

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Präsenzübung, Blatt 05

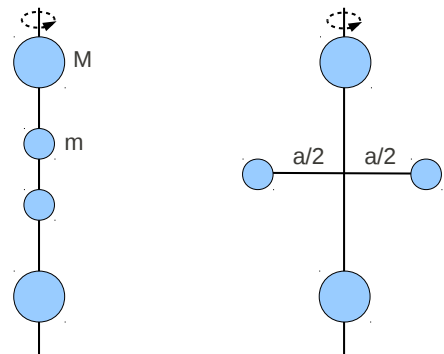
WS 14/15

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[P12] Pirouette

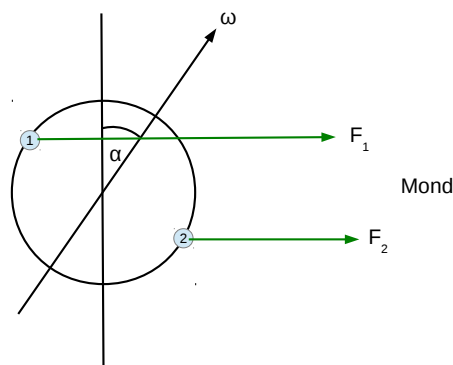
Als Modell für eine Pirouette betrachten wir zwei verschiedene Anordnungen zweier schwerer Kugeln (Radius R , Masse M) und zweier leichter Kugeln (Radius r , Masse m), jeweils mit homogener Massenverteilung (siehe Abbildung unten).

- Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_3 bei Rotation der beiden Anordnungen um die 3-Achse.
- Vergleichen Sie die beiden Winkelgeschwindigkeiten der Rotation für fest vorgegebenen Drehimpuls $\vec{L} = (0, 0, L_3)$.



[P13] Präzession der Erde

Aufgrund der Neigung der Erdachse und der Abplattung ist die Erde kein kräftefreier Kreisel. Der Mond und die Sonne (der Einfachheit halber betrachten wir nur den Mond) bewirken durch ihre Anziehungskraft ein Drehmoment. Wir modellieren dies folgendermaßen. Die Erde sei eine Kugel mit Schwerpunkt im Mittelpunkt und zwei Massen $m_1 = m_2 = m$ am Äquator, die durch den unterschiedlichen Abstand zum Mond unterschiedliche Kräfte erfahren (siehe Abbildung).



- Zeigen Sie, dass in diesem Fall fuer den Betrag der Präzessionsfrequenz ω_p gilt: $\omega_p = \frac{M}{L \sin \alpha}$, wobei M der Betrag des wirkenden Drehmomentes ist und L der Betrag des Drehimpulses der Erde.

- b) Berechnen Sie das durch die Kräfte F_1 und F_2 bewirkte Drehmoment und geben Sie eine Schätzung der Periodendauer eines Präzessionsumlaufes ab. *Hinweise: Sie dürfen für die Abstände r_1 und r_2 der beiden Massen die Näherung $(r_1 + r_2) = 2r$ und $(r_1 - r_2) = 2R$ verwenden, wobei r der Abstand Erde-Mond ist und R der Radius der Erde. Als Trägheitsmoment der Erde können sie das einer homogenen Kugel verwenden (siehe Vorlesung). Für die Abschätzung verwenden Sie folgende numerischen Werte: $m = 3 \cdot 10^{21} \text{kg}$, $M_{\text{Mond}} = 7 \cdot 10^{22} \text{kg}$, $r = 4 \cdot 10^8 \text{m}$, $M_{\text{Erde}} = 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$ und Gravitationskonstante $G = 7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$.*

Bemerkung: Die oben abgeschätzte Periodendauer wird auch als “Platonisches Jahr” bezeichnet und beträgt nach exakten Rechnungen 25800 Jahre.