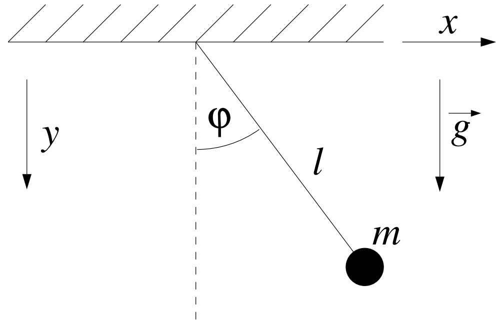
Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Präsenzübung, Blatt 08 **WS 14/15**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[P18] Pendelschwingung

Ein Pendel mit konstanter Fadenlänge l und Masse m schwingt im Schwerefeld der Erde (siehe Abbildung).



a) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion.
b) Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen auf und finden Sie damit eine Gleichung für $\ddot{\varphi}$.

[P19] Hamilton Formalismus

Zwei Teilchen mit Masse m bewegen sich in einer Dimension x.
Die Teilchen erfahren ein externes harmonisches Potential

$$V_{\text{HO}}(x_1, x_2) = \frac{m}{2}\omega^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

und außerdem eine abstoßende Wechselwirkung zwischeneinander

$$V_{\text{Int}}(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{|x_1 - x_2|} \qquad \text{mit } \gamma > 0 \quad .$$

a) Benutzen Sie als generalisierte Koordinaten die Schwerpunkt- und Relativkoordinaten $(X_{\text{cm}}\,, x_r)$. Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion in 2 unabhängige Teile zerlegt werden kann:

$$H = H_{\text{cm}}(X_{\text{cm}}\,, P_{\text{cm}}) + H_r(x_r\,, p_r) \quad ,$$

wobei P_{cm} und p_r die entsprechenden generalisierten Impulse von X_{cm} und x_r sind.
b) Zeichnen Sie die Bahnen in den Phasenräumen $(X_{\text{cm}}\,, P_{\text{cm}})$ und $(x_r\,, p_r)$.
c) Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen auf. Bestimmen Sie damit die Gleichungen für $\ddot{X}_{\text{cm}}$ und $\ddot{x}_r$ (ohne diese zu lösen).

[P20] Eigenschaften der Poisson-Klammer

Zeigen Sie, dass aus der Definition der Poisson-Klammer

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}$$

(der Einfachheit halber benutzen Sie nur eine Koordinate) folgende Eigenschaften folgen (α, β Konstanten)

- Antisymmetrie $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- Linearität $\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}$
- Produktregel $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$
- Jacobi-Identität $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$