Analytische Mechanik und spezielle Relativitätstheorie

Präsenzübung, Blatt 02 **WS 14/15**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser

[P4] Konservative vs. dissipative Kräfte

In der folgenden Aufgabe werden wir uns mit der Idee der konservativen und dissipativen Kräfte vertraut machen.

a) Sei $\vec{F}_1(\vec{r}) = (\alpha_1 y^2 z^3 - 6\alpha_2 xz^2)\vec{e}_x + 2\alpha_1 xyz^3 \vec{e}_y + (3\alpha_1 xy^2 z^2 - 6\alpha_2 x^2 z)\vec{e}_z$. Ist diese Kraft konservativ?

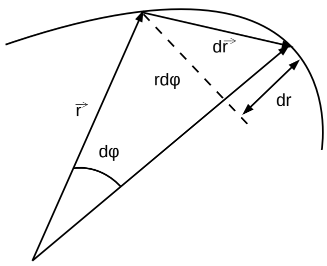
b) Nehmen wir nun $\vec{F}_2(\vec{r}) = \left(\frac{3}{\alpha^2}x^2 + \frac{2}{\alpha}y\right)\vec{e}_x - \left(\frac{9}{\alpha^2}yz\right)\vec{e}_y + \frac{8xz^2}{\alpha^3}\vec{e}_z$, wobei α eine Konstante ist. Ist $\vec{F}_2$ konservativ?

c) Wir wollen nun die Arbeit berechnen, die man braucht um den Massenpunkt m im Feld $\vec{F}_2$ auf einer Geraden von $(0,0,0)$ nach (α,α,α) zu verschieben.

d) Nehmen wir nun eine Parabelbahn ($y = x^2, z = y^2$) von $(0,0,0)$ bis nach (α,α,α). Welche Arbeit muss man nun gegen das Kraftfeld $\vec{F}_2$ leisten?

[P5] Zentrifugalbarriere

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes m in Zylinderkoordinaten $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ und in einem Potential, das nur von ρ abhängt: $V = V(\rho)$. Es sei $\vec{L} = L\vec{e}_z$ der erhaltene Drehimpuls.



$$d\vec{r} = d\rho\ \vec{e}_\rho + \rho d\varphi\ \vec{e}_\varphi + dz\ \vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\ \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi + \dot{z}\ \vec{e}_z$$

Da $\vec{L}$ erhalten ist, gilt $\vec{L}\cdot\vec{r} = Lz = 0$, also $z = 0$ und $\dot{z} = 0$. Es folgt $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$.

a) Nutzen Sie die Definition von $\vec{L}$ und drücken Sie L als Funktion von r und $\dot{\varphi}$ aus. (Lösung: $L = m\rho^2\dot{\varphi}$)

b) Schreiben Sie die kinetische Energie als Funktion von ρ, $\dot{\rho}$ und $\dot{\varphi}$ (Lösung: $T = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2}{2}\dot{\varphi}^2$).

c) Nutzen Sie die Definition der Energie $E = T + V(\rho)$. Sie sollten $E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ bekommen, wobei $V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + V(\rho)$ (*Hinweis*: Nutzen Sie die Ergebnisse von (a) und (b)).

d) Sei $V(\rho) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\rho}$ (seien $q_1, q_2 > 0$). Wie sieht das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\rho)$ aus?

Bemerkung: $\frac{L^2}{2m\rho^2}$ ist die sogenannte *Zentrifugal-Barriere*.

[P6] Coriolis-Kraft

Stürme wie letzte Woche *Gonzalo* sind rotierende Tiefdruckzonen. Bestimmen Sie deren Rotationsrichtung (im/gegen den Uhrzeigersinn) auf der Nordhalbkugel der Erde, wenn man sie vom Weltraum aus beobachtet. *Hinweis:* Nehmen Sie an, die Luft strömt aus Hochdruckzonen von Norden und von Süden auf das Tief zu. Zerlegen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Erdrotation in der Coriolis-Kraft in eine Komponente $\vec{\omega}_t$ tangential und eine Komponente $\vec{\omega}_s$ senkrecht zur Erdoberfläche).