\ , \quad \Lambda(PT) \in \mathcal{L}_+^{\downarrow}\ .$$

(**1 Punkt**)

b) Finden Sie die kleinste *endliche* (also mit endlich vielen Elementen) Untergruppe der Lorentzgruppe, die P und T enthält und geben Sie eine Verknüpfungstabelle an. Diese Gruppe wird auch als *Klein'sche Gruppe* bezeichnet. (**1 Punkt**)

c) Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle v, v\rangle = 0$ kann durch eine Lorentztransformation auf die Form $(1, 1, 0, 0)$ gebracht werden. (**2 Punkte**)

d) Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle v, v\rangle < 0$ kann auf die Form $(0, a, 0, 0)$ gebracht werden.
(**1 Punkt**)

Hinweis für Teile c) und d) dieser Aufgabe: Eine spezielle Art von Lorentztransformationen kann man in der Form

$$L(-v\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & -\sinh\lambda & 0 & 0 \\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei $\tanh\lambda = \frac{|v|}{c}$.

[H25] Lorentz-Transformationen in verschiedene Richtungen **5 Punkte**

Betrachten Sie ein Inertialsystem Σ_1, dass sich relativ zu einem Inertialsystem Σ_0 mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = (v^1, 0, 0)$ bewegt sowie ein Inertialsystem Σ_2, dass sich relativ zu Σ_1 mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = (0, v^2, 0)$ bewegt.

a) Geben Sie die Lorentztransformation Λ an, die das System Σ_0 auf das System Σ_2 transformiert. (**1 Punkt**)

b) Die Lorentztransformation Λ aus a) kann in der Form $\Lambda = \Lambda(\vec{u})\mathcal{R}$ geschrieben werden, wobei $\Lambda(\vec{u})$ eine spezielle Lorentztransformation in Richtung der Relativgeschwindigkeit $\vec{u}$ von Σ_2 bezüglich Σ_0 und $\mathcal{R}$ eine Rotation um die x^3-Achse ist:

$$\Lambda(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{u^1}{c} & -\gamma\frac{u^2}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{u^1}{c} & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{(u^1)^2}{c^2} & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{u^1u^2}{c^2} & 0 \\ -\gamma\frac{u^2}{c} & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{u^1u^2}{c^2} & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{(u^2)^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N & 0 \\ 0 & -N & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Komponenten u^1 und u^2 des Vektors $\vec{u}$. Geben Sie ferner die Einträge M und N der Rotationsmatrix $\mathcal{R}$ in Abhängigkeit von γ_1 und γ_2 an, wobei $\gamma_i = 1/\sqrt{1-\beta_i^2}$ und $\beta_i = \frac{v^i}{c}$. (**4 Punkte**)

Bitte geben Sie auf jeder Ausarbeitung der Hausübungen ihren Namen, Matrikelnummer und Studiengang an!

Die Ausarbeitungen können in der Handbibliothek am ITP (Appelstr.2) im Postfach von Andreas Deser abgegeben werden. Die Abgabe ist bis Freitags <u>VOR</u> der Vorlesung, d.h. bis <u>10:15 Uhr</u>. Eine spätere Abgabe ist nicht möglich!