Elektrostatik II: Besondere Ladungsanordnungen

Der Dipol

* Ein *Dipol* ist eine Anordnung von 2 Punktladungen $+q$ und $-q$

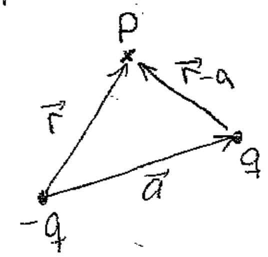
- $\vec{a} \equiv$ Abstandsvektor von $-q$ nach $+q$
- $\vec{p} = q\vec{a} \longrightarrow$ Dipolmoment (Der Dipolmoment ist also ein Vektor)

* In unserer Diskussion werden wir der Limes

$$\vec{p} = \lim_{\substack{a \to 0 \\ q \to \infty}} q\vec{a}$$

annehmen, wobei das Dipolmoment endlich bleibt.

* Ein Dipol ist (wie eine Ladung) auch eine Quelle ~~elektromagnetischer~~ Felder. Sehen wir das. Nehmen wir ein Punkt P. Der Koordinatenursprung setzen wir in $-q$. Das skalare Potential erzeugt von $+q$ und $-q$ ist also:



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{r} + \frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right]$$

* Aber $|\vec{a}|$ ist sehr klein. Wir machen also eine Taylor-Entwicklung:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{a})^2 - r^2a^2}{r^5}\right] + \cdots$$

(*Bemerkung*: Ich lasse euch den Beweis als Übung.
Hinweis: $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2\vec{r}\cdot\vec{a}}} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2}\right]^{-1/2}$
Ihr muß also eine Funktion $(1+x)^{-1/2}$ in der Nähe von $x=0$ Taylor-entwickeln. Ihr muß am Ende bis Glieder 2. Ordnung in $\left(\frac{a}{r}\right)$ gehen.)

* Also $$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r}\cdot\vec{a})}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\left[3(\vec{r}\cdot\vec{a})^2 - r^2a^2\right] + \cdots\right]$$

* Wenn wir den Limes $\lim\limits_{\substack{q\to\infty \\ a\to 0}}$ bei endlichen $\vec{p} = q\vec{a}$ machen, dann verschwinden alle Glieder außer

$$\boxed{\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}}$$

Eine elektrostatische Ladungskonfiguration mit einem solchen skalaren Potential heißt ein Dipol.

* Rechnen wir nun das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}_D(\vec{r})$:

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_D(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}\right] = \qquad \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{S. } 13)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left[\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \qquad \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})$$

$$\text{also } \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\tfrac{1}{r}\right)\right) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\left(\tfrac{1}{r}\right) + \vec{p}\times\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\tfrac{1}{r}\right)}_{\text{zero}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i p_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

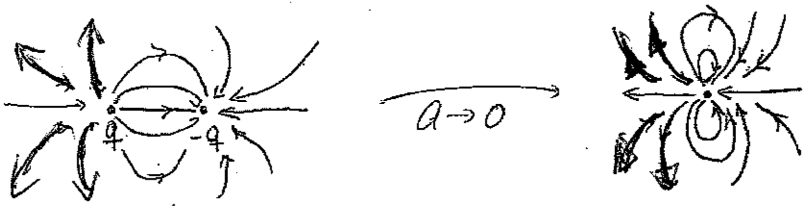
$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i p_i\left\{\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_i}\,\frac{1}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\right\} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i p_i\left\{\frac{\vec{e}_i}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^4}\,\frac{x_i}{r}\right\}$$

Also

$$\boxed{\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

* Wie sehen die Feld-Linien aus?

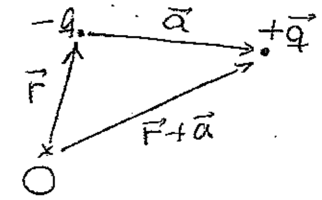
Kehren wir nun zu unserer Abbildung von S. 17 zurück:



$\Longrightarrow$ Elektrische Feldlinien eines Dipols.

(Für reelle Dipolen sieht das Feld nur so aus für Abstände $r \gg a$ (Fernzone). Für die Nahzone gilt die Taylor-Entwicklung von S. 27 nicht mehr, und $\vec{E}$ sieht entsprechend ganz anders aus.)

• Nehmen wir nun ein Dipol in einem $\vec{E}$-Feld. Wie sieht nun die Coulomb-Kraft auf den Dipol aus?



$$\vec{F}(\vec{r}) = -q\,\vec{E}(\vec{r}) + q\,\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})$$

* Wir nehmen nun $a \ll r$, dann können wir noch mal Taylor-entwickeln:

$$\vec{E}(\vec{r}+\vec{a}) = \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2\vec{E}(\vec{r}) + \cdots$$

also

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\,(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) + \frac{q}{2}\,(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2\vec{E}(\vec{r}) + \cdots$$

$$\underset{\substack{\lim q\to\infty \\ a\to 0}}{=} q\,(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r})$$

Coulomb-Kraft auf einem Dipol

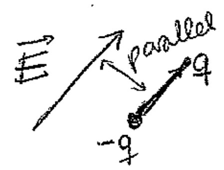
also $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r})}$

Also $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left[-\vec{p}\cdot\vec{E}\right] = -\vec{\nabla}V$

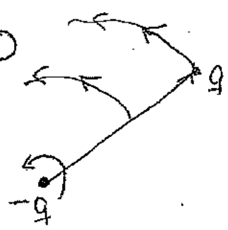
Der Dipol fühlt also ein Potential

$$\boxed{V(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})}$$

* Der Zustand geringster potentielle Energie ist also wenn $\vec{p}$ und $\vec{E}$ parallel sind



* Das ist interessant. Gucken wir es genauer.
Sei $\vec{E}$ homogen (mindestens auf einem Bereich).
Dann $(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{F} = 0$



• Aber der Drehmoment ist nicht Null!
~~Der~~ Drehmoment auf einem durch $-q$ gehende Achse ist

$$\vec{M} = \vec{a} \times (q\,\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})) = q\,\vec{a}\times\vec{E}(\vec{r}) + q\,\vec{a}\times(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) + \cdots$$

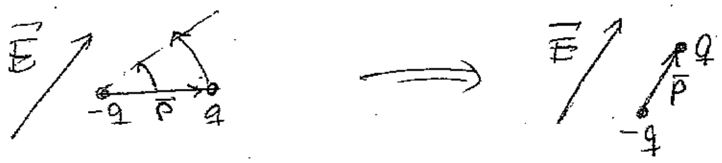
$$\underset{\substack{q\to\infty \\ a\to 0}}{=} \vec{p}\times\vec{E}(\vec{r})$$

- Also $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$

* $\vec{M}$ ist nur Null wenn $\vec{p}$ und $\vec{E}$ sind parallel!

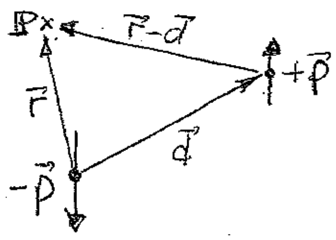
Also das Drehmoment versucht, den Dipol in eine Position minimaler potentieller Energie V zu drehen!

Nur dieser Zustand geringster Energie ist stabil.



- <u>Der Quadrupol</u>

* Einer Quadrupol wird von 2 antiparallele Dipolen $\vec{p}$ und $-\vec{p}$ zusammengesetzt:



- $\vec{d} \equiv$ Abstandsvektor von $-\vec{p}$ nach $\vec{p}$.
- Wie für den Dipol, lassen wir $|\vec{d}| \to 0$, $|\vec{p}| \to \infty$

wobei $\boxed{q_{ij} = \lim_{\substack{d_i \to 0 \\ p_j \to \infty}} d_i p_j}$ bleiben endlich.

Dies sind die <u>Quadrupolmomente</u> (die bauen eine Matrix)

* Das Potential einer Quadrupols ist die Summe der Potentiale der beiden Dipole:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{d})}{|\vec{r}-\vec{d}|^3}\right\} \overset{\vec{r}/r^3 = -\vec{\nabla}_r(1/r)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{r}\right) - \vec{p}\cdot\vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|}\right)\right\}$$

$$= \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{\nabla}_r\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|}\right\} \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{\nabla}_r\left\{\cancel{\frac{1}{r}} - \cancel{\frac{1}{r}} + (\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_r)\frac{1}{r} + \dots\right\}$$

$$\underset{\substack{d\to 0 \\ p\to\infty}}{=} \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{\nabla}_r\left[(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_r)\frac{1}{r}\right] \overset{\text{S. 28}}{=} \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left\{(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_r)\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) + \vec{d}\times\cancelto{0}{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)}\right\}$$

$$= \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i d_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{-\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i d_i\left\{\frac{\vec{e}_i}{r^3} - \frac{3x_i}{r^5}\vec{r}\right\} =$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i d_i \left\{ \frac{p_i}{r^3} - \frac{3x_i}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{p}) \right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{(\vec{d}\cdot\vec{p})}{r^3} + \frac{3}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{d})(\vec{r}\cdot\vec{p}) \right]$$

Also

$$\varphi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^5}\left[3(\vec{r}\cdot\vec{d})(\vec{r}\cdot\vec{p}) - r^2(\vec{d}\cdot\vec{p}) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^5}\left\{ 3\sum_i x_i d_i \sum_j x_j p_j - r^2 \sum_i d_i p_i \right\}$$

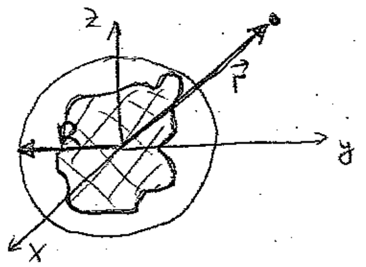
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^5}\sum_{ij}\left[3x_i x_j (d_i p_j) - r^2 \delta_{ij}(d_i p_j) \right]$$

$$\boxed{\varphi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^5}\sum_{ij} q_{ij}\,(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}$$

→ Eine elektrostatische Ladungsanordnung, die zu einem solchen skalaren Potential führt, wird <u>Quadrupol</u> genannt.

• <u>MULTIPOLENTWICKLUNG</u>

* Wir betrachten nun eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,')$, die sich in eine Kugel mit endlichem Radius R einbetten lässt.



* Falls keine Randbedingungen im Endlichen zu erfüllen sind dann $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (<u>Bemerkung</u>: Wir werden Randbedingungen später betrachten)

· Für allgemeine Verteilungen $\rho(\vec{r}\,')$ ist die Auswertung dieses Integrales typischerweise schwer.

Aber mehrmals sind wir nur an dem asymptotischen Verhalten von $\varphi(\vec{r})$ für $r \gg R$ (Fernzone).

In diesem Fall können wir Taylorentwickeln, und zwar nach $\left(\frac{r'}{r}\right)$-Potenzen.

* $$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} - (\vec{r}'\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla})^2\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{r}/r^3$$
$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}'\cdot\vec{r})^2 - r'^2r^2}{2r^5} + \cdots$$

(Bemerkung: $(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla})^2\frac{1}{r} = -(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla})\left[\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}\right] = -\sum_i x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j \frac{x_j' x_j}{r^3}\right] =$
$= -\sum_i x_i'\left\{x_i'\frac{1}{r^3} + \sum_j x_j' x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\} = -\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2$)

* Also
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}'\cdot\vec{r})^2 - r'^2r^2}{2r^5} + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\left[\int d^3r\,\vec{r}'\rho(\vec{r}')\right]$$
$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\underbrace{\underbrace{\left[\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\left[3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r'^2r^2\right]\right]}_{\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\left[3\sum_{ij} x_i x_i' x_j x_j' - r'^2\sum_{ij}\delta_{ij}x_i x_j\right]}}_{\sum_{ij} x_i x_j\left[\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\left[3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right]\right]} + \cdots$$

Also, wir können $\varphi(\vec{r})$ in der Form:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{\text{Dipol}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}}_{\text{Quadrupol}} + \cdots}$$

schreiben,

wobei man die folgenden Momente der Ladungsverteilung definiert:

* Gesamtladung (Monopol): $q = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')$
* Dipolmoment : $\vec{p} = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\,\vec{r}'$
* Quadrupolmoment (Quadrupoltensor) : $Q_{ij} = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\left[3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right]$

* Bemerkung: Aus der Definition von Q_{ij}, man sieht daß $\sum Q_{ii} = 0$

Also $\frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij}x_i x_j = \frac{1}{6}\sum_{ij} Q_{ij}\left[3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right]$ → und dann der Quadrupolterm hat genau dieselbe Form wie auf Seite (31)

* Das ist die so genannte <u>Multipolentwicklung</u>.

Wir können damit das Potential einer beliebigen Ladungsverteilung aus den Potentialen

* Einer <u>Punktladung</u> (q) $\sim 1/r$
* Eines <u>Dipols</u> ($\vec{p}$) $\sim 1/r^2$
* Eines <u>Quadrupols</u> (Q_{ij}) $\sim 1/r^3$

u.s.w.

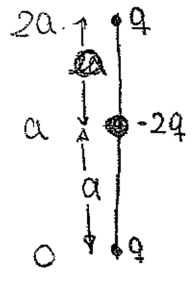
zusammensetzen.

· <u>Bemerkung</u>: Die Idee von Multipolentwicklung ist allgemeiner als die Elektrostatik. Sie wird auch z.B. in Gravitationsphysik angewendet, z.B. für die Berechnung des Gravitationsfeldes der Erde oder der Asteroiden.

* Natürlich wenn $q \neq 0$ dominiert in der Fernzone (r sehr groß) der Monopolterm (Punktladung); wegen der $1/r$ - Abhängigkeit.
* Aber wenn $q = 0$ (neutrale Ladungsverteilung), und $|\vec{p}| \neq 0$ ist der Dipolterm der dominant Term.
* Für z.B. <u>Spiegelsymmetrische Ladungsverteilungen</u> $\rho(\vec{r}') = \rho(-\vec{r}')$, dann $\vec{p} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\vec{r}' = 0$.

---

* <u>BEISPIEL</u>:



$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,[\delta(z) - 2\delta(z-a) + \delta(z-2a)]$$

* Gesamtladung $\rightarrow q = 0$
* Dipolmoment $\rightarrow \vec{p} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\vec{r}' = 0$ (Spiegelsymmetrische Verteilung)
* Quadrupolmoment: $Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\,[3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}]$

· Für $i \neq j \rightarrow Q_{ij} = 3\int d^3r' \rho(\vec{r}')\, x_i' x_j' = 0$ (wegen Symmetrie)

· $Q_{11} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\,[3x'^2 - r'^2] = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\,[2x'^2 - y'^2 - z'^2]$

$= -\int d^3r' \rho(\vec{r}')\, z'^2 = +2q\,a^2 - q\,(2a)^2 = -2q\,a^2$

$Q_{22} = -2qa^2$

$Q_{33} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\,[2z'^2 - x'^2 - y'^2] = 2\int d^3r' \rho(\vec{r}')\, z'^2 = 4qa^2$

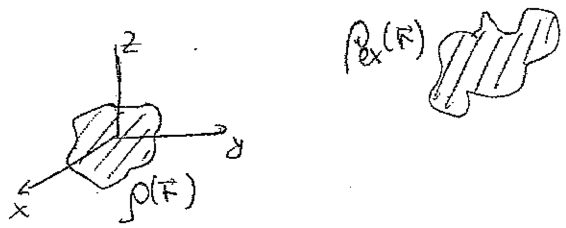
also $\Theta = 2qa^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Damit $\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qa^2 \left[\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}\right] = \frac{-qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right]$

$$\boxed{\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{-qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,(1 - 3\cos^2\theta)}$$

- WECHSELWIRKUNG EINER LADUNGSVERTEILUNG MIT EINEM ÄUßEREN FELD

* Wir nehmen nun 2 Ladungsverteilungen $\rho_{ex}(\vec r)$ und $\rho(\vec r)$



* Aus unserer Diskussion des S. 23 ist die Feldenergie der gesamten Ladungsdichte $\rho(\vec r) + \rho_{ex}(\vec r)$:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3r \int d^3r' \frac{[\rho(\vec r) + \rho_{ex}(\vec r)][\rho(\vec r\,') + \rho_{ex}(\vec r\,')]}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

* Die Wechselwirkungsenergie zwischen ρ und ρ_{ex} ist also

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r\, \rho(\vec r)\int d^3r' \frac{\rho_{ex}(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} = \int d^3r\, \rho(\vec r)\, \varphi_{ex}(\vec r\,')$$

wobei $\varphi_{ex}(\vec r)$ ist das von $\rho_{ex}(\vec r)$ erzeugte skalare Potential.

* Wir nehmen nun an, daß das $\rho(\vec r) \neq 0$ - Gebiet so klein ist, daß dort $\varphi_{ex}(\vec r) \simeq$ constant. Wir können dann eine Taylor-Entwicklung machen:

$$\varphi_{ex}(\vec r) = \varphi_{ex}(0) + (\vec r \cdot \vec\nabla)\varphi_{ex}(0) + \frac{1}{2}(\vec r \cdot \vec \nabla)^2 \varphi_{ex}(0) + \dots$$

$$= \varphi_{ex}(0) - \vec r \cdot \vec E_{ex}(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \left.\frac{\partial^2 \varphi_{ex}}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{r=0} + \dots$$

- Wir werden nun das ein bisschen umschreiben. Im $\rho(\vec r) \neq 0$ Gebiet, $\vec\nabla \cdot \vec E_{ex} = 0$ (physikalisch das bedeutet (S. 23), daß im Bereich $\rho(\vec r) \neq 0$ gibt es keine Ladung die $\vec E_{ex}$ erzeugt, also $\rho_{ex}(\vec r)$ und $\rho(\vec r)$ überlappen sich nicht).

• Das heißt:

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{ex} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(E_{ex})_i = -\sum_i \frac{\partial^2 \varphi_{ex}}{\partial x_i^2} = -\sum_{ij}\delta_{ij}\frac{\partial^2\varphi_{ex}}{\partial x_i\partial x_j}$$

• Also

$$\varphi_{ex}(\vec{r}) = \varphi_{ex}(\vec{r}) + \frac{r^2}{6}\sum_{ij}\delta_{ij}\frac{\partial^2\varphi_{ex}}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$= \varphi_{ex}(0) - \vec{r}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{ij}\left[3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right]\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\Big|_{r=0} + \dots$$

• Und damit

$$W_1 = \varphi_{ex}(0)\underbrace{\left[\int d^3r\,\rho(\vec{r})\right]}_{q} - \vec{E}(0)\underbrace{\left[\int d^3r\,\rho(\vec{r})\,\vec{r}\right]}_{\vec{p}}$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{ij}\underbrace{\left[\int d^3r\,\rho(\vec{r})\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)\right]}_{Q_{ij}}\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j} + \dots$$

Also

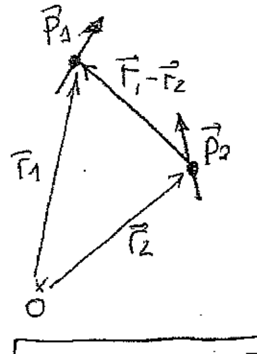
$$\boxed{W_1 = q\,\varphi_{ex}(0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{ij}Q_{ij}\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j} + \dots}$$

Die Ladung wechselwirkt mit dem externen Potential

Das Dipolmoment wechselwirkt mit dem externen Feld $\vec{E}$ (s. 29)

Das Quadrupolmoment wechselwirkt mit den Ortsableitungen des $\vec{E}$-Feldes

• Ein wichtiger Beispiel ist die Wechselwirkung 2 Dipolen ($\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$)



$\vec{p}_2$ erzeugt ein Feld (s. 28):

$$\vec{E}_D(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_2\right](\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5} - \frac{\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\right]$$

Die Wechselwirkungsenergie ist also:

$$\boxed{W = -\vec{p}_1\cdot\vec{E}_D(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} - \frac{3\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_2\right]\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_1\right]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5}\right]}$$

WICHTIG! ⇒ Dipol-Dipol-Wechselwirkung (sie hängt von der Orientierung der beiden Dipolen)