WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Analytische Mechanik und spezielle Relativitätstheorie

Präsenzübung, Blatt 1

Vorlesung: L. Santos,   Übungen: A. Deser

Aufgabe 1: Linearer harmonischer Oszillator. Ein Massepunkt mit Masse m bewegt sich in einer Dimension unter einer Kraft $F_{HO} = -kx$. Bei $t = 0$ ist $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Bestimmen Sie $x(t)$ für $t > 0$.

Aufgabe 2: Freier gedämpfter Oszillator. Aufgrund der Reibungskräfte wird jeder reale Oszillator irgendwann zur Ruhe kommen. Wir modellieren dies mit Hilfe der Reibungskraft

$$F_{\mathrm{Re}} = -\alpha\dot{x}.$$

Sei $\beta = \frac{\alpha}{2m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dann erfüllt der Massepunkt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

a) Benutzen Sie den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und suchen Sie nach möglichen Werten von λ. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $x(t)$.

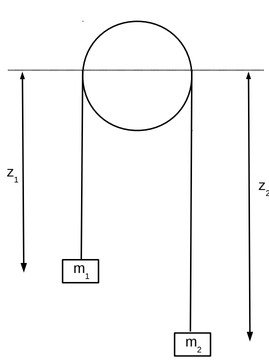
b) Zeigen Sie, dass sich für $\beta < \omega_0$ (schwache Dämpfung) und mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ die Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[x_0 \cos\omega t + \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}\right)\sin\omega t\right]$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ergibt. Schreiben Sie $x(t)$ in die Form $x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$ um.

c) Für $\beta > \omega_0$ (starke Dämpfung) müssen Sie $x(t) = -e^{-\beta t}\left(a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t}\right)$ mit $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ finden.

Aufgabe 3: Atwoodsche Fallmaschiene. Über einen Faden der konstanten Länge L seien 2 Massen m_1 und m_2 miteinander verbunden (o.B.d.A. sei $m_1 < m_2$). Das Schwerefeld der Erde wirke in z-Richtung. Bedenken Sie, dass zur Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes die Fadenspannung S als zusätzliche Kraft zu berücksichtigen ist. Sie wirkt gegen die Schwerkraft und hält die Länge L konstant.



a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für m_1 and m_2?

b) Berechnen Sie die Beschleunigungen $\ddot{z}_1$ und $\ddot{z}_2$!

c) Wie groß ist die Fadenspannung S?

d) Für welches Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ ist S maximal?