ELEKTRODYNAMIK

· Bisher haben wir die Elektrostatik und die Magnetostatik studiert. In der Elektrostatik hatten wir elektrische Felder, und die entsprechenden Maxwell-gleichungen waren (S. 61):

$$\vec\nabla\cdot\vec D = \rho(\vec r)$$
$$\vec\nabla\times\vec E = 0$$

In der Magnetostatik hatten wir magnetische Felder, und die entsprechenden Maxwell-gleichungen waren (S. 90):

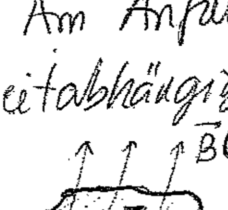
$$\vec\nabla\cdot\vec B = 0$$
$$\vec\nabla\times\vec H = \vec J(\vec r)$$

Also, elektrische und magnetische Felder wurden unabhängig eingeführt. Wir werden sofort sehen, daß für zeitabhängigen Problemen (also nicht-statischen) die elektrische und magnetische Felder nicht mehr unabhängig voneinander sind, sondern $\vec E$ verursacht $\vec B$ und umgekehrt. Wir reden nun von elektromagnetischen Feldern.

· Bemerkung: das ist die Idee hinter z.B. eine Dynamo!

· Faraday - Induktionsgesetz

Am Anfang des XIX-Jahrhunderts beobachtete Faraday, daß zeitabhängige Magnetfeldern erzeugen ein Strom in einem Leiterkreis.



· Mathematisch wird diese experimentelle Beobachtung vom Faraday-Induktionsgesetz ausgedrückt:

Bemerkung: Wenn es ein Strom (I) gibt, d.h. dass es ein Spannung (U) gibt (Ohm-Gesetz) (S. 69) U = I · WIDERSTAND. Eine Spannung bedeutet ein $\vec E$-Feld (Seite 19).

$$\underbrace{\oint_C \vec E\cdot d\vec r}_{\substack{\text{sogen.}\\ \text{Elektromotorische}\\ \text{Kraft}}} = -\kappa\,\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{F_c}\vec B\cdot d\vec f}_{\text{Magnetischer Fluss durch die Fläche } F_c}$$

κ: Proportionalitätskonstante

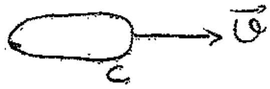
Diese Integral war Null in der Elektrostatik!

Bemerkung: S. 21 ⇒ Spannung: $U_{AB} = \int_A^B \vec E\, d\vec r$

* Also es gibt doch eine Abhängigkeit zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aber die taucht nur auf, wenn der magnetische Fluss zeitabhängig ist.

* Wir werden sofort die Konstante k festlegen.

Wir werden erstmals einen ~~Leiter~~kreis C annehmen, der mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ sich im Laborsystem bewegt. Sei $\vec{E}$ das Feld bei $\vec{r}$ im mitbewegten Bezugssystem des Leiterkreises.



Also im mitbewegten System eine einzige Ladung q (in Ruhe im mitbewegten System) erfährt eine Kraft:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$ (das ist nun ein elektrostatisches Problem, S. 17)

Im Laborsystem, stellt die Punktladung q ein Strom dar,

$$\vec{j}(\vec{r}) = q\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{R}_0)$$

und deswegen übt ~~eine~~ magnetische Induktion eine magnetische Kraft (S. 79): $q\vec{v}\times\vec{B}$ (Lorentz-Kraft)

Galileische Invarianz fordert, daß die Kraft $\underset{\text{Ruhe}}{\vec{F}} = \underset{\text{Labor}}{\vec{F}'}$.

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}' &= q\cdot(\vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B})\\ \vec{F} &= q\vec{E}\end{aligned}\right\}$$ → Verallgemeinere Form der Lorentz-Kraft; das definiert das $\vec{E}'$-Feld im Laborsystem

Also $$\boxed{\vec{E} = \vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B}}$$

Diese Beziehung ist sehr wichtig, da sie deutlich die Verknüpfung zwischen magnetischen und elektrischen Feldern macht! (Irgendwie, ob wir eine Ladung oder ein Strom haben, ist nur eine Frage der Perspektive!!)

(Bemerkung: man fordert hier Galilei-Invarianz. Das ist nur gültig für $v \ll$ Lichtgeschwindigkeit.)

* Wir bleiben nun bei dem bewegenden Kreis C, und wir kehren am ~~Faraday~~-Induktionsgesetz zurück

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -k\frac{d}{dt}\int_{F_C}\vec{B}\cdot d\vec{f}$$

wobei $\vec{E}$ das Feld in mitbewegten Bezugssystem ist.

* Mit dem Kettenregel:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

Andeerseits

$\vec{v}$ ist Konstant
$\vec{\nabla}\vec{B}=0$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

Also $\frac{d}{dt}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})$

Stokes-Satz

$$\frac{d}{dt}\int_{F_C}\vec{B}\cdot d\vec{f} = \int_{F_C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} + \int_{F_C}[\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})]\cdot d\vec{f} = \int_{F_C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} + \oint_C d\vec{r}\cdot(\vec{B}\times\vec{v})$$

Dann $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -k\left\{\int_{F_C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} - \oint_{F_C} d\vec{r}(\vec{v}\times\vec{B})\right\}$

Also $\oint_C(\vec{E} - k\vec{v}\times\vec{B})d\vec{r} = -k\int_{F_C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f}$

* Wenn der Leiter-Kreis sich nicht bewegt ($\vec{v}=0$) sind Labor- und Ruhesystem gleich. In diesem Fall $\frac{d\vec{B}}{dt} \equiv \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, und damit

$$\oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{r} = -k\int_{F_C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f}$$

Damit $\oint_C(\vec{E} - k\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r} = \oint_C \vec{E}'\,d\vec{r}$

- Das gilt für alle beliebige Leiter C, also

$$\vec{E} = \vec{E}' + k\,\vec{v}\times\vec{B}$$

Aber von unserer Diskussion auf S. 92 hatten wir

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B}$$

also $\boxed{k = 1}$

Also die endgültige Form des Faraday-Induktionsgesetzes ist:

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int_{F_C} \vec{B}\cdot d\vec{f}}$$

Stokes-Satz $\rightarrow \;\|$

$$\int_{F_C} (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{f}$$

Wir nehmen nun als Bezugssystem das Ruhesystem des Leiters (also $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} = \dot{B}$)

Also $\int_{F_C} d\vec{f}\left[\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] = 0$

- Das gilt für alle C, also

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \longrightarrow \underline{\text{differentielle Form des Induktionsgesetzes}}$$

- Ich erinnere euch, daß in der Elektrostatik (S. 61) wir hatten $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$. Wir bekommen das noch mal wenn $\partial B/\partial t = 0$.

---

* <u>Verschiebungsstrom</u>

- In der Magnetostatik hatten wir das Ampere-Durchflutungsgesetz $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ (S. 87). Diese Beziehung ist für nicht-stationäre Probleme nicht mehr gültig. Das ist einfach zu verstehen:

$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{J}$. Aber wegen der Kontinuitätsgleichung wissen wir, daß (S. 67): $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

* Also die Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ muss ergänzt werden (Maxwellsche Ergänzung)

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_0$$

wobei $0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_0 = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J}_0 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_0 = \frac{\partial\rho}{\partial t}$

* Aus der Maxwell-Gleichung (S. 61)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho(\vec{r}) \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{D}} \longrightarrow \vec{J}_0 = \dot{\vec{D}} \equiv \text{Verschiebungs-Strom}$$

$(\dot{\vec{D}} \equiv \partial\vec{D}/\partial t)$

Also $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}}$

(*Bemerkung: diese Verschiebung kommt mikroskopisch aus der Zeitabhängigkeit der Polarisation ($\partial\vec{P}/\partial t \neq 0$), die einen zusätzliche Strom verursacht (S. 86))

---

* Nun haben wir die endgültige Form der Maxwell-Gleichungen

Homogene Gleichungen:
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \text{Keine magnetische Monopole}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \longrightarrow \text{Faraday-Induktion}$$

Inhomogene Gleichungen:
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \longrightarrow \text{Coulomb-Gesetz}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{J} \longrightarrow \text{Ampère-Gesetz (mit Verschiebungsstrom)}$$

Materialgleichungen (S. 61 und S. 88):
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \xrightarrow[\text{Media}]{\text{isotropische}} \mu_0\mu_r\vec{H}$$
$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \xrightarrow[\text{Media}]{\text{isotropische}} \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$$

* Aus diese Gleichungen kommt den gesamten Elektromagnetismus. Die vereinigen die Elektrizität und den Magnetismus, und die sind deswegen einige der wichtigsten Gleichungen der Physik überhaupt.

* Vektor- und Skalarpotential. Eichtransformation

* In unserer Diskussion der Elektrostatik haben wir schon die Idee vom Skalarpotential ($\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$) getroffen (S. 18), genauso haben wir die Idee vom Vektorpotential ($\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$) in unserer Diskussion der Magnetostatik getroffen (S. 78). Wir werden nun diese Idee für die Elektrodynamik verallgemeinern.

* Die homogene Maxwell-~~Gleichung~~ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ ist trivialerweise gelöst, wenn wir den Vektorpotential $\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}$ einführen (da $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$).

Nehmen wir nun die 2. homogene Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\dot{\vec{B}}=0$.

Dann $\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\dot{\vec{A}})=0$

(Ich erinnere euch, daß $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi)=0$)

Also $$\boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)-\dot{\vec{A}}(\vec{r},t)}$$

* Ganz klar, wenn $\dot{\vec{A}}=0 \rightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$ und wir bekommen die elektrostatische Definition des Skalarpotentials (S. 18).

* Wie für unsere Diskussion der Magnetostatik (S. 78) gibt es eine gewisse Freiheit bei der Wahl von $\vec{A}$.

Eichtransformation: $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)$ wobei $\chi(\vec{r},t)$ ist eine beliebige skalare Funktion

Ganz klar $\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

Aber $\vec{E}$ muss auch erhalten werden, d.h. daß $\varphi(\vec{r},t)$ auch mittransformiert werden muss:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dot{\vec{A}} \Longrightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi'-\dot{\vec{A}}'=-\vec{\nabla}\varphi'-\dot{\vec{A}}-\vec{\nabla}\dot{\chi}$$

Also $\vec{\nabla}\varphi=\vec{\nabla}\varphi'+\vec{\nabla}\dot{\chi} \longrightarrow \varphi'(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r},t)-\dot{\chi}(\vec{r},t)$

* Also, die gesamte <u>Eichtransformation in der Elektrodynamik</u> ist

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A}'(\vec{r},t) &= \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)\\ \varphi'(\vec{r},t) &= \varphi(\vec{r},t) - \dot{\chi}(\vec{r},t)\end{aligned}}$$

So eine Transformation erhaltet $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die die physikalisch bedeutende größe sind.

* Also nun haben wir $\begin{cases}\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}\end{cases}$

und wir stecken diese Ausdrücke in den inhomogenen gleichungen: (wir konzentrieren uns hier auf den Vakuumfall, also $\mu_r = \varepsilon_r = 1$)

$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \longrightarrow -\nabla^2\varphi - \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dot{\vec{E}} \longrightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\left[-\vec{\nabla}\dot{\varphi} - \ddot{\vec{A}}\right]$$

Auf S. 70 haben wir gesehen, daß $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Also: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \frac{1}{c^2}(\vec{\nabla}\dot{\varphi} + \ddot{\vec{A}})$

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}\right] = -\mu_0\vec{J}}$$

und aus der ersten Gleichung:

$$\boxed{\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\rho/\varepsilon_0}$$

* Auf S. 78 haben wir die sogen. Coulomb-Eichung benutzt ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$). Für die jetzige Diskussion ist es aber besser, die sogen. <u>Lorentz-Eichung</u> $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0}$ zu benutzen.

* Diese Eichung führt zu einer vollständigen Entkopplung der beiden Differentialgleichungen für $\varphi(\vec{r},t)$ und $\vec{A}(\vec{r},t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi$$

Also die 1. Gleichung ist der Form:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

und die 2. Gleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

* Die beide Gleichungen haben damit eine wunderschöne symmetrische Form:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\,\varphi(\vec{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t) \\ \Box\,\vec{A}(\vec{r},t) &= -\mu_0\vec{j}(\vec{r},t) \end{aligned}} \quad \Big\} \quad \underline{\text{Symmetrische Form der Maxwell-Gleichungen}}$$

wobei $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow$ <u>d'Alembert Operator</u>

(Bemerkung: diese Form geht schon in die Richtung eines 4-dimensionalen Raumes. Das spielt eine entscheidende Rolle in der speziellen Relativitätstheorie)

* Wir kehren zurück zu dem d'Alembert Operator und den Maxwell-Gleichungen später in unserer Diskussion der elektromagnetischen Wellen.

* Energiesatz des Elektrodynamik. Poyntingvektor

* Auf Seiten 21 und 65 haben wir die Elektrostatische Energie diskutiert. Wir haben gesehen, dass die elektrostatische Energiedichte der Form $\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ ist. Wir werden nun diese Idee für die Elektrodynamik verallgemeinern.

* Nehmen wir eine Punktladung q, die sich in einem elektromagnetischen Feld mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Die Ladung erfährt also die Lorentz-Kraft (S. 74):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

* Bei einer räumlichen Verschiebung $d\vec{r}$ leistet das Feld am Teilchen eine (positive) Arbeit:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{v}$ und $d\vec{r}$ sind parallel zueinander, und daher $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r} = 0$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\vec{E}\cdot d\vec{r} + q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r} = $$
$$= q\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Dabei wird Feldenergie in kinetische Energie des Teilchens umgewandelt.

* Die entsprechende Leistung ist also:

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow \frac{dW}{dt} = \underbrace{(q\vec{v})}_{\text{Strom}}\cdot\vec{E}$$

* Bisher haben wir nur eine Ladung betrachtet. Wir können die Diskussion für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r},t)$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ verallgemeinern:

$$\underline{\text{Kraftdichte}} \Rightarrow \vec{f}(\vec{r},t) \equiv \rho(\vec{r},t)\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]$$

$$\underline{\text{Leistungdichte}} \Rightarrow \vec{f}(\vec{r},t)\cdot\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$$

* Aus der Maxwell-Gleichungen (S. 95) wissen wir, dass

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \longrightarrow \vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \dot{\vec{D}}$$

Also: $\vec{J}\cdot\vec{E} = \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{E}\cdot\dot{\vec{D}}$

• Außerdem:

Eigenschaften des Spatproduktes

Maxwell-gleichungen $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) =$$
$$= -\vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})$$

• Also: $\vec{J}\cdot\vec{E} = -\vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} - \vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$

• Für linearen homogenen Medien (S. 95): $\vec{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}$.

Also: $\vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{B})$

das ist einfach zu sehen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{B}) = \dot{\vec{H}}\cdot\vec{B} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_r\mu_0}\dot{\vec{B}}\cdot\vec{B} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}$$
$$= \dot{\vec{B}}\cdot\vec{H} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} = 2\vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}$$

und $\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{D})$

• Und damit:

$$\vec{J}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{D}\right] - \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$$

• Wir führen nun zwei wichtige Definitionen ein:

* Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$\boxed{w(\vec{r},t) \equiv \frac{1}{2}(\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{D})}$$

Bemerkung: das ist die Verallgemeinerung der Energiedichte der Elektrostatik (S. 65)).

* Poynting-Vektor

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r},t) \equiv \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)}$$

Wir werden sofort die physikalische Bedeutung des Poynting-Vektors diskutieren.

• Dann $\vec{J}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}w - \vec{\nabla}\cdot\vec{S}$

* Wir bekommen also ein Art Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{J}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}\cdot\vec{S}}$$ $\equiv$ POYNTING-THEOREM

* Nehmen wir nun ein Volumen V. Dann:

$$E_{FELD} = \int_V w \, d^3r \quad \Rightarrow \text{Feldenergie innerhalb des Volumens } V$$

Dann

$$\frac{d}{dt} E_{FELD} = -\int_V d^3r \, (\vec{J}\cdot\vec{E}) - \int_V d^3r \, (\vec{\nabla}\cdot\vec{S})$$

Also, die Feldenergie in V ändert sich durch:

1) Umwandlung in mechanische Teilchenenergie (und letztendlich in Wärme)

$$\frac{dE_{MECH}}{\partial t} = P_{MECH} \equiv \int_V d^3r \, (\vec{J}\cdot\vec{E}) \quad \leftarrow \text{Leistung}$$

Ich erinnere euch von S. 99, dass die Feldenergie in kinetische (also mechanische) Energie der Teilchen umgewandelt wird, und zwar mit Leistung $\vec{J}\cdot\vec{E}$.

2) Strahlung durch die Oberfläche von V

Mit Leistung: $\int_V d^3r \, \vec{\nabla}\cdot\vec{S} \underset{\text{Gauß-Satz}}{=} \int_{S(V)} \vec{S}\cdot d\vec{f} \equiv P_{STR}$

* Also: $$\boxed{\frac{d}{dt}\left[E_{FELD} + E_{MECH}\right] = -P_{STR} = -\int_{S(V)} \vec{S}\cdot d\vec{f}}$$

Der Poynting-Vektor hat also die Bedeutung einer Energiestromdichte

* Zussamengefasst: Das elektromagnetische Feld:
  * Bewegt die Teilchen des Mediums (Wärme)
  * Verursacht eine Strahlung

* Impulssatz der Elektrodynamik

* Wir haben gerade gesehen, dass das elektromagnetische Feld Bewegung + Strahlung verursacht. Wir werden nun mal sehen was passiert mit dem Impuls. Hier werden wir sehen, dass das elektromagnetische Feld selbst ein Impuls hat.

* Aus dem 2. Newton-gesetz kennen wir, dass die Änderung des gesamten Impulses eines Teilchensystems ($\vec{P}_{MECH}$) gleich die Gesamtkraft ist. Also, für geladenen Teilchen in einem elektromagnetischen Feld:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{MECH} = \int_V d^3r\, \rho(\vec{r},t)\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]$$

$$= \int_V d^3r\, \left[\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}\right] \underset{\text{Maxwell-gleichungen}}{=} \quad \left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \\ \vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \dot{\vec{D}}\end{array}\right\}$$

$$= \int_V d^3r \left\{\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \left[\vec{\nabla}\times\vec{H} - \dot{\vec{D}}\right]\times\vec{B}\right\} =$$

Wir addieren $\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$ (es ist sowieso Null)

$$\dot{\vec{D}}\times\vec{B} = \frac{d}{dt}(\vec{D}\times\vec{B}) - \vec{D}\times\dot{\vec{B}} \underset{\text{Maxwell-gleich}}{=} \frac{d}{dt}(\vec{D}\times\vec{B}) + \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$= \int_V d^3r \left\{\begin{array}{l}\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{\nabla}\times\vec{H})\times\vec{B} \\ + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{D} - \frac{d}{dt}(\vec{D}\times\vec{B})\end{array}\right\}$$

* Wir führen nun die Definition des <u>Impulses des elektromagnetischen Feldes</u>

$$\vec{P}_{FELD} \equiv \int d^3r\, (\vec{D}\times\vec{B})$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{MECH} + \vec{P}_{FELD}\right) = \int d^3r \left\{\begin{array}{l}\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \vec{H}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) \\ - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\end{array}\right\}$$

An der rechten Seite haben wir eine schöne symmetrische Kombination von $(\vec{E},\vec{D})$ und $(\vec{H},\vec{B})$

- Wir setzen noch mal ein lineares homogenes Medium.

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Man kann ziemlich einfach beweisen, daß in diesem Fall:

$$\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_i = \varepsilon_r \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[E_i E_j - \frac{1}{2}E^2 \delta_{ij}\right]$$

$$\left[\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right]_i = \frac{1}{\mu_r\mu_0} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}B^2 \delta_{ij}\right]$$

i-Komponente

Dann

$$\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right]_i$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\varepsilon_r\varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_r\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left[\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_r\mu_0}B^2\right]\right\}$$

Das bringt uns direkt an der <u>Definition des Maxwell-Spannungstensors</u>

$$\boxed{T_{ij} \equiv \varepsilon_r\varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_r\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_r\mu_0}B^2\right)}$$

Sei $\vec{T}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$, dann $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \vec{\nabla}\cdot\vec{T}_i$

Also $\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right]_i = \vec{\nabla}\cdot\vec{T}_i$

Dann
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{MECH} + \vec{P}_{FELD}\right)_i = \int_V d^3r\ \vec{\nabla}\cdot\vec{T}_i \overset{\text{Gauß-Satz}}{=} \underbrace{\oint_{S(V)} d\vec{f}\cdot\vec{T}_i}} \Rightarrow \text{Impulssatz}$$

↳ i-te Komponente des Impulsflusses auf S(V)

* Wenn wir über den gesamten Raum integrieren

$\oint_{S(\infty)} d\vec{f} \cdot \vec{T}_i = 0 \Leftarrow$ ρ und $\vec{j}$ sind nur in V nicht Null.
Weit entfernt von V (Multipolentwicklung)
$|\vec{E}| \sim 1/r^2$ (Monopol), $|\vec{B}| \sim 1/r^3$ (Dipol)
Also $T \sim E^2, B^2 \sim 1/r^4, 1/r^6$. Aber
die Fläche geht mit r^2, also $\oint_{S(\infty)} d\vec{f} \cdot \vec{T}_i = 0$

* Dann

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\vec{P}_{MECH} + \epsilon_0\epsilon_r \int_{\infty} d^3r \, (\vec{E}\times\vec{B})}_{\text{Das hier ist eine Konstante}}\Big] = 0$$

→ Aber das ist genau die Form eines Erhaltungssatzes für den gesamten Impuls. Der gesamte Impuls hat also 2 Komponenten:

* Mechanische Impuls der Teilchen
* Impuls des elektromagnetischen Feldes (deswegen unsere vorherige Definition)

$$\vec{P}_{FELD} = \varepsilon_0\varepsilon_r \int d^3r \, (\vec{E}\times\vec{B}) = (\varepsilon_0\varepsilon_r)(\mu_0\mu_r)\int d^3r \, \underbrace{(\vec{E}\times\vec{H})}_{\vec{S}}$$

(Seite 100)

Also wir können eine Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes definieren:

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}}_{FELD} = (\varepsilon_0\mu_0)(\varepsilon_r\mu_r)\vec{S}}$$

Also die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes zeigt in Richtung des Poyntingvektors.

(Bemerkung: die Idee von Impuls des Elektromag. Feldes ist mit der Idee der Strahlungsdruck verknüpft, die eine wichtige Rolle in z.B. Sonnensegeln, Schweifen von Kometen, und der Dynamik der Sternen spielt.)