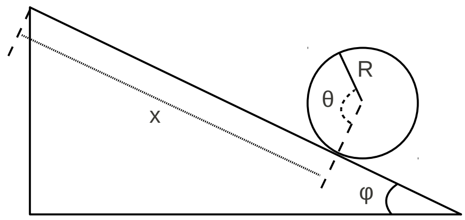
Analytische Mechanik und spezielle Relativitätstheorie

Präsenzübung, Blatt 07 **WS 14/15**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[P16] Lagrange-Multiplikatoren

Ein "Fass", d.h. ein Hohlzylinder der Masse M und dem Trägheitsmoment $J = MR^2$ rolle eine schiefe Ebene hinunter, wie in der Abbildung gezeigt. Die Abrollbedingung besagt, dass $Rd\theta = dx$, welche wir als Zwangsbedingung interpretieren.



a) Bestimmen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und die Konstanten a_{ij} (siehe Vorlesung), die sich aus der Zwangsbedingung ergeben.
b) Bestimmen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art über die Einführung eines Lagrange-Multiplikators λ.
c) Bestimmen Sie den Lagrange-Multiplikator und geben Sie die generalisierten Zwangskräfte an.

[P17] Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

Sei y Funktion einer Variablen x und eine Wirkung $F(y, y')$ gegeben durch

$$F(y, y') = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x))\, dx \, ,$$

wobei f eine mindestens zweimal in jeder Variablen differenzierbare Funktion sein soll.

a) Finden Sie eine Bedingung an f, unter welcher die Wirkung F stationär wird, indem Sie die erste Variation von F Null setzen. Letztere ist definiert durch

$$\delta_h F = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} F(y + \alpha h, y' + \alpha h') \, ,$$

wobei h eine beliebige differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $h(x_1) = h(x_2) = 0$ ist.

b) Zeigen Sie als Anwendung der vorhergehenden Aufgabe, dass die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene eine Gerade ist. *Hinweis*: Sie können annehmen, dass die Kurve durch eine Funktion $y(x)$ parameterisiert werden kann, mit Anfangspunkt x_1 und Endpunkt x_2. Wählen Sie dann als zu minimierendes Funktional die Länge der Kurve.