Analytische Mechanik und spezielle Relativitätstheorie

Präsenzübung, Blatt 09 **WS 14/15**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[P21] Bohr-Sommerfeld Atommodell

Wir betrachten das Kepler-Potential $V(r) = -\frac{k}{r}$. Für $k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$ beschreibt dies das sog. Coulomb-Potential zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2. Niels Bohr und Arnold Sommerfeld berechneten anhand dieses Potentials die Energie eines Elektrons, das sich im Feld eines Atomkerns befindet. Der Vergleich des ermittelten kontinuierlichen Energiespektrums mit den diskreten Energieniveaus aus dem Experiment führte zur Hypothese von gequantelten Eigenwirkungsvariablen. Wir wollen dies in der folgenden Aufgabe nachvollziehen.

a) Formulieren Sie die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse m im Coulomb-Potential. Wählen Sie aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems Kugelkoordinaten.

b) Geben Sie die Hamilton-Funktion an und begründen Sie, dass diese gleich der (erhaltenen) Gesamtenergie E ist.

c) Formulieren Sie die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die Hamiltonsche charakteristische Funktion $W(r, \theta, \phi, \alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_\phi)$, wobe $\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_\phi$ die neuen *konstanten* Impulse sind.

d) Mit Hilfe eines Separationsansatzes $W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi)$, bestimmen Sie Gleichungen für W_ϕ, $\frac{dW\theta}{d\theta}$ und $\frac{dW_r}{dr}$. Bestimmen Sie Formeln für die Wirkungsvariablen J_ϕ, J_θ und J_r.

e) Das Ergebnis für die Wirkungsvariablen J_ϕ und J_θ ist gegeben durch

$$J_\phi = 2\pi\alpha_\phi \ , \quad J_\theta = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi) \ .$$

Schreiben Sie damit die Wirkungsvariable J_r in folgender Form:

$$J_r = \oint \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))}\, dr \ .$$

Bestimmen Sie $V_{\text{eff}}(r)$ in Abhängikeit von r, J_ϕ und J_θ. Skizzieren Sie grob die Form von $V_{\text{eff}}(r)$. Wann gibt es gebundene Zustände, d.h. Zustände in denen sich das Elektron nur in einem endlichen r-Bereich aufhalten kann?

f) Komplexe Integration ergibt im Falle gebundener Zustände für J_r folgendes Ergebnis:

$$J_r = -(J_\theta + J_\phi) + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}} \ .$$

Bestimmen Sie damit die transformierte Hamiltonfunktion $\bar{H}(J_r, J_\theta, J_\phi)$.

g) Die zu den J_i $(i = r, \theta, \phi)$ gehörenden Frequenzen $\nu_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial J_i}$ sind alle gleich, d.h. *entartet*. Mittels einer kanonischen Transformation ist es möglich, die Hamiltonfunktion $\bar{H}$ mit Hilfe neuer Wirkungsvariablen $\bar{J}_i$ zu beschreiben, deren zugehörige Frequenzen entweder null oder nicht entartet sind. Letztere nennt man *Eigenwirkungsvariablen*. Betrachten Sie folgende kanonische Transformation

$$F_2 = (\omega_\phi - \omega_\theta)\bar{J}_1 + (\omega_\theta - \omega_r)\bar{J}_2 + \omega_r \bar{J}_3 \ .$$

Dabei sind die ω_i die zu den J_i kanonisch konjugierten Winkelvariablen. Drücken Sie die $\bar{J}_i$ durch die J_i aus und schreiben Sie die Hamiltonfunktion $\bar{H}$ in die neuen Variablen $\bar{J}_i$ um.

h) Zeigen Sie, dass $\bar{J}_3$ eine Eigenwirkungsvariable ist. Die Bohr-Sommerfeld Quantenbedingung sagt nun, dass $\bar{J}_3 = nh$, wobei h das *Plancksche Wirkungsquantum* und n eine natürliche Zahl ist. Bestimmen Sie die Energieniveaus E_n für gebundene Zustände.