

ELEKTROSTATIK III : RANDWERTPROBLEME

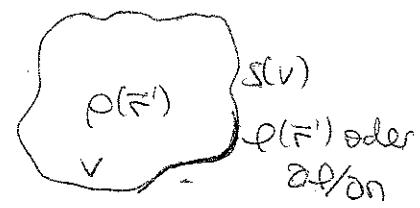
Auf S. 26 haben wir die Poisson-Gleichung $\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_0$ eingeführt. Dort haben wir gesagt, daß wenn $\rho(\vec{r})$ in einem endlichen Volumen gegeben ist, dann

$$\varphi(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Die Lösung der Poisson-Gleichung ist.

Das ist aber typischerweise nicht der Fall. Für viele praktische Probleme kennt man $\rho(\vec{r})$ für alle \vec{r} innerhalb eines Volumens V , und außerdem kennt man Randbedingungen an der Grenze des Volumens (also die Oberfläche $S(V)$). Typischerweise kennt man $\rho(\vec{r})$ oder $\nabla \varphi \cdot \vec{n}$ auf $S(V)$.

*Bemerkung: \vec{n} = Normalvektor zu $S(V)$
wir nun an $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot \vec{n}$]



Wir werden erstmal gucken, daß wenn wir $\rho(\vec{r}')$ für $\vec{r}' \in V$ und $\{\varphi(\vec{r}')\}$ für $\vec{r}' \in S(V)$ oder $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\vec{r}')$ für $\vec{r}' \in S(V)$ kennen, dann können wir $\varphi(\vec{r})$ für alle $\vec{r} \in V$ bestimmen.

für so was brauchen wir erstmal die dogen. Greensche Identität. Sie ist eigentlich eine Folge des Gauß-Satzes (S. 26):

$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3 r = \oint_{S(V)} \vec{A} \cdot \vec{d}f$; Wir nehmen nur 2 Funktionen $\varphi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$

$$\text{Sei } \vec{A} = \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi \rightarrow \int_V \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi d^3 r + \int_V \varphi^2 \nabla^2 \psi d^3 r = \oint_{S(V)} \varphi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{d}f$$

$$\vec{A} = \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi \rightarrow \int_V \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi d^3 r + \int_V \psi^2 \nabla^2 \varphi d^3 r = \oint_{S(V)} \psi \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{d}f \quad \Rightarrow \vec{d}f = \vec{n} f$$

Wir substituieren die beide $\Rightarrow \int_V [\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi] d^3 r = \int_V [\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}] d^3 r$

\Rightarrow Dan ist die Greensche Identität

* Wir werden nun die Greensche Identität anwenden.

Sei $\varphi \equiv \varphi(\vec{r})$ und $\Psi(\vec{r}) \equiv 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$

Also:

$$\int_V \left[\varphi(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}'}^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla_{\vec{r}'}^2 \varphi(\vec{r}') \right] d^3 r'$$

$$= \int_V d\vec{r}' \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\vec{r}') \right]$$

$$\text{Aus S. (13) kennen wir, daß } \nabla_{\vec{r}'}^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Also wenn $\vec{r} \in V$:

$$\int_V d^3 r' \varphi(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}'}^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi \int_V \varphi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = -4\pi \varphi(\vec{r})$$

Außerdem aus der Poissonsche Gleichung: $\nabla_{\vec{r}'}^2 \varphi(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')/\epsilon_0$

Damit

$$-4\pi \varphi(\vec{r}) + \int_V d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_V d\vec{r}' \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\vec{r}') \right]$$

Also für $\vec{r} \in V$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_V d\vec{r}' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right]$$

Also, für die Bestimmung von $\varphi(\vec{r})$ ($\vec{r} \in V$) brauchen wir $\rho(\vec{r}')$ ($\vec{r}' \in V$) und $\{\varphi(\vec{r}'), \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n}\}$ ($\vec{r}' \in S(V)$).

* Bemerkungen: Die Ladungen außerhalb von V spielen eine implizite Rolle durch die Randbedingungen. Wir werden später ein Beispiel zeigen.)

Wenn V der ganze Raum ist bekommt man was wir schon kennen,

also $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

- * Bemerkung: Das ist so, weil $\frac{f}{r} \sim 1/r$, $\frac{\partial f}{\partial n} \sim 1/r^2$ und $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|r-r'|} \sim 1/r^2$; also die $S(r)$ -Integrale verschwinden (die für $V \rightarrow \infty$ vernachlässigbar.) sind $1/r^3$ und damit sind die für $V \rightarrow \infty$ verschwinden.
- Es ist möglich zu beweisen (aber wir werden es hier nicht machen) daß wenn wir f auf $S(r)$ oder $\frac{\partial f}{\partial n}$ auf $S(r)$, dann ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig.
- Also Randbedingungen spielen eine wichtige Rolle. Wir müssen nun verstehen, was diese Randbedingungen eigentlich sind, und wo sie herkommen.

* LEITERN

- Man kann die Stoffe, die Ladungen tragen können, grob in zwei Klassen einteilen:
 - Isolatoren: Ladungen bleiben lokalisiert. Sie werden trotz wirkender E-Feldern nicht verschoben.
 - Leitern: Ladungen lassen sich frei verschieben wenn es ein E-Feld gibt.
- In Elektrostatik haben wir "Statik" also keine Zeitabhängigkeit und damit keine Bewegung. Also befindet sich der Leiter in elektrostatischen Gleichgewicht dann wenn innerhalb des Leiters $\vec{E} = 0$. Da $\vec{E} = -\vec{\nabla}f$, das heißt dass $f(\vec{r}) = \text{const.}$ innerhalb des Leiters.

- Das hat interessanten Folgen.



Nehmen wir einen Leiter, und eine Fläche S' innerhalb des Leiters. Da $E = 0$ innerhalb des Leiters $\Rightarrow \int_{S'} E \cdot d\vec{f} = 0 = q(v')/\epsilon_0$ (wobei $S' = S(v')$)

- Also für alle Volumina innerhalb des Leiters $\rightarrow q(v) = 0$, also das innere eines Leiters ist neutral!
- Was passiert dann am Rand des Leiters? Um das zu verstehen, wollen wir das Feldverhalten an Grenzflächen verstehen.

* FELDVERHALTEN AN GRENZFLÄCHEN

- Wir werden nun das Verhalten des E -Feldes an Grenzflächen untersuchen.
- Wir werden annehmen, dass die Grenzfläche eine Flächenladungsdichte σ tritt. Die Flächenladungsdichte wird so definiert:

~~DEFINITION~~ "Haut" der Fläche

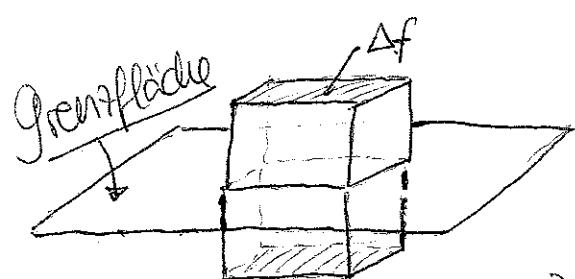
$$\sigma = \lim_{l \rightarrow 0} \rho(F) l \quad (\text{die hat Einheiten}) \quad (\text{un C/m}^2)$$

- Z.B.: Für eine homogen geladene Kugel $\rho(F) = \rho_0 = \text{constant}$ und damit $\sigma = 0$.

- Aber das ist nicht immer so, wir werden später ein Beispiel sehen.

- Wir werden erstmal die Normalkomponente von E an der Fläche (also $E \cdot \vec{n}$), und später die Tangentialkomponente. Dafür werden wir den Gauß- und den Stokes-Satz intensiv anwenden.

* Normalkomponente von \vec{E}



• Nehmen wir ein infinitesimales Volumen

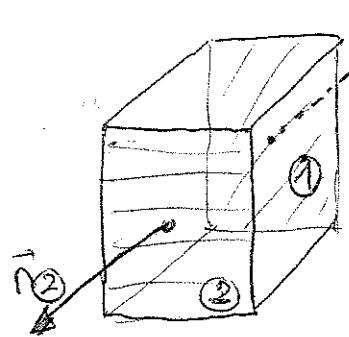
ΔV an der Grenzfläche (Abbildung).

Die Seiten des Parallellepipeds parallel zu der Oberfläche haben eine Fläche Δf .

* Wir benutzen den Gauß-Satz (S. 6):

$$\int_{\Delta V} d^3 r \nabla \cdot \vec{E} = \int_{S(V)} \vec{E}(r) \cdot d\vec{f}$$

* Wir werden nun dies Flächenintegral rechnen:

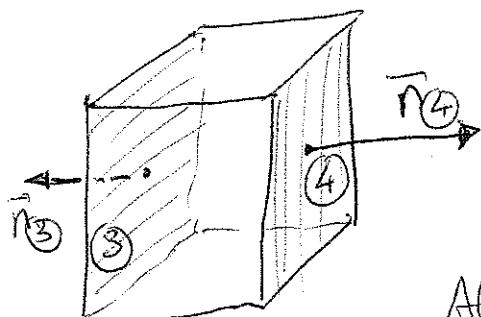


• Die Seiten ① und ② sind gleich aber die Normalvektoren sind in gegenseitige Richtungen gedreht.

Für infinitesimale Volumen ist das \vec{E} -feld

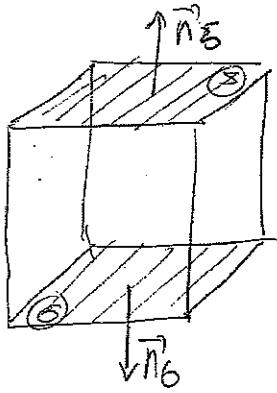
auf ① wie das \vec{E} -feld auf ②. Damit

$$\int_{①} \vec{E}(r) \cdot d\vec{f} = - \int_{②} \vec{E}(r) \cdot d\vec{f}$$



• Die Seiten ③ und ④ sind ebenfalls gleich und $\vec{n}_4 = -\vec{n}_3$.

Also $\int_{③} \vec{E}(r) \cdot d\vec{f} = - \int_{④} \vec{E}(r) \cdot d\vec{f}$.



- * Die Seiten ⑤ und ⑥ sind auch gleich und ~~$n_5 = -n_6$~~ \vec{n}
- * Aber hier die Seiten ⑤ und ⑥ liegen auf verschiedene Seiten der Grenzfläche. In ⑤ hat man ein Feld \vec{E}_a und in ⑥ ein Feld \vec{E}_i .

* Also $\int_{\text{S}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{f} = \vec{E}_a \Delta f \vec{n}$

$$d\vec{f} = \Delta f \cdot \vec{n}$$

* Bemerkung: wenn $\Delta V \rightarrow 0$ dann \vec{n} ist der Normalvektor der Grenzfläche.

$$\int_{\text{S}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \vec{E}_i \cdot \Delta f \vec{n}$$

* Also $\oint_{\text{S(V)}} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \sum_{\text{S(V)}} (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \Delta f \vec{n}$

Also $\int_{\Delta V} d^3 r \nabla \cdot \vec{E} = (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{n} \Delta f$

- * Aber aus der 1. Maxwell Gleichung (S. 25)

$$\int_{\Delta V} d^3 r \nabla \cdot \vec{E} = \int_{\Delta V} d^3 r \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \underset{M \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta f$$

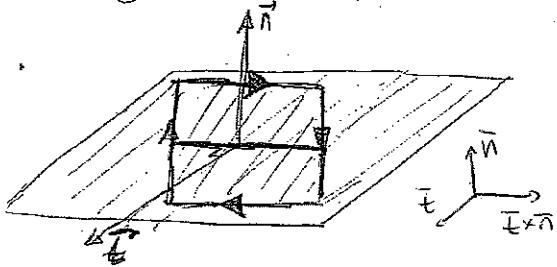
(Bemerkung, per Definition $\sigma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta V}$ wobei

Also $(\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{n} \Delta f = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta f$

$$(\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

→ Also wenn $\sigma \neq 0$ die Normalkomponente des \vec{E} -Feldes verhält sich an der Grenzfläche unstetig

* Tangentialkomponenten

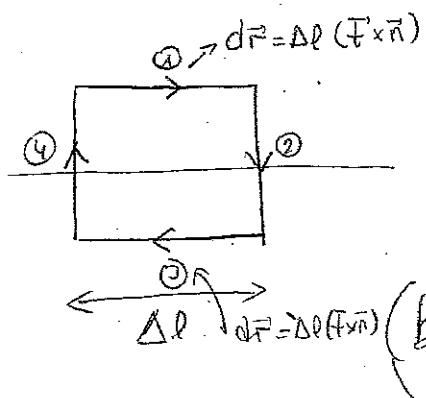


* Wir nehmen eine Fläche ΔF wie in der Abbildung. Sei C die Kurve die ΔF umrahmt.

* Weges des Stokes-Satzes:

$$\int_{\Delta F} d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Aber $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (s. 25), also $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$



für $\Delta F \rightarrow 0$ \vec{E} auf ② und ④ ist gleich.

Und damit

$$\int_{④} d\vec{r} \cdot \vec{E} = - \int_{②} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

(Beispiel: Ihr müsst aufpassen, wie die Richtung von $d\vec{r}$ in ④ und ② ist.)

* Dann auf ① $\rightarrow \vec{E}_a$
 ③ $\rightarrow \vec{E}_i$ } also $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$= E_a \Delta l (\vec{F} \times \vec{n}) - E_i \cdot \Delta l (\vec{F} \times \vec{n})$$

$$= (E_a - E_i) \cdot (\vec{F} \times \vec{n}) \Delta l = 0$$

Also $E_a \cdot (\vec{F} \times \vec{n}) = E_i \cdot (\vec{F} \times \vec{n})$

Also die Tangentialkomponente verhält sich an der Grenzfläche stetig.

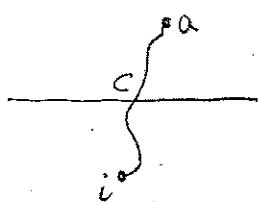
- Die Ergebnisse für die Normal- und Tangentialkomponenten können kombiniert werden zu

$$\vec{E}_a - \vec{E}_i = \cancel{\frac{\sigma}{\epsilon_0}} \vec{n}$$

wobei $\vec{n} \equiv$ Einheitsvektor senkrecht zur Grenzfläche

- * Was passiert mit dem skalaren Potenzial?

Die Spannung zwischen a und i ist



$$\varphi_a - \varphi_i = - \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow 0$$

für verschwindend
kleine Wege Längen

Aber $\boxed{\varphi_a = \varphi_i} \rightarrow$ Das skalare Potenzial
ist also stetig an jeder Grenzfläche.

Aber, da $\vec{E} = -\nabla \varphi$ Mit der Definition (S. BG) $\frac{\partial f}{\partial n} = \vec{f} \cdot \vec{n}$

Dann: $\vec{\nabla} \varphi_a - \vec{\nabla} \varphi_i = -4\pi \sigma \vec{n}$ $\quad \quad \quad \boxed{\frac{\partial \varphi_a}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = -4\pi \sigma}$

Die Ableitungen von φ sind nicht unbedingt stetig.

Nur wenn $\sigma = 0$ ist $\vec{\nabla} \varphi$ (und damit \vec{E}) stetig.

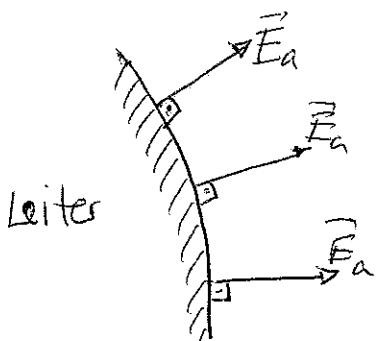
- * Das war eigentlich der Fall einer geladenen Kugel (S. 19), da diese keine Flächenladung an der Grenzfläche aufweist.
Bemerkung: Für die Berechnung von σ quellen wir an der "Haut" der Kugel: $\sigma = \lim_{\ell \rightarrow 0} \rho \xrightarrow{\text{Haut}} \text{"Haut"}$
(S. 37)

Für eine homogen-geladene Kugel $\rho = \rho_0$ konstant, und damit $\sigma \rightarrow 0$

- Das Feldverhalten an Grenzflächen spielt eine wichtige Rolle an der Optik, wie wir später in dieser Verlängerteren sehen werden.

- Nun können wir gut verstehen, was an der Grenzfläche zwischen Leiter und Vakuum passiert

- Innerhalb des Leiters:



$$\begin{aligned} E_i^{(n)} &= 0 & (E^{(n)} = \text{normal}) \\ E_i^{(t)} &= 0 & (E^{(t)} = \text{tangential}) \end{aligned}$$

- Außenhalb des Leiters:

$$\begin{aligned} E_a^{(n)} &= \sigma / \epsilon_0 \\ E_a^{(t)} &= 0 \end{aligned}$$

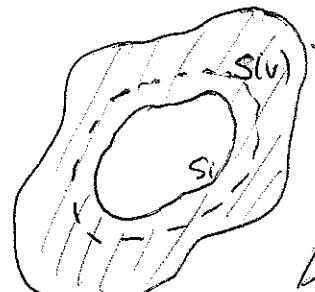
→ Das E-Feld steht also senkrecht auf der Leiteroberfläche
Bemerkung: das muss so sein, sonst hätten wir eine Bewegung der Ladungen entlang der Oberfläche)

- Also auf der Fläche die E-Komponente (Tangentialkomponente) ist Null: $E_a^{(t)} = 0$
 $\stackrel{!}{=} -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$ (wobei $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$ bedeutet Ableitung entlang der Fläche)

Damit ist $\phi(F)$ auf der Fläche konstant

⇒ Die Leiteroberfläche ist eine Äquipotentialfläche

- Das hat interessante Folgen. Seien wir, daß wir einen Hohrraum innerhalb eines Leiters böhren. In dem Hohrraum gibt es keine Ladung. Da $E=0$ in dem



Leiter, dann (siehe Abbildung) $\int_{S(V)} E \cdot d\vec{F} = 0$

und damit ist die Ladung in V Null.

Das gilt auch für die innere Fläche S_i des Hohrraums. Damit gibt es keine Ladungsdichte an der Fläche. Damit $E=0$ (und $\ell \equiv \text{anst}$) überall im Hohrraum!!

- Das Loch bleibt fieldfrei \rightarrow das ist die Idee der sogen. Faraday-Käfig

- Der Faraday-Käfig hat mehreren Anwendungen, z.B. schlägt ein Blitz in einem Faradayschen Käfig, dann bleibt das Innerraum ungeschädigt. Ein Auto oder ein Flugzeug funktionieren (nähmungsweise!) wie einer Faraday-Käfig.
- Die Idee wird in anderen Anwendungen benutzt: Ko-axiale Leitungen, Mikrowellenofen, usw.

- =
- Wir haben also 2 wichtige Randbedingungen für ϱ getroffen:
 - * Leiteroberflächen: $\varrho \equiv \text{Konstant}$ (S. 38)
 - * geladene Flächen: $\frac{\partial \varrho_a}{\partial n} - \frac{\partial \varrho_i}{\partial n} = -\sigma / \epsilon_0$
(S. 43)
 - Wir werden nun verschiedene Methoden der Lösung von Randwertprobleme der Poisson-Gleichung sehen.

* GREENSCHE FUNKTION

- Für die Lösung der Poisson-Gleichung (und eigentlich in Allgemeinen für andere Differentialgleichungen) ist die sogen. Greensche Funktion sehr nützlich.
- Für die Poisson-Gleichung ist die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

die Lösung von:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Da $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \stackrel{!}{=} -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Rightarrow \boxed{\nabla_r^2 \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = 0}$

• Damit $G(\vec{r}, \vec{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{Skalares Potential einer Ladung } Q=1 \text{ ohne Randbedingungen}} + \underbrace{f(\vec{r}, \vec{r}')}_{\text{solch abz}} \rightarrow$

$$\nabla_{\vec{r}}^2 f(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

sonst f ist ziemlich beliebig

- * Wie ist die Beziehung zwischen $\varphi(\vec{r})$ und die Greensche Funktion G ? Wir benutzen noch mal die Greensche Identität (S. 36) mit $\varphi = \varphi(\vec{r})$, $\psi = G(\vec{r}, \vec{r}')$:

$$\int_V d^3 r' \left\{ \varphi(\vec{r}') \underbrace{\nabla_{\vec{r}'}^2 G(\vec{r}-\vec{r}')}_{-\delta(\vec{r}-\vec{r}')/\epsilon_0} - \rho(\vec{r}')/\epsilon_0 \right\} = \int_V df \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial f}{\partial n} \right]_{S(V)}$$

Damit:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3 r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') - \epsilon_0 \int_{S(V)} df \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial f}{\partial n} \right]}$$

- * Wenn wir f auf der Fläche $S(V)$ kennen (sog. Dirichlet-Randbedingungen) dann wählt man $f(\vec{r}, \vec{r}')$ solch daß

$$\boxed{\int_{S(V)} df G_D(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial f}{\partial n} = 0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{typischerweise wählt man} \\ G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(V) \end{array} \right)$$

und damit

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_{V \setminus S(V)} d^3 r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \int_{S(V)} df \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n}}$$

- Da φ auf $S(V)$ und ρ in V bekannt sind, dann für die Berechnung von $\varphi(\vec{r})$ brauchen wir nur $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$.
 • W.R werden bald ein Beispiel sehen.

- Wenn wir $\frac{\partial f}{\partial n}$ auf $S(V)$ kennen (sog. Neumann-Randbedingungen) kann man wählen:

$$\epsilon_0 \int df \cdot \rho(\vec{r}) \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')} {\partial n} = -f_0$$

beliebige Konstante.

- Naiv würden wir $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \forall \vec{r}' \in S(V)$ (und daher $f_0 = 0$) annehmen. Das wäre aber falsch, weil

$$\int d^3 r' \nabla_{r'}^2 G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3 r' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \quad \text{für } \vec{r} \in V$$

$\parallel \leftarrow$ Gauß-Satz

$$\int_{S(V)} d\vec{f} \cdot \nabla_{r'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = \int_{S(V)} df' \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n}$$

also $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n}$ kann nicht Null für alle $\vec{r}' \in S(V)$ sein.

Typischerweise nimmt man $\boxed{\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0 S}}$ $\forall \vec{r}' \in S(V)$

wobei $S = \int_{S(V)} df'$ ist die gesuchte Fläche von $S(V)$.

Damit $\Rightarrow \int_{S(V)} df' \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0 S}$ wie es sein sollte.

Also $\epsilon_0 \int df \cdot \rho(\vec{r}') \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = -\frac{1}{S} \int df \cdot \rho(\vec{r}') = -f_0$

$\rightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{S} \int_{S(V)} \rho(\vec{r}') d\vec{f}}$ $\xrightarrow{\text{f}_0 \text{ ist eigentlich eine innere Konstante (eine Verschiebung der Energie ergibt nichts!)}}$

Aus der allgemeinen Gleichung auf S. 46 haben wir also

$$\boxed{\rho(\vec{r}) = f_0 + \int_{\vec{r}' \in V} d^3 r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \epsilon_0 \int_{\vec{r}' \in S(V)} df' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \rho}{\partial n}}$$

Da $\frac{\partial \rho}{\partial n}$ auf $S(V)$ und $\rho(\vec{r}')$ ~~in~~ V bekannt sind, dann brauchen wir nur die Greensche Funktion

* Also, zusammengefaßt:

- Drichtet (wir kennen φ auf $S(v)$)

- $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(v)$

- $\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}' \in V} d^3 r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \int_{\vec{r}' \in S(v)} d\vec{f} \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n}$

- Neumann (wir kennen $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf $S(v)$)

- $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0 S} \quad \text{mit } S = \int_{S(v)} d\vec{f}$

- $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 + \int_{\vec{r}' \in V} d^3 r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \epsilon_0 \int_{\vec{r}' \in S(v)} d\vec{f} G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n}$

(Bemerkung: wie Ihr seht, wir haben (ohne Effekte der Raumbedingungen) immer etwas der Form:

$$\varphi(\vec{r}) \sim \int_{\vec{r}' \in V} d^3 r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

D.h. dass die Ladungen in \vec{r}' beeinflussen das Skalarfeld in \vec{r} , und dieser Einfluß wird von der Greensche-Funktion gegeben. Die Ladungen in \vec{r}' sind eine "Quelle", und die Effekte dieser "Quelle" propagieren bis nach $\varphi(\vec{r}')$. Deswegen $G(\vec{r}, \vec{r}')$ heißt auch "Propagator".)

- * Wie schon erwähnt die Idee von greenschen Funktion (oder Propagator) ist sehr wichtig in der Theoretische Physik. Sie ist eine allgemeine Idee der Theorie von differentialen Gleichungen.
- * Wir werden nun ein Beispiel sehen.

• BEISPIEL: Ladung vor einer geerdeten Metallplatte

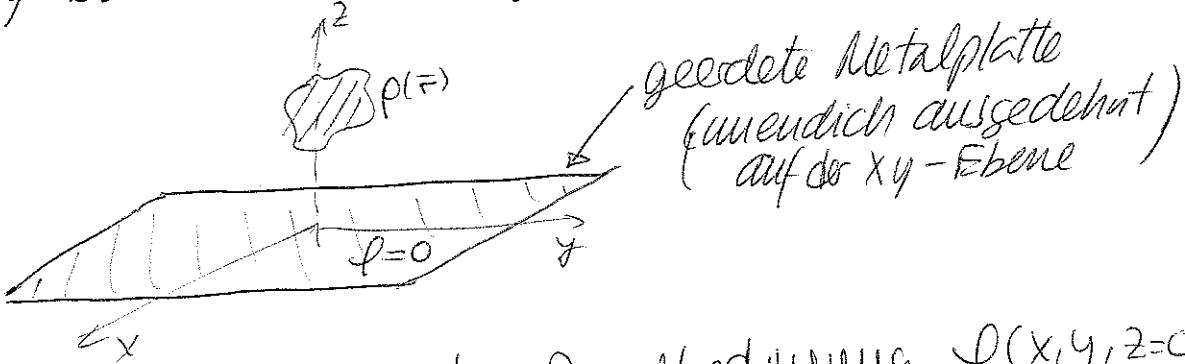
- * Auf S. 33 haben wir gesehen, dass für Leitern (also Metallen) $\varphi(\vec{r})$ eine Konstante ist.

Eine geerdete Metallplatte hat $\varphi(\vec{r}) = 0 = \text{const.}$

(Bemerkung: das Potential der Erde ist Null.)

Ich erinnere euch an euren Steckdosen zu Hause!)

- * Wir betrachten nur eine geerdete Metallplatte auf der xy-Ebene, und eine gewisse Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$



Wir haben also die Randbedingung $\varphi(x, y, z=0) = 0$
(Dirichlet-Randbedingung).

Wir sind interessiert an das $\varphi(\vec{r})$ für alle \vec{r} des Halbraumes.

W $\ddot{\text{o}}$ b bei V (wobei $V = \text{Halbraum}$):

$\varphi = 0$ auf $S(V)$ ($V > 0$) (wobei $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ und $z = +\infty$)
(Bemerkung: das ist so auch in $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ und $z = +\infty$)
(S. 38)

Also $\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}' \in V} d^3 r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')$
(S. 48)

wobei $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(V)$

Aus S. 46: $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} + f_D(\vec{r}, \vec{r}')$

wobei $\nabla_r^2 f_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r} \in V$

• Also für $z=0$ (also auf $S(r)$):

$$f_D(\vec{r}, \vec{r}') = \underset{(z=0)}{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}}}$$

Wir nehmen den folgenden Ansatz für $f_D(\vec{r}, \vec{r}')$ für $\vec{r}' \in V$:

$$f_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

~~mit "z" Vorzeichen~~

Sei $\vec{r}_B' = (x', y', z')$

$$\text{Also } f_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Wenn $\vec{r}' = (x', y', z') \in V$ dann $\vec{r}' \notin V$, weil \vec{r}'_B ist in den unteren Halbraum.

Fr. 13

$$\text{Damit } \nabla_{\vec{r}}^2 f_D(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla_{\vec{r}}^2 \left[\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'_B) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \in V.$$

Also unser Ansatz erfüllt

- $\nabla_{\vec{r}}^2 f_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r} \in V$
- $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + f_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(V)$
- Wir haben also die Lösung! $\Rightarrow G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|} \right]$

und daher:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}' \in V} d^3 r' \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{(-\rho(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|} \right\} \quad \begin{aligned} \text{mit } \vec{r}' &= (x', y', z') \\ \vec{r}'_B &= (x', y', -z') \end{aligned}$$

- * Dieser Ergebnis ist sehr interessant, und das bringt uns direkt in die Idee der Bildladungen.

METHODE DER BILDLADUNGEN

- * Unser Ergebnis von S. 50 kann so folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_B(\vec{r})$$

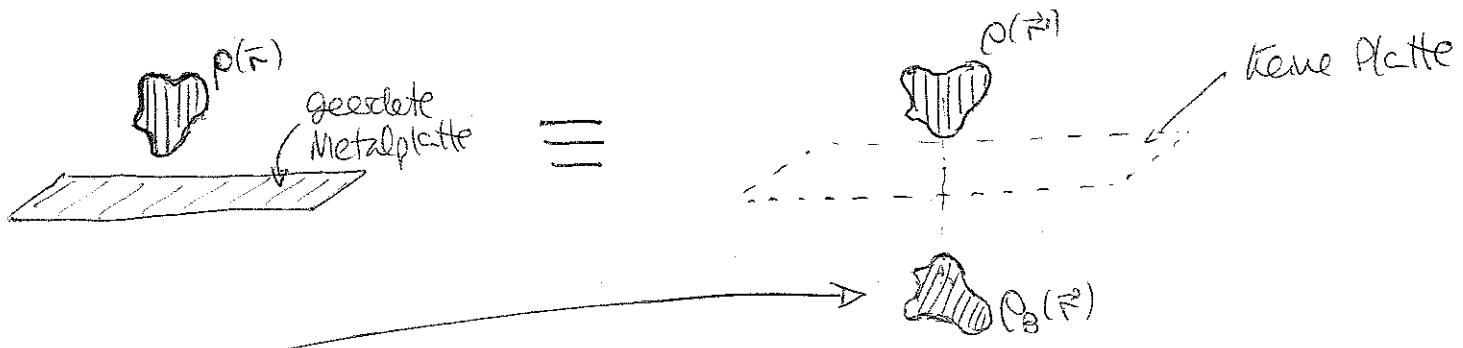
wobei $\varphi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}' \neq \vec{r}} d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Skalarfeld einer Ladung-verteilung $\rho(\vec{r}')$ für $r \rightarrow \infty$ (also ohne Randbedingungen)

$$\varphi_B(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}' \neq \vec{r}} d^3 r' \frac{-\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Skalarfeld (für $r \rightarrow \infty$) einer Ladungsverteilung $-\rho(\vec{r}')$ in $\vec{r}_B = (x', y', -z')$

- * Wir haben also die Äquivalenz:



Bildladungen $\boxed{\rho_B(x, y, z) = -\rho(x, y, -z)}$

- * Wir können also Randbedingungen durch die Einführung von Bildladungen ersetzen. Das ist die Kernidee der Bildladungsmethode.

(Bemerkung: man kann einfach beweisen, daß $\varphi(\vec{r}') = 0 \forall \vec{r}'$ auf der Metalplatte. Mach es!)

* Beispiel



Dann: $\boxed{\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{(-q)}{|\vec{r}-\vec{r}_B|} \right\}}$

 $\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$
 $\vec{r}_B = (0, 0, -z_0) = -\vec{r}_0$

Bemerkung: Das ist das Ergebnis auf S. 50 mit $\rho(\vec{r}') = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)$

* Dann

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}_r \rho(\vec{r}) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \right) - \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}_0|} \right) \right\}$$

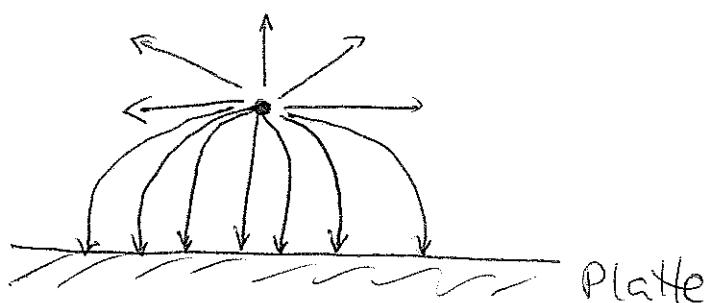
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} - \frac{(\vec{r}+\vec{r}_0)}{|\vec{r}+\vec{r}_0|^3} \right]$$

Greifen wir \vec{E} in der Nähe von $z=0$ (also in der Nähe der Platte)

$$\vec{E}_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x, y, -z_0)}{|(x, y, -z_0)|^3} - \frac{(x, y, z_0)}{|(x, y, z_0)|^3} \right\} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(0, 0, 2z_0)}{(x^2+y^2+(z_0)^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}_{z=0} = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)} \vec{e}_z} \rightarrow \text{Wie erwartet (S. 44) ist das E-Feld in der Nähe der Platte senkrecht zu der Fläche.}$$

Das E-Feld sieht also so aus (für $q > 0$):



- Aus S. 44 wissen wir, daß

$$\vec{E}_a = \sigma / \epsilon_0 \hat{n}$$

In unserem Fall jetzt: $\vec{E}_a = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}} \hat{e}_z$

Die Ladung q erzeugt also eine Flächenladungsdichte.

$$\sigma(x,y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}$$

auf der Oberfläche des geerdeten Leiters.

 die Ladungsdichte ist natürlich nicht uniform auf der Platte, sondern größer direkt unter der Ladung q

Die Gesamtladung auf der Fläche ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma(x,y) = -\frac{q z_0}{2\pi} \int_0^{\infty} p dp \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{(p^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$= q z_0 \int_0^{\infty} p dp \frac{1}{(p^2 + z_0^2)^{3/2}} = q z_0 \int_0^{\infty} dp \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{(p^2 + z_0^2)^{1/2}} \right] = q z_0 \left(\frac{1}{z_0} \right) = -q$$

Also die Gesamtladung auf der Fläche ist genau $-q$.

Es ist interessant zu sehen, dass q eine Ladung auf der Platte erzeugt, und dass diese induzierte Ladung ein Feld \vec{E} erzeugt, dass eine Kraft auf der ursprünglichen Ladung übt! Also wegen der Metallplatte, eine Ladung übt eine Kraft (irgendeine) auf sich selbst!

Das ist die sog. Bildkraft:

$$\vec{F}_{\text{Bild}} = q \vec{E}_{\text{Bild}} = q \left[-\frac{q (\vec{r}_{\text{LADUNG}} - \vec{r}_{\text{Bild}})}{4\pi\epsilon_0 |(\vec{r}_{\text{LADUNG}} - \vec{r}_{\text{Bild}})|^3} \right] = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z}{8z^3} \vec{e}_z = -\frac{q^2 \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4z^2}$$

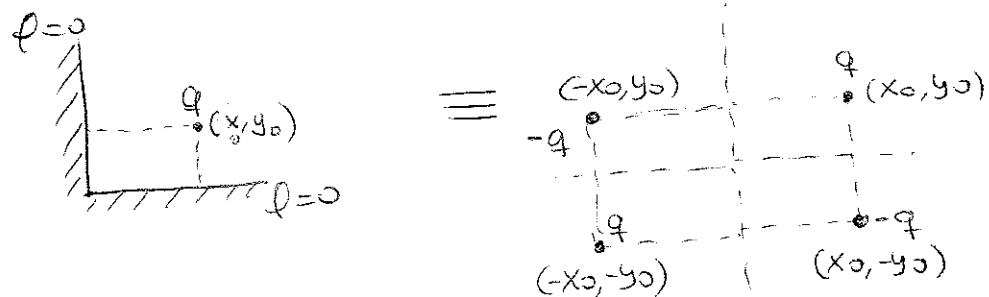
Die Ladung wird von der Platte aufgetragen!



* Die Methode der Bildladungen ist besonders nützlich wenn die Raumflächen eine einfache Symmetrie aufweisen (also eine Ebene, oder eine Kugelfläche). Es ist aber nicht immer der Fall, dass eine einzige Bildladung reicht.

Nehmals brauchen wir mehrere Bildladungen

Z.B.



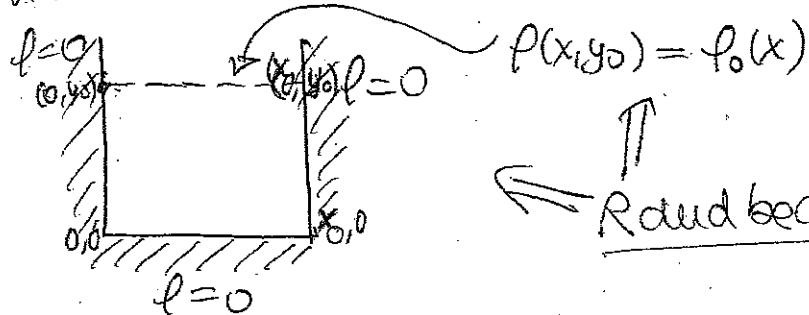
Kannst Du sehen warum? Ich lasse das als Übung.

(Beweisung: Nehmals braucht man keine lange Rechnung. Ein paar Symmetrie-Überlegungen sollten reichen).

* METHODE DER SEPARATION DER VARIABLEN

* Wir werden nun noch eine Methode für die Lösung der Poisson-Gleichung. Wir werden diese Methode mit einem Beispiel ~~ausführen~~ ausführen.

* Sei ein Ladungsfreier Raum. Um das Problem zu vereinfachen werden wir ein 2D Problem diskutieren.



\Downarrow
Randbedingungen

Ladungsfreier Raum
 \Downarrow
Laplace-Gleichung
 $\boxed{\nabla^2 f = 0}$

* Also im 2D $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ \longrightarrow dann $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0}$

* Wir machen nun ein Separationsansatz:

$$f(x, y) = f(x)g(y)$$

Dass nennt man eine Separation der Variablen

(Bemerkung: So ein Ansatz funktioniert nicht für beliebige Gleichungen oder Randbedingungen. Aber für viele Probleme ist es sehr nützlich.)

* Also $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) g(y)$ } $\Rightarrow \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right) g(y) + f(x) \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = 0$
 $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = f(x) \frac{d^2 g}{dy^2}$ }

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}}_{\text{es hängt nur von } x \text{ ab}} = - \underbrace{\frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2}}_{\text{es hängt nur von } y \text{ ab}}$$

Die müssen für alle x, y gleich sein

→ Das ist nur möglich wenn

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda^2 - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2}$$

Konstante

Also $\frac{d^2f}{dx^2} = -\alpha^2 f(x) \rightarrow f(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$
 $\frac{d^2f}{dy^2} = +\alpha^2 g(y) \rightarrow g(y) = C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y$

* Aber $\varphi(0, y) = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow A = 0$
 $\varphi(x, 0) = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow C = 0$

Dann $\varphi(x, y) = \tilde{A} \sin \alpha x \sinh \alpha y$

Außerdem $f(x_0, y) = 0 \rightarrow \sin \alpha x_0 = 0 \rightarrow \alpha x_0 = n\pi$

$$\varphi_n(x, y) = \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y\right)$$

Die allgemeine Lösung ist also der Form

$$\varphi(x, y) = \sum_n \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y\right)$$

* Wir haben noch eine letzte Randbedingung:

$$\varphi(x, y_0) = \varphi_0(x)$$

dann $\varphi_0(x) = \sum_n \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)$

$$\int_0^{x_0} dx \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \varphi_0(x) = \sum_n \tilde{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right) \underbrace{\int_0^{x_0} dx \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right)}_{\frac{x_0}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sin(n'\theta) \sin(n\theta)} \underbrace{\frac{\pi}{2} \delta_{nn'}}$$

$$= \frac{x_0}{2} \tilde{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)$$

Also

$$\tilde{A}_n = \frac{2}{x_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)} \int_0^{x_0} dx \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \varphi_0(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x, y) = \sum_n \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y\right)}$$