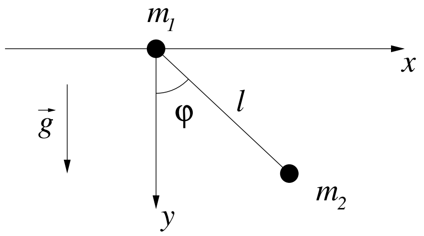
Analytische Mechanik und spezielle Relativitätstheorie

Präsenzübung, Blatt 06 **WS 14/15**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[P14] Schwingende Hantel



Die Masse m_1 einer Hantel der Länge ℓ kann sich reibungsfrei entlang einer horizontalen Geraden bewegen.
Welche Kurven beschreiben die Massen m_1 und m_2 unter dem Einfluss der Schwerkraft?

[P15] Lorentzkraft – Verallgemeinerte Potentiale

Auf ein geladenes Teilchen der Ladung Q, welches sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem elektromagnetischen Feld bewegt, wirkt die so genannte Lorentzkraft:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ ,$$

wobei $\vec{E}$ dem elektrische Feld und $\vec{B}$ der magnetischen Induktion entspricht.

In der Elektrodynamik wird gezeigt, dass man $\vec{E}$ und $\vec{B}$ als

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \end{aligned}$$

schreiben kann, wobei $\vec{A}$ ein Vektorpotential und ϕ ein Skalarpotential ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$F_{x_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} U - \frac{\partial}{\partial x_j} U \qquad \text{mit } x_{j=1,2,3} = x, y, z$$

wobei $U = Q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$.

b) Zeigen Sie, dass (trotz der Tatsache, dass $\vec{F} \neq -\vec{\nabla}U$,) das D'Alembertsche Prinzip $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial T}{\partial x_j.} = F_{x_j}$ auch diesmal von der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ ist.
U ist ein so genanntes *verallgemeinertes Potential* und L ist nun eine *verallgemeinerte Lagrange-Funktion.*