• ELEKTROSTATIK IV : ELEKTROSTATIK DER DIELEKTRIKA

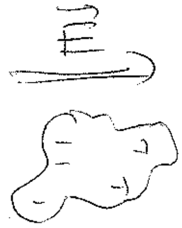
* Bisher haben wir die Elektrostatik von geladenen Teilchen in Vakuum betrachtet. Wir haben gesehen, daß

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$$

• Wir werden nun sehen, was passiert wenn wir die Elektrostatik in Materialien studieren.

• Materie besteht größtenteils aus geladenen Teilchen (z.B. Ionen) die auf äußere Felder reagieren, d.h. die äußere Felder werden



die Ladungen verschieben aus ihren gleichgewichts-positionen. Diese Umverteilung der Ladungen ergibt induzierten Multipolen, und diese induzierte Multipolen erzeugen Zusatzfeldern im Inneren der Materie, die sich mit den äußern überlagern.

• Diese Zusatzfelder können die Elektrostatik des Vakuums deutlich modifizieren. Wir werden nun sehen wie. Wir werden hier nur die Theorie für Dielektrika (Isolatoren) (S. 38) studieren.

• Ausgangspunkt unserer Analyse ist, daß Postulat, daß die Maxwell-gleichungen des Vakuums mikroskopisch universell gelten:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{e} = \frac{\rho_m}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{e} = 0$$

wobei $\vec{e}$ ≡ mikroskopisches E-Feld

ρ_m ≡ mikroskopische Ladungsdichte

* Wenn wir alle mikroskopischen Feldern und Ladungsverteilungen kennen würden, dann würden wir keine neue Theorie brauchen. Das Problem ist natürlich, dass so was unmöglich ist (zu viele Teilchen!). Außerdem ist es eigentlich nicht nötig, weil in der Regel sind wir an makroskopischen Phänomene interessiert.
* Man macht folgendes. Wir spalten das gesamte Volumen in Subvolumina $v(\vec{r})$ die:
  * Einerseits makroskopisch klein sind (mit Mittelpunkt $\vec{r}$)
  * Anderseits mikroskopisch sehr groß sind, d.h. die enthalten viele Teilchen.

z. B. für $v \sim 10^{-6}\,cm^{3}$ gibt es typisch etwa 10^{17} Teilchen.
(Bemerkung: Avogadro-Konstante $\sim 10^{23}$ Teilchen/cm^3)

* Wir sind nun nicht an mikroskopischen Feldgrößen $f(\vec{r},t)$ interessiert, sondern an phänomenologischen Mittelwerten der Form:

$$\overline{f(\vec{r},t)} = \frac{1}{v(\vec{r})} \int_{v(\vec{r})} d^3r' f(\vec{r}',t)$$

* Wir werden nun diese Idee der Mittelung anwenden, um die Maxwell-Gleichungen der Dielektrika zu bestimmen.
* Wir nehmen erstmals ein Teilchen, z. B. eine Molekül. Die besteht aus Elektronen und Ionen, die als Punktladungen aufgefasst werden können. Also die Gesamtladung des j-ten Teilchens ist


j-tes Teilchen

$$q_j = \sum_n^{(j)} q_n^{(j)}$$

Die Summe gilt auch für die sich momentan im Raumbereich des j-ten Teilchens befindlichen Überschussladungen (die sind die freie Ladungen im Material).

* Wir definieren nun:
  - Ladungsdichte im j-ten Teilchen: $\rho_j \equiv \sum_n^{(j)} q_n^{(j)} \delta(\vec{r}-\vec{r}_n)$
  - Dipolmoment des j-ten Teilchens: $\vec{p}_j \equiv \int d^3r\, \rho_j(\vec{r})\,(\vec{r}-\vec{R}_j)$

wobei $\Rightarrow$ $\vec{R}_j \equiv$ Schwerpunkt des j-ten Teilchens.

- Also das Teilchen j ist eigentlich eine Ladungsverteilung. Da die Abstände zwischen Teilchen viel größer als der Ausdehnung der Teilchen sind, dann können wir für das ~~Skalar~~ Skalar Potential der Ladungsverteilung des j-ten Teilchens eine Multipolentwicklung bis zum Dipolordnung machen (S. 32):

$$\varphi_j(\vec{r}) \simeq \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{R}_j|} + \frac{\vec{p}_j\cdot(\vec{r}-\vec{R}_j)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{R}_j|^3}$$

Die Mitwirkung des Dipolmoments ist entscheidend für die folgende Diskussion.

(Bemerkung: wir werden später diskutieren, wo diese Dipolmomente herkommen.)

- Wir definieren nun eine effektive Ladungsdichte

$$\rho_e(\vec{r}) = \sum_j q_j\, \delta(\vec{r}-\vec{R}_j)$$

und eine effective Dipoldichte

$$\vec{\Pi}_e(\vec{r}) = \sum_j \vec{p}_j\, \delta(\vec{r}-\vec{R}_j)$$

- Die Teilchen erzeugen also ein gesamtes Potential:

$$\varphi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left[\frac{\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{\Pi}_e(\vec{r}')\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

- An diesem Punkt führen wir die Idee von <u>Durschnitt</u> ein

$$4\pi\varepsilon_0\,\overline{\varphi(\vec r)} \simeq \frac{1}{v(\vec r)}\int_{v(\vec r)} d^3x \left[\int d^3r'\left(\frac{\rho_e(\vec r')}{|\vec r+\vec x-\vec r'|} + \vec\Pi_e(\vec r')\cdot\frac{(\vec r+\vec x-\vec r')}{|\vec r+\vec x-\vec r'|^3}\right)\right]$$

$$\overset{\vec r''=\vec r'-\vec x}{=} \frac{1}{v(\vec r)}\int_{v(\vec r)} d^3x\left[\int d^3r''\left(\frac{\rho_e(\vec r''+\vec x)}{|\vec r-\vec r''|} + \vec\Pi_e(\vec r''+\vec x)\cdot\frac{(\vec r-\vec r'')}{|\vec r-\vec r''|^3}\right)\right]$$

$$= \int d^3r''\left\{\frac{1}{|\vec r-\vec r''|}\left[\int_{v(\vec r)}\frac{d^3x}{v(\vec r)}\rho_e(\vec r''+\vec x)\right] + \left[\frac{1}{v(\vec r)}\int_{v(\vec r)}\vec\Pi_e(\vec r''+\vec x)\,d^3x\right]\cdot\frac{(\vec r-\vec r'')}{|\vec r-\vec r''|^3}\right\}$$

- Nun können wir die <u>Makroskopische Ladungsdichte</u>

$$\rho(\vec r) \equiv \frac{1}{v(\vec r)}\int_{v(\vec r)} d^3x\,\rho_e(\vec r+\vec x)$$

Bemerkung: die gebundenen Ladungen des Festkörpers werden durch der Mittelung kompensiert, und damit $\rho(\vec r)$ resultiert aus freien <u>Überschussladungen</u>.

und die <u>Makroskopische Polarisation</u>

$$\vec{\mathbb{P}}(\vec r) \equiv \frac{1}{v(\vec r)}\int_{v(\vec r)} d^3x\,\vec\Pi_e(\vec r+\vec x)$$

einführen. Und damit

$$\overline{\varphi}(\vec r) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\mathbb{P}(\vec r')\cdot\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}$$

$$\frac{\vec r-\vec r'}{|\vec r-\vec r'|^3} = +\vec\nabla_{\vec r'}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\mathbb{P}(\vec r')\cdot\vec\nabla_{\vec r'}\left[\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right]$$

- Wir führen nun das makroskopische E-Feld

$$\vec E = -\vec\nabla_r\overline{\varphi}(\vec r)$$

$$\Longrightarrow \vec\nabla\cdot\vec E = -\nabla_r^2\overline{\varphi}(\vec r) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec r')\,\nabla_r^2\left[\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right] - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\vec{\mathbb{P}}(\vec r')\cdot\vec\nabla_{\vec r'}\left[\nabla_{\vec r}^2\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)\right]$$

$$\nabla_r^2\left(1/|\vec r-\vec r\,'|\right) = -4\pi\,\delta(\vec r-\vec r\,') \quad (\text{S. } 13)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r) + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\underbrace{\vec P(\vec r\,')\cdot\underbrace{\vec\nabla_{r'}\delta(\vec r-\vec r\,')}_{-\vec\nabla_r\delta(\vec r-\vec r\,')}}_{-\vec\nabla_r\left[\vec P(\vec r\,')\delta(\vec r-\vec r\,')\right]}}_{\underbrace{-1/\varepsilon_0\,\vec\nabla_r\left[\int d^3r'\,\vec P(\vec r\,')\delta(\vec r-\vec r\,')\right]}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\vec\nabla\cdot\vec P(\vec r)}}$$

- Also: $\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r) - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec\nabla\cdot\vec P(\vec r)$

und damit

$$\boxed{\vec\nabla\cdot\left[\varepsilon_0\vec E(\vec r) + \vec P(\vec r)\right] = \rho(\vec r)}$$

- Das führt uns direkt zu der Idee der <u>Dielektrische Verschiebung</u>

$$\boxed{\vec D(\vec r) = \varepsilon_0\vec E(\vec r) + \vec P(\vec r)}$$

- Damit haben wir die <u>Maxwell-gleichung der Elektrostatik in Dielektrika</u> hergeleitet:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec\nabla\cdot\vec D &= \rho(\vec r)\\ \vec\nabla\times\vec E &= 0\end{aligned}}$$

(Bemerkung: die 2. gleichung war mikroskopisch Null, und bleibt auch makroskopisch Null für elektrostatische Probleme)

- Die Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ sagt aus, dass $\vec{D}$ von den Überschußladungen (also von $\rho(\vec{r})$) erzeugt wird.

Dagegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 - 1/\varepsilon_0\, \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ → also $\vec{E}$ hängt auch vom Medium ab.

Wir können die <u>Polarisationsdichte</u> definieren:

$$\rho_S = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad \text{(das ist auch eine extra Ladungsdichte)}$$

und damit $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\big[\underbrace{\rho(\vec{r}) + \rho_S(\vec{r})}_{\text{tatsächliche lokale Ladungsdichte in der Materie}}\big]$$

Also $\vec{E}$ reagiert auf die ~~tatsächliche~~ tatsächliche lokale Ladungsdichte im Gegensatz zu $\vec{D}$ (das ausschließlich auf die Überschussladungen reagiert).

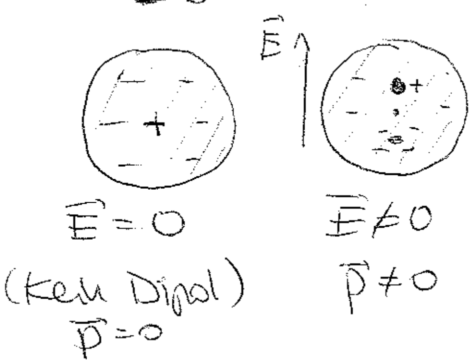
- Damit sollte klar sein, dass <u>$\vec{E}$ die eigentliche Messgröße ist, und nicht $\vec{D}$</u> ($\vec{D}$ ist nur eine Hilfgröße).

- Wir haben also gesehen, dass die Erzeugung von Dipolen in der Materie (also die Polarisation) Zusatzfeldern erzeugt, die die Elektrostatik im Medium entscheidend beeinflussen.

Aber, wo kommt diese Polarisation her?

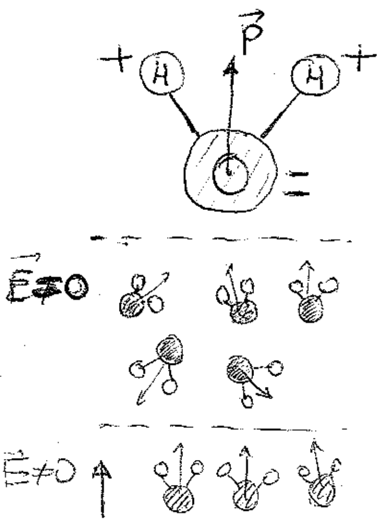
Man unterscheidet verschiedene Typen von Polarisationen, nach denen man die Dielektrika klassifizieren kann:

* <u>Eigentliches Dielektrikum</u>:



Das äußere Feld verschiebt + und − Ladungen relativ zueinander, wodurch lokale Dipole erzeugt werden: <u>Deformationspolarisation</u>

* Paraelektrikum



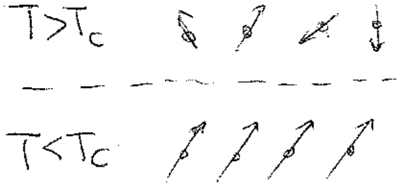
· Manchmals enthält die Materie permanente Dipolen (z.B. Wassermolekülen, sieh. Abbildung).

· Ohne äußeres Feld sind die Richtung dieser Dipolen nicht bestimmt, und daher werden die Dipolrichtungen statistisch verteilt, und makroskopisch ergeben diese Dipolen keine Mitwirkung.

· Ein äußeres Feld orientiert die Dipolen (s. 29), und daher ist die makroskopische Polarisation nicht Null $\Longrightarrow$ Orientierungspolarisation.

(Bemerkung: die Temperatur des Mediums spielt hier eine wichtige Rolle. Die thermische Bewegung führt zu einer Zitterung der Dipol-richtung (Unordnungstendenz). Daher ist die Orientierungspolarisation temperaturabhängig. Für eine genaue Betrachtung der thermischen Effekte braucht man statistische Mechanik.)

* Ferroelektrikum



* Darunter versteht man Stoffe mit permanenten Dipolen, die sich unterhalb einer kritischen Temperatur T_C (Curie-Temperatur) spontan ausrichten (also auch ohne äußeres Feld)

(Bemerkung: Die Erklärung davon ist das so verlangt quanten statistische Mechanik.)

· Ferroelektrika sind relativ kompliziert, also bei der folgenden Diskussion werden wir nur Dielektrika und Paraelektrika meinen.

* Für Dielektrika und Paraelektrika

$$\vec{\mathbb{P}} = \vec{\mathbb{P}}(\vec{E}) \qquad \text{mit} \quad \vec{P}(0) = 0$$

Wir können $\vec{P}$ nach Potenzen von $\vec{E}$ entwickeln:

$$\mathbb{P}_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} \beta_{ijk} E_j E_k + \dots \qquad i,j,k \in \{x,y,z\}$$

Für nicht zu hohe Felder reicht es bis zum ersten Ordnung in E
(Bemerkung: Glieder mit $\sim E^2$ sind wichtig für starken Feldern, und die spielen eine extrem wichtige Rolle in z.B. nichtlineare Optik. Die werden wir hier nicht betrachten.)

Also $\mathbb{P}_i \approx \sum_{j=1}^{3} \underbrace{\gamma_{ij}}$ E_j → dielektrischer Tensor
(der ist natürlich Materialabhängig).

* Für isotropen Dielektrika (alle Richtungen sind gleich) hat man

$$\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij} \quad \text{für alle } i,j \in \{x,y,z\}$$

und damit $\mathbb{P}_i = \gamma E_i \longrightarrow \vec{\mathbb{P}} = \gamma \vec{\mathbb{E}}$ → $\vec{\mathbb{P}}$ und $\vec{\mathbb{E}}$ sind parallele zueinander. Das ist nur so in isotropischen Media!

Wir werden von nun an nur isotropische Media betrachten.

* Man schreibt: $\gamma \equiv \chi_e \epsilon_0 \implies \vec{\mathbb{P}} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

χ_e ↑ dielektrische Suszeptibilität

daher: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathbb{P}} = \epsilon_0 \underbrace{(1+\chi_e)}_{\epsilon_r \equiv (1+\chi_e)} \vec{E}$ ⇒ relative Dielektrizitätskonstante

also: $\boxed{\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}}$

(Bemerkung: $\vec{D}$ und $\vec{E}$ sind parallele zueinander nur in isotropen Dielektrika.)

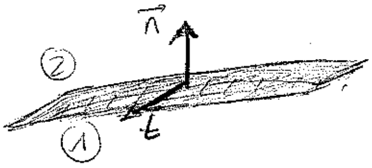
* Noch ein Paar Schlussbemerkungen über Dielektrika:

* Feldverhalten an Grenzflächen

· Aus den neuen Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$

und mit ähnlichen Überlegungen wie auf Seiten (39) – (43), ist es einfach das Feldverhalten an Grenzflächen zu bestimmen:



$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma$$
$$(\vec{t}\times\vec{n})\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$$

* Elektrostatische Energie in einem Dielektrikum

· Der Aufbau der Polarisationsladungen erfordert ebenfalls Energie und daher muss unsere Überlegung der S. (22) modifiziert werden:

$$W=\frac{1}{2}\int d^3r\,\phi(\vec{r})\,\rho(\vec{r})=\frac{1}{2}\int d^3r\,\phi(\vec{r})\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r})=$$
$$=\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\int d^3r\,\vec{\nabla}\left(\phi(\vec{r})\vec{D}(\vec{r})\right)}}_{0\ (\phi(r\to\infty)=0)}-\frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{D}$$

also $\boxed{W=\frac{1}{2}\int d^3r\;\vec{E}\cdot\vec{D}}$

---

* Damit ist unsere Diskussion der Elektrostatik beendet. Wir werden nun sehen was passiert wenn es bewegte elektrische Ladungen gibt.