• Elektromagnetische Wellen

· Zu den bedeutendsten Erfolgen der Maxwell-Theorie (und eigentlich der Klassischen Physik) gehört die Erkenntnis, dass sich elektromagnetische Felder unabhängig von irgendwelchen Ladungen und Strömen selbst in Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreite können. Eigentlich ist die Licht nichts anders als diesen elektromagnetische Felder.

· Die Licht braucht also kein Medium für die Ausbreitung. Schall in gegenteil ist eine Druckwelle und verlangt ein Medium (z.B. Luft) für die Ausbreitung. In Vakuum gibt es natürlich kein Schall! Vor der Maxwell-Theorie dachte man, dass etwas ähnliches mit der Licht passiete, und daher dachte man, dass es ein Äther (anstatt Vakuum) in Allraum gab. Das ist aber nicht der Fall.

· Wir werden nun die Theorie der elektromagnetischen Wellen studiren. Wir werden im Moment nur den Fall eines ungeladen Insulators (z.B. Vakuum) untersuchen (wobei $\rho=0, \vec{J}=0$)

Bemerkung: wir werden später die Erzeugung von elektromagnetischen Wellen (die $\rho\neq 0$, $\vec{J}\neq 0$ verlangt) studieren. Hier sind wir nur an der Ausbreitung der Wellen interessiert.)

Wir werden außerdem ein lineares homogenes Medium annehmen, also $\vec{B}=\mu_r\mu_0\vec{H}$ und $\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$.

Die Maxwell-Gleichungen lauten also:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad (\text{da } \rho=0)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{E}&=-\dot{\vec{B}}\\ \vec{\nabla}\times\vec{B}&=\varepsilon_r\mu_r\varepsilon_0\mu_0\dot{\vec{E}} \quad (\text{da } \vec{J}=0)\end{aligned}\right\}$$

die $\vec{B}$-Felder erzeugen die $\vec{E}$-Felder und umgekehrt. Das erlaubt die Ausbreitung von elektromagnetischen Felder sogar ohne Medium!

* Aus den Eigenschaften des Tripelproduktes:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} \overset{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0}{=} -\nabla^2\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times(-\dot{\vec{B}}) = -\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times\vec{B}] = -\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon_r\mu_r\varepsilon_0\mu_0\dot{\vec{E}}]$$

Also $\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0\ddot{\vec{E}} = 0$

* Ebenfalls:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times[\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0\dot{\vec{E}}] = \varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0\ddot{\vec{B}}$$

Also $\nabla^2\vec{B} - \varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0\ddot{\vec{B}} = 0$

* Sei $u \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}} \overset{\text{S. 70}}{=} \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$

Wir definieren hier den Brechungsindex: $n \equiv \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

also $u = c/n$ → u hat die Dimension einer Geschwindigkeit (wir werden sofort die physikalische Bedeutung von u sehen)

* Sei $\Box \equiv \nabla^2 - \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ der D'Alembert Operator

(Bemerkung: Die Definition von $\Box$ ist fast wie auf S. 98 aber wir haben u anstatt c.)

Dann $\left.\begin{array}{l}\Box\,\vec{E} = 0\\ \Box\,\vec{B} = 0\end{array}\right\}$ homogene Wellengleichungen

* <u>Wellengleichung</u>

- $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllen also eine Gleichung der Form

$$\Box \vec{\Psi} = 0 \longrightarrow \text{homogene Wellengleichung}$$

- Die Lösungen der homogenen Wellengleichung (also die Wellen) sind der Form:

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t) = \vec{f}_-(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \vec{f}_+(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

wobei $\vec{f}_\pm$ beliebige Funktionen der <u>Phasen</u>

$$\varphi_\pm(\vec{r},t) = \vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t \qquad (\text{wir nehmen } \omega \geq 0)$$

sind. Die räumliche und zeitliche Abhängigkeit ist also sehr speziell.

* $|\vec{k}|$ und ω müssen eine bestimmte Bedingung erfüllen. Das ist einfach zu sehen:

d.h. 2. Ableitung nach der Phasen $\varphi_\pm$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\Psi} &\overset{\text{Kettenregel}}{=} k^2 \vec{\Psi}'' \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\Psi} &= \omega^2 \vec{\Psi}'' \end{aligned}\right\} \quad \Box\vec{\Psi} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{u^2}\right)\vec{\Psi}'' = 0$$

also $\boxed{\omega = uk}$

D.h. dass in einer Welle die räumliche und die zeitliche Abhängigkeit miteinander verknüpft sind.

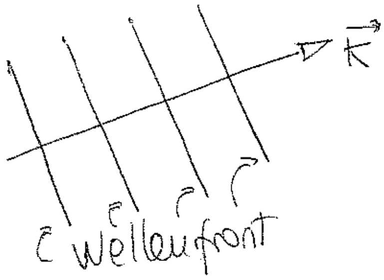
* Nehmen wir $\vec{f}_-$ (für f_+ ist das gleiche). Da $\vec{f}_-$ eine Funktion von $\varphi_-(\vec{r},t)$ ist, dann bei konstanter φ_- ist $\vec{f}_-$ konstant. Suchen wir nun die Bedingung für eine konstante Phase bei einer gewissen Zeit $t = t_0$:

$$\varphi_-(\vec{r},t_0) = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t_0 = \text{const} \Longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const}$$

Das ist eine Gleichung der Form

$$k_x x + k_y y + k_z z = \text{const}$$

und daher die Gleichung einer Ebene. Diese Ebene ist der sogen. <u>Wellenfront</u>. Der Normalvektor der Ebene ist $\vec{k}$, also $\vec{k}$ ist senkrecht zu der Wellenfrontebene



· Die Bedingung für eine Ebene mit konstanter Phase $\varphi_-^{(0)}$ ist (für eine Zeit t):

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = \varphi_-^{(0)} + \omega t \rightarrow$$

→ Die Projektion von $\vec{r}$ entlang $\vec{k}$ ($r_\parallel \equiv \frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{k}$) erfüllt

$$r_\parallel = \frac{1}{k}\varphi_-^{(0)} + \frac{\omega}{k} t = \frac{1}{k}\varphi_-^{(0)} + u t$$

Dann $\frac{dr_\parallel}{dt} = u$

Die Geschwindigkeit u ist also die Geschwindigkeit der Wellenfronten einer gewisse Phase $\varphi_-^{(0)}$. Daher nennt man u die <u>Phasengeschwindigkeit</u>

---

* <u>Ebene Wellen</u>

· Eine spezielle Lösung der Wellengleichung sind die ebene Wellen:

$$\vec{f}_\pm(\vec{r},t) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)}$$

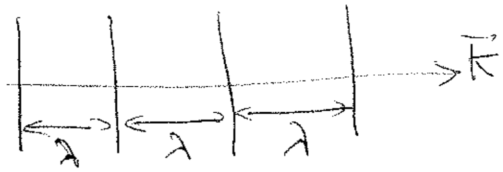
(<u>Bemerkung</u>: Wir benutzen hier eine komplexe Schreibweise, aber die physikalisch relevanten Größen sind nur die Realteile.)

• Die ebene Wellen weisen eine raum-zeitliche Periodizität aus.

• Räumliche Periodizität

• Die Phasen sind $\varphi_\pm = \vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t$, also wenn $\vec{r} \to \vec{r} + \Delta\vec{r}_n$, solch daß $\vec{k}\cdot\Delta\vec{r}_n = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, dann $\varphi_\pm \Rightarrow \varphi_\pm + 2\pi n$ und daher bleibt $\vec{f}_\pm$ gleich.

• Zwei nächstbenachbaren Wellenfronten mit demselben $f_\pm$ Wert haben ein Abstand $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ $\Longrightarrow$ Wellenlänge



(Bemerkung: $\vec{k}$ wird der Wellenvektor genannt.)

• Zeitliche Periodizität

• Wenn $t \to t + \Delta t_n$, solch daß $\omega\Delta t_n = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, dann noch mal $\varphi_\pm \to \varphi_\pm + 2\pi n$, und daher bleibt $\vec{f}_\pm$ erhaltet.

• Es gibt also eine Schwingung mit Periode $\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega}}$

(Bemerkung: ω wird die Kreisfrequenz genannt.)

• Man definiert die Frequenz der Schwingung als

$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$ (ω wird in Hz (Hertz) gemessen)

* Wie schön erwähnt, gibt es eine Beziehung zwischen räumliche und zeitliche Abhängigkeit (da $\omega = uk$), und daher zwischen Wellenlänge und Periode: $\boxed{u = \frac{\lambda}{\tau}}$

* Transversale elektromagnetische Wellen

* Bisher haben wir allgemeine Resultaten über Wellen hergeleitet. Wir sind aber natürlich besonders an der Eigenschaften der Wellen in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ interessiert. Dabei lernen wir alles Wesentliche bereits bei der Betrachtung der Ebenen Wellen:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)}$$

und der Anwendung der Maxwell-gleichungen.

- Aus $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = i(\vec{k}\times\vec{E}_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$-\dot{\vec{B}} = -\vec{B}_0(-i\omega')\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)}$$

Also $\quad i(\vec{k}\times\vec{E}_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = +i\,\vec{B}_0\,\omega'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)}$

Das muss für alle $\vec{r}$ und t gelten, also $\vec{k}=\vec{k}'$, $\omega=\omega'$ (also $\vec{E}$ und $\vec{B}$ weisen dieselbe räumliche und zeitliche Periodizität)

und außerdem: $\boxed{\vec{k}\times\vec{E}_0 = \vec{B}_0\,\omega}$

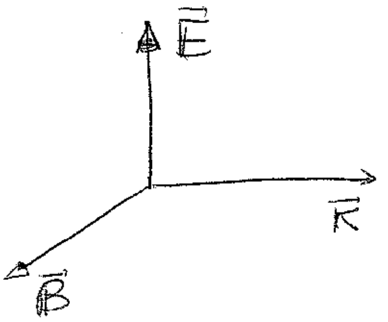
- Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = i(\vec{k}\cdot\vec{E}_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0$

also $\boxed{\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0}$

- Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$

Aus $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{u^2}\dot{\vec{E}} \longrightarrow \vec{k}\times\vec{B}_0 = \frac{-\omega}{u^2}\vec{E}_0$

· Also $\vec{k}$ ist senkrecht zu $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ ($\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$)
und außerdem $\vec{E}_0$ ist senkrecht zu $\vec{B}_0$ ($\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0$).
Also $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ und $\vec{k}$ bilden <u>ein orthogonales System</u>



Man spricht von <u>transversalen Wellen</u>

× sei z.B. $\vec{k} = k\,\vec{e}_z \longrightarrow$ dann $\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y$

Da $\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E}_0) \longrightarrow \vec{B}_0 = \frac{1}{u}(-E_{0y}\vec{e}_x + E_{0x}\vec{e}_y)$

Also $\vec{E} = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y)\,e^{i(kz-\omega t)}$

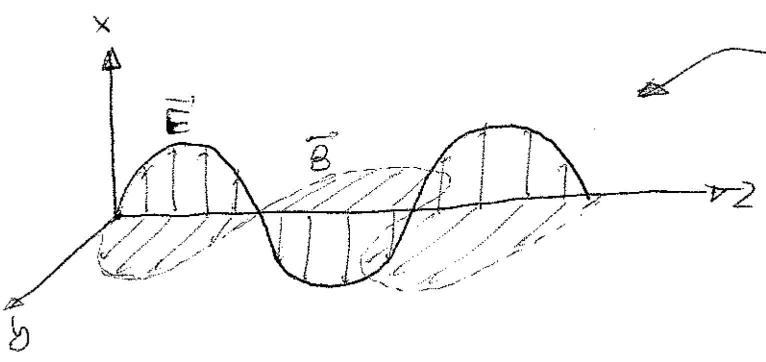
$\vec{B} = \frac{1}{u}(-E_{0y}\vec{e}_x + E_{0x}\vec{e}_y)\,e^{i(kz-\omega t)}$

Also für die Beschreibung der elektromagnetischen Wellen brauchen wir nur $\vec{E}$ (oder nur $\vec{B}$)

· Wie sieht eine elektromagnetische Welle aus?
Nehmen wir ein Beispiel: $E_{0y} = 0$. Also:

$\vec{E} = E_0\,\vec{e}_x\,e^{i(kz-\omega t)} \xrightarrow{\text{Realteil}} E_0\,\vec{e}_x\cos(kz-\omega t)$

$\vec{B} = \frac{E_0}{u}\,\vec{e}_y\,e^{i(kz-\omega t)} \longrightarrow \frac{E_0}{u}\,\vec{e}_y\cos(kz-\omega t)$



Bei einer gewissen Zeit t sieht die Lösung so aus

* Polarisation

* Wir werden nun eine wichtige Eigenschaft der elektromagnetischen Wellen, nämlich die Polarisation, dass mit der Orientierung des Vektors $\vec{E}$ zu tun hat.

* Die Koeffizienten E_{0x} und E_{0y} auf Seite 111 sind im Allgemeinen komplexe Größen der Form:

$$\left.\begin{aligned} E_{0x} &= |E_{0x}|\, e^{i\varphi} \\ E_{0y} &= |E_{0y}|\, e^{i(\varphi+\delta)} \end{aligned}\right\}$$

δ entspricht eine Phasenverschiebung zwischen E_{0x} und E_{0y}. Die spielt eine wichtige Rolle in unserer jetzigen Diskussion.

. Dann:

$$\vec{E} = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y)\, e^{i(kz-\omega t)} = |E_{0x}|\, e^{i(kz-\omega t+\varphi)}\, \vec{e}_x + |E_{0y}|\, e^{i(kz-\omega t+\varphi+\delta)}\, \vec{e}_y$$

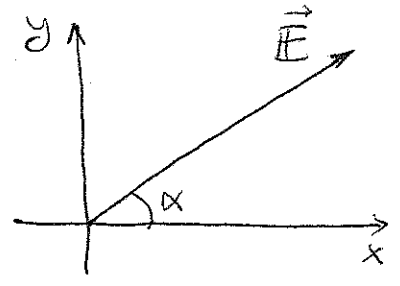
$$\xrightarrow{\text{Realteil}} \vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$$

wobei
$$E_x = |E_{0x}|\cos(kz-\omega t+\varphi)$$
$$E_y = |E_{0y}|\cos(kz-\omega t+\varphi+\delta)$$

* Die Phasenverschiebung δ definiert verschiedene Sorten von Polarisationen:

- **Lineare Polarisation** (auch π-Polarisation genannt)
  - $\delta = 0, \pm\pi \implies \cos(kz-\omega t+\varphi+\delta) = \pm\cos(kz-\omega t+\varphi)$

Dann $\Rightarrow$
$$\vec{E} = \left[|E_{0x}|\vec{e}_x \pm |E_{0y}|\vec{e}_y\right]\cos(kz-\omega t+\varphi)$$
$$= |\vec{E}|\,\vec{e}\,\cos(kz-\omega t+\varphi)$$



wobei $|\vec{E}| = |E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2$

$\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ wobei $\tan\alpha = \dfrac{\pm|E_{0y}|}{|E_{0x}|}$

$\vec{E}$ zeigt in einer festen Richtung $\vec{e}$

$\implies$ Polarisationsrichtung

- Zirkulare Polarisation (auch $\sigma_\pm$ - Polarisation genannt)
  - $\delta = \pm\pi/2$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$

    $\hookrightarrow \cos(kz - \omega t + \varphi + \delta) = \pm \sin(kz - \omega t + \varphi)$

Dann $\Rightarrow \vec{E} = E\left[\cos(kz-\omega t+\varphi)\,\vec{e}_x \pm \sin(kz-\omega t+\varphi)\,\vec{e}_y\right]$

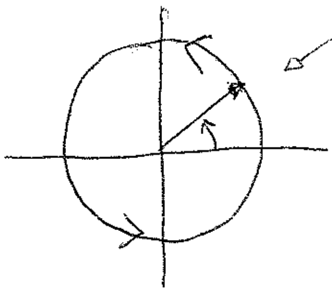
$= E\ \vec{e}(z,t)$

Für eine gewisse Zeit zeigt $\vec{E}(z,t)$ in Richtung des Vektors $\vec{e}(z,t)$

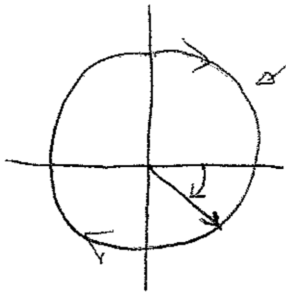
Für einen festen Ort z, sei $\Delta_z = kz + \varphi$, dann

$$\vec{e}(t) = \cos(\Delta_z - \omega t)\,\vec{e}_x \pm \sin(\Delta_z - \omega t)\,\vec{e}_y$$

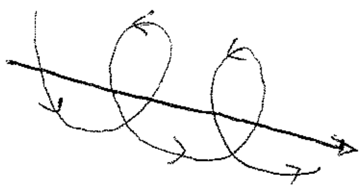
durchläuft einen Kreis von Radius 1 mit Winkelgeschwindigkeit $\pm\omega$

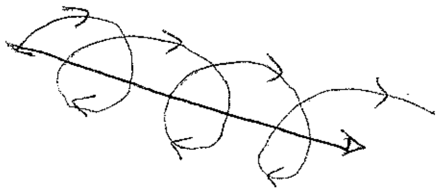


$\delta = \pi/2$
Rechtszirkulare Polarisation
(σ_+-Polarisation)

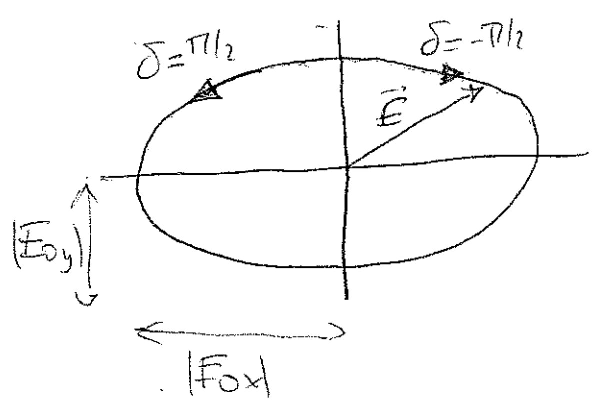


$\delta = -\pi/2$
Linkszirkulare Polarisation
(σ_--Polarisation)





- Elliptisch polarisierten Wellen
  - $\delta = \pm\pi/2$ aber $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$.
  - In den Fall folgt das $\vec{E}$-Feld einer Ellipse:



- <u>Beliebige Polarisation</u>

  - Eine Welle mit einer beliebigen Polarisation (S. 112) lässt sich immer als die Überlagerung von 2 linearpolarisierten Wellen darstellen:

$$\vec{E} = E_{0x}\, e^{i(kz-\omega t+\varphi)}\, \vec{e}_x + E_{0y}\, e^{i\delta}\, e^{i(kz-\omega t+\varphi)}\, \vec{e}_y$$

(<u>Bemerkung</u>: genauso können wir eine Welle einer beliebigen Polarisation als eine lineare Überlagerung von 2 zirkularpolarisierten Wellen darstellen, eine σ_+ und eine σ_-. Versuch es!)

- Also, zusammengefaßt, eine ebene Welle mit einer linearen Polarisation ist der Form:

$$\vec{E} = \underbrace{E}_{\text{Amplitude}}\, e^{i\overbrace{(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi)}^{}}\, \vec{e}$$

$\vec{e}$ ← <u>Polarisationsrichtung</u> (immer senkrecht zu $\vec{k}$ ⇒ Transversalität)

<u>Phase</u> ↳ Die hängt von $\left|\begin{matrix}\text{Wellenvektor}(\vec{k})\\ \text{Kreisfrequenz}(\omega)\end{matrix}\right|$ ab $(\omega = ck)$

- Wie schon erwähnt, eine ebene Welle mit beliebigen Polarisation kann immer als eine lineare Überlagerung zweier Wellen mit linearen Polarisation dargestellt werden.

  Außerdem wir werden sofort sehen, dass eine allgemeine Lösung der Wellengleichung als eine lineare Überlagerung von ebenen Wellen dargestellt werden kann.

- Also, die gesamte Physik der elektromagnetischen Wellen ist irgendwie schon klar von der Betrachtung einer ebenen Wellen mit linearen Polarisation!

* Interferenz

• Eine wichtige Eigenschaft der Wellen ist die Interferenzfähigkeit.

Nehmen wir zwei ebene Wellen (mit gleichen $\vec{k}$, ω und $\vec{e}$)

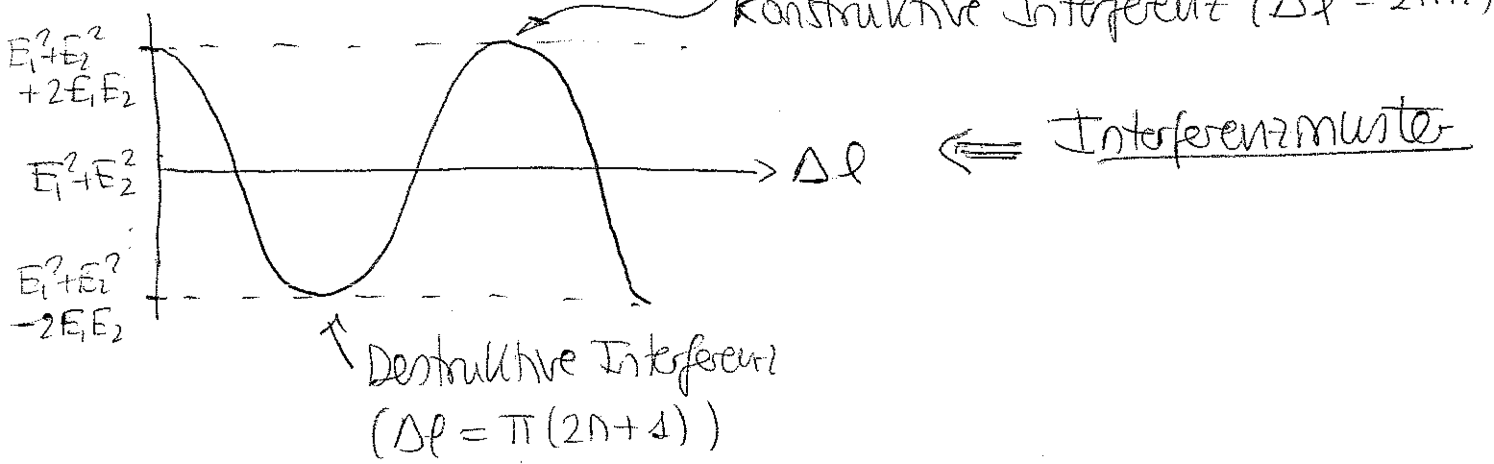
$$\vec{E}_1 = E_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \vec{e}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_2)} \vec{e}$$

Dann:

$$|\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

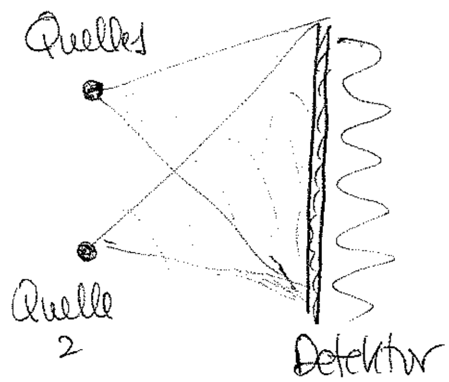
Als Funktion von $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ sieht $|\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$ so aus



$\Leftarrow$ Interferenzmuster

* Die Detektion der Licht hängt von $|\vec{E}|^2$

Bemerkung: die Detektoren reagieren als Funktion der Lichtintensität $\sim |\vec{E}|^2$)



• ~~Der~~ Detektor zeigt also ein Interferenzmuster

• Interferenzen spielen eine enorme Rolle in der Physik. Natürlich in Experimenten mit Licht (Optik) aber auch in anderen Bereichen (sehr wichtig in Quantenmechanik!)