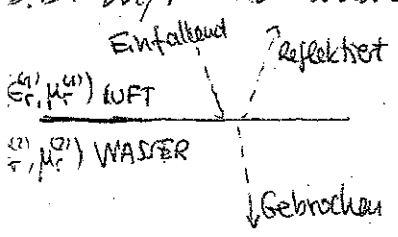


# REFLEKTION UND BRECHUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

Eine wichtige Anwendung der Maxwell-Gleichungen und der Theorie der elektromagnetischen Wellen ist die Analyse der Brechung und der Reflexion des Lichts.

Wir betrachten eine ebene Grenzfläche zwischen 2 Dielektrika (z.B. Luft und Wasser). Die Dielektrika haben im Prinzip verschiedene  $(\epsilon_r^{(1)}, \mu_r^{(1)})$  und  $(\epsilon_r^{(2)}, \mu_r^{(2)})$ , und damit auch verschiedene Brechungsindizes (S. 106)  $n_1$  und  $n_2$ .



Das Verhalten der elektromagnetischen Wellen an der Grenzfläche hängt natürlich vom Verhalten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  an der Grenzfläche.

Das geht ähnlicherweise wie unsere Diskussionen der Elektrostatik (S. 39) und der Magnetostatik (S. 90).

Wie für unsere Diskussion auf S. 105 werden wir hier nur linear homogene Medien ( $\vec{B} = \mu_r^{(1,2)} \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \epsilon_r^{(1,2)} \epsilon_0 \vec{E}$ ) betrachten. Aus  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  und  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ , und mit Hilfe des Gauß-Satzes bekommen wir (die Rechnungen sind genau wie die auf S. 39 und 90)

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \sigma_F \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \end{aligned}$$

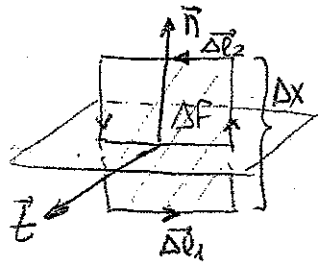
→ Bedingungen für die normale Komponenten der Felder.



Wobei:  $\vec{n}$  = Normalvektor der Grenzfläche  
 $\sigma_F$  ≡ Flächenladungsdichte

Die andere 2 Maxwell-Gleichungen sind für die Elektrodynamik anders, und ~~deswegen~~ deswegen müssen wir ein bisschen vorsichtiger sein.

\* Wir machen die Rechnung wie auf S. 90



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

$$\int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{D}$$

$d\vec{F} = df \vec{e}$  Flächenstromdichte  
 $\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \vec{j}_F \cdot \vec{e} \cdot \Delta l$

|| ← Stokes  
 $\int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{H} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \vec{H}_2 \cdot \vec{\Delta l}_2 + \vec{H}_1 \cdot \vec{\Delta l}_1$

$\vec{D}$  ist auf der Grenzfläche endlich, und damit  $\int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{D} = 0$  wenn  $\Delta x \rightarrow 0$

|| ←  $\vec{\Delta l}_2 = (\vec{e} \times \vec{n}) \Delta l = -\vec{\Delta l}_1$   
 $(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{e} \times \vec{n}) \Delta l$

Damit  $(\vec{e} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_F \cdot \vec{e}$

||  
 $[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] \cdot \vec{e} = \vec{j}_F \cdot \vec{e}$

Also  $\boxed{\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_F}$

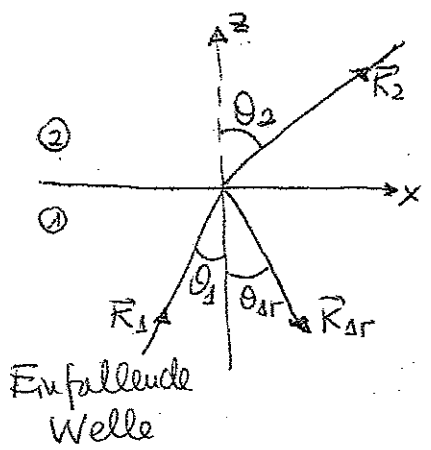
Und ganz analog kommt aus  $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

$\boxed{\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0}$

- Für ungeladene Dielektrika  $\rho_F = 0, \vec{j}_F = 0$ , und damit kriegen wir die Stetigkeitsbedingungen:

$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$	→	<u>Tangentiale Komponenten</u>
$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0$		
$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$	→	<u>Normale Komponenten</u>
$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$		

\* Wir werden nun diese Gleichungen anwenden, um die Brechung und die Reflexion an der Grenzfläche zu verstehen.



\* Wir betrachten eine <sup>einfallende</sup> ebene Welle, die am Medium ① kommt.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Aus unserer Diskussion der S. (110):

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\omega_1} (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1) = \frac{1}{\omega_1} (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1)$$

(wie immer  $\omega_1 = k_1 u_1$ , wobei  $u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r^{(1)} \epsilon_r^{(1)}}}$ )

$$\vec{k}_1 = \frac{\vec{k}_1}{|k_1|}$$

\* Die Welle wird teilweise reflektiert

$$\vec{E}_{1r} = \vec{E}_{01r} e^{i(\vec{k}_{1r} \cdot \vec{r} - \omega_1 t)}$$

$$\vec{B}_{1r} = \frac{1}{\omega_1} (\vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r})$$

und teilweise gebrochen:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{\omega_2} (\vec{k}_2 \times \vec{E}_2)$$

wobei  $u_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r^{(2)} \epsilon_r^{(2)}}}$

Wie in der Abbildung da oben, nehmen wir  $\vec{e}_z$  als Normalvektor, also die Grenzfläche ist die xy-Ebene. Wir nehmen an, dass  $\vec{k}_1$  auf der xz-Ebene liegt. Dann

$$\vec{k}_1 = \sin \theta_1 \vec{e}_x + \cos \theta_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{k}_{1r} = \sin \theta_{1r} \cos \phi_{1r} \vec{e}_x + \sin \theta_{1r} \sin \phi_{1r} \vec{e}_y - \cos \theta_{1r} \vec{e}_z$$

$$\vec{k}_2 = \sin \theta_2 \cos \phi_2 \vec{e}_x + \sin \theta_2 \sin \phi_2 \vec{e}_y + \cos \theta_2 \vec{e}_z$$

(Bemerkung:  $\vec{k}_{1r}$  und  $\vec{k}_2$  liegen im Prinzip nicht unbedingt auf xz, aber wir werden sofort sehen, dass das eigentlich der Fall ist.)

\* Die Randbedingungen der S. (131) müssen für alle Punkte der Grenzfläche und für alle Zeiten erfüllt werden. Das ist eigentlich nur möglich wenn die Phasen der drei Wellen auf der xy-Ebene gleich sind:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t = \vec{k}_{1r} \cdot \vec{r} - \omega_{1r} t = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t \quad \text{für } z=0$$

Das ist richtig für alle Zeiten wenn

$$\omega = \boxed{\omega_1 = \omega_{1r} = \omega_2} \rightarrow \text{An der Grenzfläche findet keine Frequenzänderung statt.}$$

und richtig für alle  $\vec{r} = (x, y, z=0)$ .

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_{1r} \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}$$

also für x  $\rightarrow k_1 \sin \theta_1 = k_{1r} \sin \theta_{1r} \cos \phi_{1r} = k_2 \sin \theta_2 \cos \phi_2$

für y  $\rightarrow 0 = k_{1r} \sin \theta_{1r} \sin \phi_{1r} = k_2 \sin \theta_2 \sin \phi_2 \implies \boxed{\phi_{1r} = \phi_2 = 0} \implies$

$\implies$  Also  $\vec{k}_1, \vec{k}_{1r}$  und  $\vec{k}_2$  liegen in ein- und derselben Ebene (Einfallsebene)

Also  $k_1 \sin \theta_1 = k_{1r} \sin \theta_{1r} = k_2 \sin \theta_2$

Aber  $k_1 = \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega}{c} n_1 = k_{1r}$   
 $k_2 = \frac{\omega}{u_2} = \frac{\omega}{c} n_2$

$\implies$  Reflexionsgesetz

Also  $k_1 \sin \theta_1 = k_1 \sin \theta_{1r} \implies \boxed{\theta_1 = \theta_{1r}}$

$\rightarrow$  Der Reflexionswinkel ist gleich der Einfallswinkel.

und  $k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \implies \boxed{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}}$  Brechungsgesetz (Snellius-Gesetz)

\* Wenn  $n_2 > n_1 \rightarrow \theta_1 > \theta_2$  ( $0 \leq \theta_{1,2} \leq \pi/2$ )

$n_2 < n_1 \rightarrow \theta_1 < \theta_2$

→ Es gibt ein Grenzwinkel  $\theta_1 = \theta_{1g}$  sodass  $\theta_2 = \pi/2$

$\sin \theta_{1g} = \frac{n_2}{n_1}$

↓  
Totalreflexion

(Bemerkung: für  $\theta_1 > \theta_{1g}$  kann man zeigen, dass die Reflexion total ist).

\* Bisher sind diese Gesetze ein Ergebnis ziemlich allgemeiner Betrachtungen. Wir können nun aber die volle Kraft der Randbedingungen benutzen um die reflektierte und gebrochene Felder zu bestimmen.

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{n} \times [\vec{E}_2 - (\vec{E}_1 + \vec{E}_{1r})] &= 0 \\ \vec{n} \cdot [\epsilon_r^{(2)} \vec{E}_2 - \epsilon_r^{(1)} (\vec{E}_1 + \vec{E}_{1r})] &= 0 \\ \vec{n} \times \left[ \frac{1}{\mu_r^{(2)}} (\vec{K}_2 \times \vec{E}_2) - \frac{1}{\mu_r^{(1)}} (\vec{K}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{K}_{1r} \times \vec{E}_{1r}) \right] &= 0 \\ \vec{n} \cdot [(\vec{K}_2 \times \vec{E}_2) - (\vec{K}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{K}_{1r} \times \vec{E}_{1r})] &= 0 \end{aligned} \right.$$

\* Auf S. (114) haben wir gesehen, dass sich jede beliebig polarisierte ebene Welle in zwei senkrecht zueinander polarisierte Wellen zerlegt lässt. Wir nehmen also

- \* Wellen solch dass  $\vec{E}_1$  senkrecht zur Einfallsebene(xz) ist
- \*  $\vec{E}_1$  ist in der Einfallsebene linear polarisiert.

Wir nennen diese 2 Fälle  $\perp$  und  $\parallel$ .

\* Wegen Stetigkeit, wenn  $\vec{E}_1 \perp$  ist dann auch  $\vec{E}_{1r}$  und  $\vec{E}_2$  und genauso für  $\parallel$ .

\* Wir werden hier nicht alle die Rechnungen machen, aber die Ergebnisse kommen ziemlich einfach aus der Randbedingungen, und die Reflexionsgesetz und Snellius-Gesetz, erreicht werden.

Wir nehmen  $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$  (das ist häufig der Fall), dann bekommt man die so genannten Fresnel-Formeln (ohne weitere Rechnungen)

\* ⊥-Konfiguration

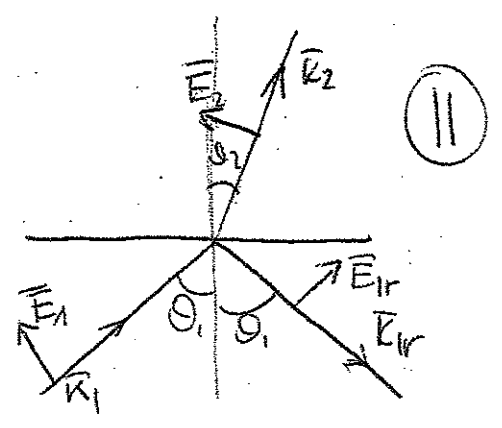
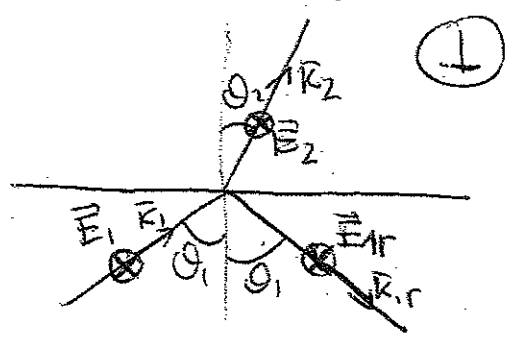
$$\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

$$\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$
  

\* ||-Konfiguration

$$\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\parallel = \frac{\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\tan(\theta_2 + \theta_1)}$$

$$\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_\parallel = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 + \theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



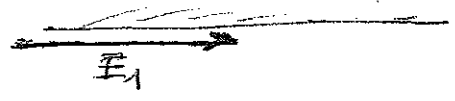
Also mit Hilfe der Reflexion- und Snellius-Gesetze finden wir  $\theta_{1r}$  und  $\theta_{2r}$  wenn wir  $n_1, n_2$  und  $\theta_1$  kennen, und mit Hilfe der Fresnel-Formeln, finden wir außerdem  $E_{01r}$  und  $E_{02}$  wenn wir außerdem  $E_{01}$  kennen.

Also  $\left[ \begin{array}{l} \text{Reflexionsgesetz} \\ \text{Snellius-gesetz} \\ \text{Fresnel-Formel} \end{array} \right] \rightarrow$  bestimmen  $\vec{E}_{1r}$  und  $\vec{E}_{2r}$  wenn wir  $\vec{E}_1$  kennen!

Suchen wir nun ein Paar Folgen der Fresnel-Formeln

Sei  $n_2 > n_1$  (also  $\theta_2 < \theta_1$ )

\* Sei  $\theta_1 = \pi/2$



denn, wie man erwarten kann,  $\vec{E}_2 = 0$

• Da  $\theta_2 < \theta_1 \rightarrow \left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp < 0 \rightarrow \pi$ -Sprung bei der Reflexion  
 (Änderung des Vorzeichens)

•  $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\parallel = 0$  wenn  $\tan(\theta_2 + \theta_1) = \infty$

mit Hilfe der Snellius-Gesetz sieht man, dass das passiert wenn  $\theta_1 = \theta_B$  mit  $\boxed{\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}}$

Also wenn  $\theta_1 = \theta_B \equiv$  Brewster-Winkel,  $(E_{01r})_\parallel = 0$ ,

und damit  $\vec{E}_r$  ~~ist~~ ist vollständig linear polarisiert und zwar senkrecht zu der Fläche.

Bemerkung: Guck mal die Reflexion der Licht auf einem polierten Boden. Mach das mit polarisierten Brillen (die lassen die Licht nur mit einer gewissen linearen Polarisation durch). Dreh die Brillen. Für eine gewisse Winkel siehst Du keine Reflexion! Das ist der Brewster-Winkel!).

# \* ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN IN ELEKTRISCHEN LEITERN: DÄMPFUNG

\* Bisher haben wir  $\rho=0, \vec{j}=0$  angenommen. Wir werden nun homogene, isotrope, ladungsfreie, elektrische Leiter studieren.

\* Auf S. 66 haben wir gesehen, dass in einem elektrischen Leiter man einen Strom ( $I$ ) hat, wenn es eine Spannung ( $U$ ) gibt. Wir haben gesehen (S. 69), dass in den sogen. Ohmschen Leitern:  $I = U/R$ , wobei  $R$  der elektrische Widerstand ist. Die Spannung entspricht ein  $\vec{E}$ -Feld (S. 21), und  $I$  entspricht eine Stromdichte  $\vec{j}$ . Es gibt also eine Beziehung zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{j}$ . Die beide sind durch die sogen. elektrische Leitfähigkeit ( $\sigma$ ) verbunden:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  (Bemerkung:  $1/\sigma \equiv$  spezifischer elektrischer Widerstand)

\* Für einen elektrischen Leiter  $\Rightarrow \sigma \neq 0$ , aber  $\rho = 0$  (keine Ladungsdichte).

Damit

$$\text{Maxwellgleichungen} \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \sigma \vec{E} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} \end{cases}$$

Bemerkung: Das  $\rho = 0$  für alle  $t$  ist nicht so selbstverständlich. Wenn  $\rho \neq 0$

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_r \mu_0 \sigma (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot \ddot{\vec{E}} = \frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0} \sigma \rho + \mu_r \mu_0 \dot{\rho} \rightarrow \dot{\rho} = -\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \rho$$

$\rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t=0) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} t}$ . Also wenn wir nehmen  $\rho(\vec{r}, t=0) = 0$ , dann  $\rho(\vec{r}, t) = 0 \forall t$

\* Also  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \dot{\vec{B}} = -\mu_r \mu_0 \sigma \dot{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}}$

Also  $\left\{ \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{E} = 0$  Telegraphengleichung

Ebenfalls kann man zeigen dass

$$\left\{ \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{B} = 0$$

Sei eine Lösung der Form:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$



\* Dann

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{u^2} + i\mu_r\mu_0\sigma\omega = 0$$

Also: 
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \epsilon_r + i\mu_r\mu_0\sigma\omega = \frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \left[ \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right]$$

Komplexe Dielektrizitätskonstante

$$= \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2$$

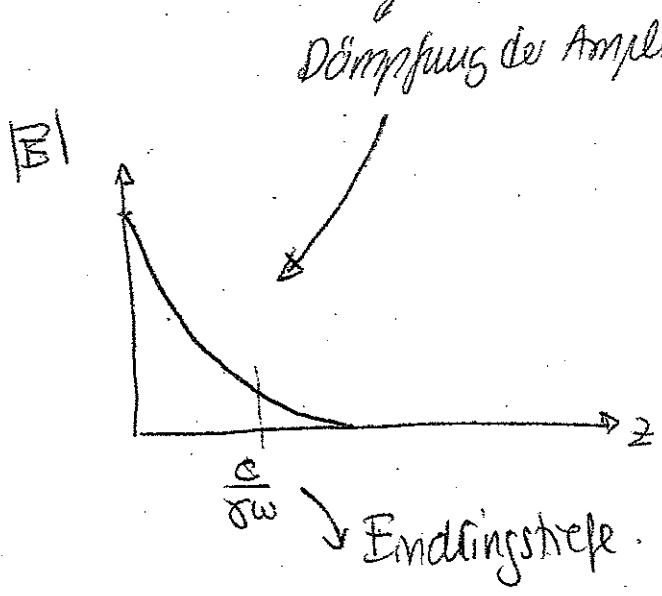
wobei  $n_c$  ist ein komplexer Brechungsindex so daß

$$n_c = \bar{n} + i\gamma \rightarrow \bar{n}^2 - \gamma^2 + 2i\bar{n}\gamma = \mu_r \epsilon_r + i \frac{\mu_r \sigma}{\omega\epsilon_0} = n^2 + i \frac{\mu_r \sigma}{\omega\epsilon_0}$$

Also 
$$\left. \begin{aligned} \bar{n}^2 - \gamma^2 &= n^2 \\ 2\bar{n}\gamma &= \frac{\mu_r \sigma}{\omega\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \bar{n}^2 &= \frac{n^2}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right)^2} \right\} \equiv \text{Verallgemeineter Brechungsindex} \\ \gamma^2 &= \frac{n^2}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right)^2} \right\} \equiv \text{Extinktionskoeffizient} \end{aligned}$$

Also ~~Sei~~  $K = k \bar{u}_z \rightarrow K = \frac{\omega}{c} \bar{n} + i \frac{\omega}{c} \gamma$

Also 
$$E = \bar{E}_0 \underbrace{e^{-\frac{\sigma\omega}{c}z}}_{\text{Dämpfung der Amplitude}} \underbrace{e^{i\omega \left[ \frac{\bar{n}}{c}z - t \right]}}_{\text{Ebene Welle}}$$



\* Für einen Isolator ( $\sigma=0$ )  
 $\Rightarrow \bar{n} = n, \gamma = 0$   
 $\Rightarrow \bar{n}^2 = n^2 + \gamma^2 > n^2 \rightarrow \bar{n} > n$   
 also  $u_{\text{leiter}} = \frac{c}{\bar{n}} < \frac{c}{n} = u_{\text{Isolator}}$   
 Die Phasengeschwindigkeit im Leiter ist kleiner als in einem Isolator.

\* Die Dämpfung resultiert aus der Bildung von Wärme im Leiter.

\* Also, wenn ein Material eine Breite größer als die Eindringstiefe hat, dann ist das Material undurchsichtig.

Wichtig hier ist die Tatsache, dass  $\gamma$  eine Funktion von  $\omega$  ist. In Allgemeinen  $\gamma(\omega)$  ist eine relativ komplexe Funktion, die natürlich materialabhängig ist.

D.h. dass ein Material ist für einige Frequenzen durchsichtig und für andere undurchsichtig!

\* z. B. Glass ist für UV undurchsichtig.

Also hinter einem Fenster kann man nicht braun werden!