Fourier Transformation

- Wir haben schon eine spezielle Lösung der Wellengleichung gesehen, nämlich die Ebene Welle. Wir werden später sehen, dass eine allgemeine Lösung der Wellengleichung als eine lineare Überlagerung von ebenen Wellen sich ausdrücken lässt. Aber um das zu verstehen, sollten wir erstmal die Idee von Fourier-Transformation verstehen.

* Fourierreihen

- Nehmen wir eine periodische Funktion $f(x)$ mit Periode $2L$, also $f(x+2L) = f(x)$.
  Diese periodische Funktion lässt sich als eine lineare Überlagerung von Sinus- und Cosinus-Funktionen ausdrücken:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right]}$$ Fourier-Reihe

wobei

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x') \cos\left(\frac{n\pi}{L} x'\right) dx' \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x') \sin\left(\frac{n\pi}{L} x'\right) dx' \qquad n = 1, 2, 3 \dots$$

- Das kommt, weil die Sinus- und Cosinus-Funktionen eine komplette Basis von orthogonalen Funktionen bauen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi \delta_{mn} \quad (m,n \neq 0)$$
$$= 0 \quad (m=n=0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn} \quad (m \neq 0)$$
$$= 2\pi \quad m=n=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

dann z.B.:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx'\, f(x') \sin\left(\frac{m\pi}{L}x'\right) = \qquad m\neq 0$$

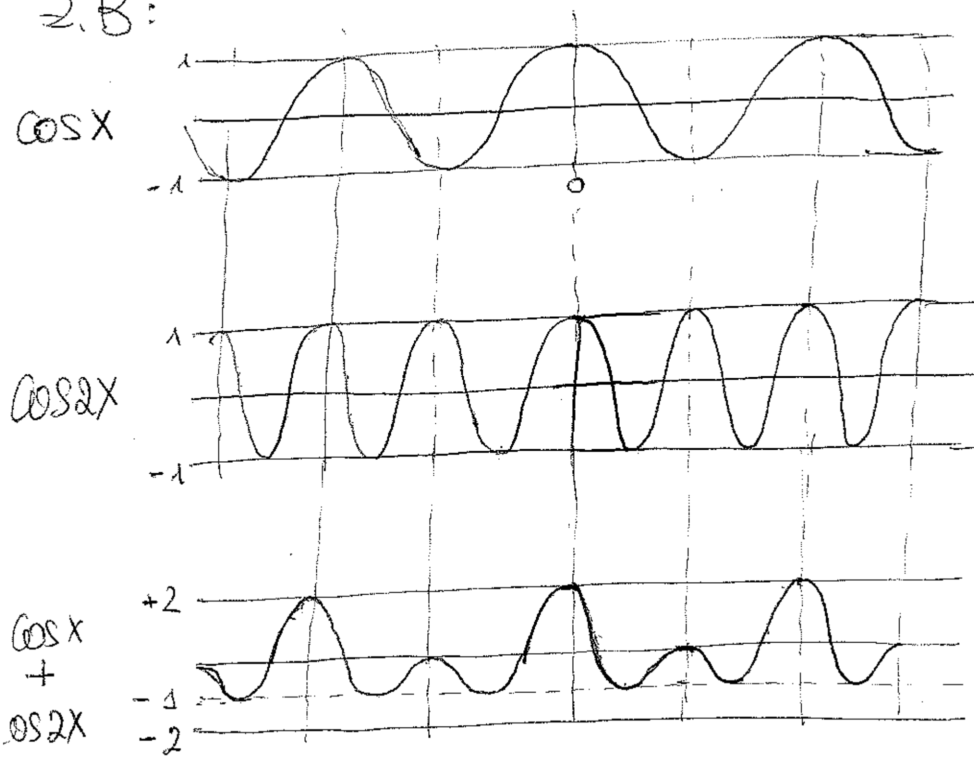
$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}dx'\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x'}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x'}{L}\right]\right]\sin\frac{m\pi}{L}x' \overset{s=\frac{\pi}{L}x'}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ds\, \underbrace{\frac{a_0}{2}\sin ms}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}dx'\cos\frac{n\pi x'}{L}\sin\frac{m\pi}{L}x'}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{n\pi x'}{L}\sin\frac{m\pi x'}{L}dx'}_{\pi\delta_{nm}}$$

$= b_m$ wie wir vorher geschrieben haben.

* Die Idee der Fourier-Reihe ist einfach zu verstehen. Wir addieren Cosinus- und Sinus-Funktionen (und die haben ganz klar eine Periodizität $2L$) mit verschiedenen Gewichten, und damit bauen wir eine periodische Funktion.

z.B:



das ist eine periodische Funktion mit Periode 2π

Wenn wir nun $\cos 3x$, $\cos 4x$ usw (mit verschiedenen Gewichten) addieren, dann kriegen wir immer noch eine periodische Funktion mit Periode 2π.

* FOURIER-TRANSFORMATION

* Aus den Definitionen von a_n und b_n können wir die Fourier-Reihe so schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x')dx' + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{L}x\int_{-L}^{L} f(x')\cos\frac{n\pi}{L}x'\,dx'$$
$$+ \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\int_{-L}^{L} f(x')\sin\frac{n\pi}{L}x'\,dx'$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x')dx' + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}dx' f(x')\cos\frac{n\pi}{L}(x'-x)$$

* Wir nehmen nun den Limes $L\to\infty$ (d.h. dass die Funktion $f(x)$ nun nicht mehr periodisch sein muss).

Sei $\omega \equiv \frac{n\pi}{L}$; $\frac{\pi}{L} \equiv \Delta\omega$ (d.h. die Summe über n wird nun ein Integral)

Wir nehmen an, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x')dx'$ endlich ist, und damit $\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x')dx' = 0$.

Also:

$$f(x) \longrightarrow \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\cos\omega(x'-x)dx' \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\cos\omega(x'-x)dx'$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\frac{1}{2}\left[e^{i\omega(x'-x)}+e^{-i\omega(x'-x)}\right]dx'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{+i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i\omega x'}dx'$$

* Wir führen nun die Fourier-Transform ein:

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i\omega x'}dx'} \longrightarrow \text{Fourier-Transform of } f(x)$$

und damit

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, F(\omega)\, e^{+i\omega x}}$$ Inverse Fourier-Transformation

(Bemerkung: in der Literatur findet man verschiedene Definitionen der Fourier-Transformation, z.B. $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x} dx$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) e^{-i\omega x}$.
Diese Definitionen sind auch möglich, aber man muss mit der $1/\sqrt{2\pi}$ Faktoren aufpassen!)

* Ein besonderes Beispiel hat mit der Dirac-Delta zu tun:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(x'-x)} \right]$$

d.h. dass: $$\delta(x'-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x'-x)} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}$$ ist $F(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}$

Also die Fourier Transform von $f(x) = \delta(x)$

* Wir haben die Fourier-Transform in 1D definiert, aber genauso gut können wir die Fourier-Transform in 3D definieren

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, F(\vec{k})\, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

---

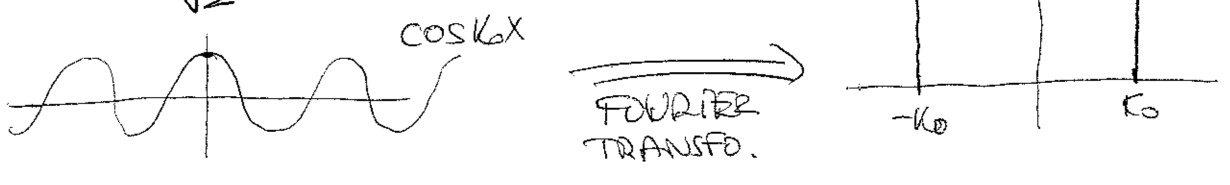
* Beispiel: sei $f(x) = \cos k_0 x$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \cos k_0 x'\, e^{-ikx} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{ik_0x'} + e^{-ik_0x'} \right] e^{-ikx'}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0-k)x'} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(k_0+k)x'}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \delta(k-k_0) + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \delta(k+k_0)$$

Two Dirac-Deltas



* Die Fourier-Transformation ist ein extrem wichtiges mathematisches Werkzeug. Die spielt eine entscheidende Rolle in der Lösung von Differenzialgleichungen (wir werden das sofort sehen). Die ist auch sehr wichtig in der Optik, in der Analyse von Signalen, und viel mehr.

* Wir werden hier alle diese Anwendungen nicht detaliert diskutieren. Ich wollte vielleicht nur ein Paar wichtige Eigenschaften der Fourier-Transform erwähnen. Die werden wir später nicht benutzen, aber die sind trotzdem wichtige Eigenschaften, die man mindestens erwähnen sollte:

* Faltungstheorem

· Sei $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, g(x')\, f(x-x')$ ← Das ist die sogen. Faltung von g und f

Die Faltung spielt mehrmals eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik, z.B in der Theorie der Greenschen Funktionen (sieh S. 46).

· Der Faltungstheorem lautet:

$$\underbrace{H(\omega)}_{\text{Fourier-Transfo. of } h} = \sqrt{2\pi}\, \underbrace{F(\omega)}_{\text{Fourier-Transfo of } f}\, G(\omega)$$ ← Fourier-Transfo. of g

(Bemerkung: Der Beweis ist einfach. Versuch es!)

* Parseval-Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, |F(\omega)|^2$$

* Allgemeine Lösung der Wellengleichung

* Bisher haben wir nur eine spezielle Lösung der Wellengleichung gesehen, nämlich die Ebenewellen. Wir können aber die ebene Wellen benutzen, um eine allgemeine Lösung der Wellengleichung zu finden, und zwar mit Hilfe der Fourier-Transform.

* Wir wollen also die homogene Wellengleichung

$$\Box \vec{\Psi} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\Psi} = 0$$

lösen, und zwar mit Anfangsbedingungen $\begin{cases} \vec{\Psi}(\vec{r}, t=0) = \vec{\Psi}_0(\vec{r}) \\ \dot{\vec{\Psi}}(\vec{r}, t=0) = \vec{v}_0(\vec{r}) \end{cases}$

Sei $\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega)$ die Fourier-Transformierte von $\vec{\Psi}(\vec{r}, t)$

$$\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Das ist eine Überlagerung von ebenen Wellen!

Bemerkung: wir benutzen $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, F(\omega) e^{i\omega t}$ als Definition der Fourier-Transform.

Dann

$$\Box \vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = 0$$

Also $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) = 0$

Dann $\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) \neq 0$ nur wenn $\omega = \pm c k$ (das kennen wir schon aus S. 107)

Dies führt zu den Ansatz:

$$\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) = \vec{a}_+(\vec{k}) \, \delta(\omega + ck) + \vec{a}_-(\vec{k}) \, \delta(\omega - ck)$$

das hat die allgemeine Form von S. 107

und damit

$$\boxed{\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \left\{ \vec{a}_+(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + kct)} + \vec{a}_-(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - kct)} \right\}}$$

Überlagerung von ebenen Wellen mit Gewichtsfunktionen $\vec{a}_\pm(\vec{k})$

* Diese Lösung muß die Anfangsbedingungen erfüllen:

$$\vec{\psi}(\vec{r},t=0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k\,\left\{\vec{a}_+(\vec{k}) + \vec{a}_-(\vec{k})\right\} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{\psi}_0(\vec{r})$$

$$\dot{\vec{\psi}}(\vec{r},t=0) = \frac{i}{(2\pi)^2}\int d^3k\,\left\{\vec{a}_+(\vec{k}) - \vec{a}_-(\vec{k})\right\} ku\, e^{i\vec{k}\vec{r}} = \vec{v}_0(\vec{r})$$

Wir kehren die (3D) Fourier-Transform um:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\vec{a}_+(\vec{k}) + \vec{a}_-(\vec{k})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\,\vec{\psi}_0(\vec{r})\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\vec{a}_+(\vec{k}) - \vec{a}_-(\vec{k})\right) = \frac{-i}{ku}\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\,\vec{v}_0(\vec{r})\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Also $\vec{a}_\pm(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\left[\vec{\psi}_0(\vec{r}) \mp \frac{i}{ku}\vec{v}_0(\vec{r})\right]$

und damit

$$\vec{\psi}(\vec{r},t) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3k\int d^3r'\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\begin{bmatrix} e^{ikut}\left[\vec{\psi}_0(\vec{r}') - \frac{i}{ku}\vec{v}_0(\vec{r}')\right] \\ + e^{-ikut}\left[\vec{\psi}_0(\vec{r}') + \frac{i}{ku}\vec{v}_0(\vec{r}')\right]\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3k\int d^3r'\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\left[\left(e^{ikut}+e^{-ikut}\right)\vec{\psi}_0(\vec{r}') - \frac{i}{ku}\left(e^{ikut}-e^{-ikut}\right)\vec{v}_0(\vec{r}')\right]$$

$$= \int d^3r'\left[\left\{\int\frac{d^3k}{2(2\pi)^3}\left(e^{ikut}+e^{-ikut}\right)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\right\}\vec{\psi}_0(\vec{r}') + \left\{\int\frac{d^3k}{2(2\pi)^3}\left(\frac{-i}{ku}\right)\left(e^{ikut}-e^{-ikut}\right)e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}\right\}\vec{v}_0(\vec{r}')\right]$$

$$= \int d^3r'\left\{\dot{D}(\vec{r}-\vec{r}',t)\,\vec{\psi}_0(\vec{r}') + D(\vec{r}-\vec{r}',t)\,\vec{v}_0(\vec{r}')\right\}$$

wobei $D(\vec{r},t) = \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{(e^{ikut}-e^{-ikut})}{ku}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}$

$$\int_0^\pi d\cos\theta\, e^{ikr\cos\theta} = \int_{-1}^{1} ds\, e^{ikrs} = \frac{(e^{ikr}-e^{-ikr})}{kr}$$

$$= \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk\int_0^\pi d\cos\theta\; 2\pi\,\frac{(e^{ikut}-e^{-ikut})}{ku}\,e^{ikr\cos\theta} =$$

$$= \frac{-1}{2(2\pi)^2 ur}\int^\infty dk\left(e^{ik(r+ut)} - e^{-ik(r-ut)}\right) = \frac{-1}{4\pi ur}\left[\delta(r+ut) - \delta(r-ut)\right] = \frac{1}{4\pi ur}\begin{cases}\delta(r-ut) & t>0\\ 0 & t=0\\ -\delta(r+ut) & t<0\end{cases}$$

* Wellenpakete

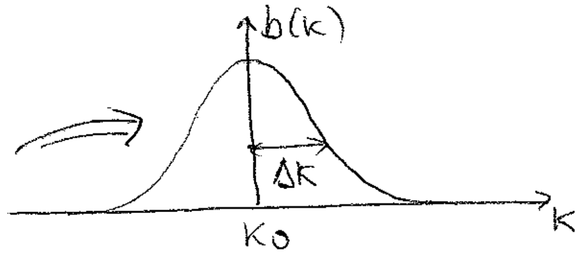
* Also, mit einer linearen Überlagerung von ebenen Wellen können wir eine allgemeine Lösung der Wellengleichung darstellen.

* Sehen wir ein Beispiel. Der Einfachheit halber werden wir nur eine Dimension (x) betrachten:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, b(k)\, e^{ik(x-ut)} \quad \leftarrow$$ lineare Überlagerung von ebenen Wellen.

Sei $b(k) = e^{-(k-k_0)^2/(\Delta k)^2}$

also, eine Gauss-Funktion ⟹



Wie sieht es nun $\psi(x,t)$?

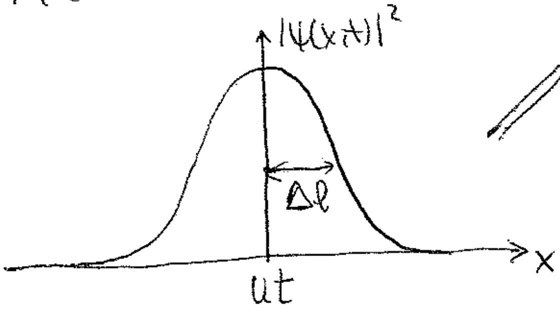
$$\psi(x,t) = e^{-k_0^2/(\Delta k)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left\{\frac{-k^2}{(\Delta k)^2} + \frac{2kk_0}{(\Delta k)^2} + ik(x-ut)\right\}$$

$$= e^{-k_0^2/\Delta k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left\{\frac{-1}{\Delta k^2}\left[k^2 - 2k\left[k_0 + \frac{i}{2}(\Delta k)^2(x-ut)\right]\right]\right\}$$

$$= e^{-\frac{k_0^2}{\Delta k^2}}\, e^{\frac{1}{\Delta k^2}\left[k_0 + \frac{i}{2}(\Delta k)^2(x-ut)\right]^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{1}{(\Delta k)^2}\left[k-\left(k_0+\frac{i}{2}(\Delta k)^2(x-ut)\right)\right]^2}}_{\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-s^2/(\Delta k)^2} = \sqrt{\pi}\,\Delta k}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \sqrt{\pi}\,\Delta k\, e^{ik_0(x-ut)}\, e^{-(x-ut)^2\Delta k^2/4}$$

$$\Rightarrow |\psi(x,t)|^2 = \text{CONST} \cdot e^{-(x-ut)^2\Delta k^2/4}$$ ⟹ Auch eine Gauss-Funktion (die Fourier-Transfo. einer Gauss funktion ist auch eine Gauss Funktion)



⟹ Mit einer linearen Überlagerung von ebenen Wellen haben wir eine lokalisierte Lösung der Wellengleichung erreicht. Solche lokalisierte Lösungen nennt man Wellenpakete

* Das ist ziemlich bemerkenswert, weil jede ebene Welle total delokalisiert ist: $|e^{ikx}|^2 = 1$ (also x-unabhängig).

* Die Idee von Wellenpakete ist sehr wichtig, und spielt z.B. eine entscheidende Rolle in der Quantenmechanik.

---

* Dispersive Medien

* Bisher haben wir betrachtet, dass u eine Konstante war. In der sogen. dispersive Medien ist die relative Dielektrizitätskonstante und daher ist der Brechungsindex Frequenzabhängig. $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$, und daher ist der Brechungsindex Frequenzabhängig.

* Für nicht-dispersive Medien $\omega(k) = ku$.
  Für dispersive Medien hat man auch $\omega(k)$, aber nun $\omega(k) \neq ku$, wegen der Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex.

(* Bemerkung: Dispersion verursacht z.B. den Regenbogen)

* Wir können unsere Theorie für den Fall dispersiver Medien verallgemeinern:

$$\vec{\Psi}_\pm(\vec{r},t) = \int d^3k \, \frac{\vec{a}_\pm(\vec{k})}{(2\pi)^3} \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega(k)t)} \;\underset{\sim}{=}\; \text{Wir nehmen } \vec{k} = k\vec{e}_z, \; \vec{a}_\pm(\vec{k}) = a_\pm(k_z)\,\delta(k_x)\,\delta(k_y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \; b(k) \, e^{i(kz \pm \omega(k)t)}$$

Sagen wir, daß die Gewichtsfunktion $b(k)$ nicht Null nur in einem relativ schmalen Bereich um ein bestimmtes k_0 ist.
(Bemerkung: das war z.B. der Fall des Gauss-Wellenpaketes von S. 123).

Dann können wir Taylor-Entwickeln:

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + (k - k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} + \dots$$

* Sei $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$

$$v_g \equiv \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} \Longrightarrow \text{Gruppengeschwindigkeit}$$

$$q \equiv k-k_0$$

Dann:

$$\psi_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq\; b(k_0+q)\, e^{i(k_0+q)z \pm i[\omega_0+q v_g]t}$$

$$= \underbrace{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}}_{\text{ebene Welle mit } k_0,\,\omega_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dq\; b(k_0+q)\, e^{iq(z \pm v_g t)}}_{f(z\pm v_g t) \Leftarrow \text{Modulationsfunktion.}}$$

Zum Beispiel:

* Suchen wir ein Gauss-Wellenpaket mit Gewichtsfunktion

$$b(k) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}}\, e^{-4(k-k_0)^2/\Delta k_0^2}$$

Dann:

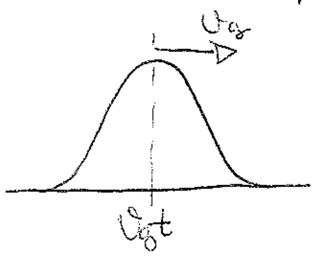
$$f(z\pm v_g t) = \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{-4q^2/\Delta k_0^2}\, e^{iq(z\pm v_g t)}$$

$$= \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z\pm v_g t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{-\left[\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z\pm v_g t)\right]^2}}_{\sqrt{\pi}\,\Delta k_0/2}$$

$$= e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z\pm v_g t)}$$

Also: $\psi_\pm(z,t) = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}\, e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z\pm v_g t)}$

Wir bekommen also ein Wellenpaket, der sich mit Geschwindigkeit $\pm v_g$ bewegt.



(die Form bleibt aber erhalten)

* Wir haben also 2 Sorten von Geschwindigkeiten:
  - Phasengeschwindigkeit: $u = \frac{\omega(k)}{k}$
  - Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \left[\frac{d\omega(k)}{dk}\right]_{k=k_0}$

Die Phasengeschwindigkeit $u(k)$ beschreibt die Ausbreitung einer ebenen Wellen. Die ist nur k-unabhängig für nicht-dispersive Medien.

Die Gruppengeschwindigkeit v_g beschreibt die Bewegung eines Wellenpakets.

* In unserer Diskussion von S. 124 und 125 haben wir angenommen, dass $\omega(k) \simeq \omega(k_0) + q\left(d\omega/dk\right)_{k=k_0}$. Mit dieser Annahme haben wir gesehen, dass der Wellenpaket sich bewegt (mit Geschwindigkeit v_g), aber die Form des Wellenpakets (die Breite) bleibt erhaltet.

Die Näherung $\omega(k) \simeq \omega(k_0) + q\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}$ gilt nur wenn die Breite von K (also Δk_0) klein genug ist. Suchen wir nun was passiert wenn auch die 2. Ordnung wichtig ist:

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + q\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} + \frac{1}{2}q^2\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k=k_0}$$

$$= \omega_0 + q v_g + \frac{1}{2}q^2 D$$

wobei $D = \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k=k_0} \Longrightarrow$ Dispersionskonstante

* Dann:

$$\psi(z,t) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-\frac{4q^2}{\Delta k_0^2}}\, e^{i(k_0+q)z}\, e^{\pm i[\omega_0 + q v_g + \frac{D}{2} q^2]t}$$

$$= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}}\, e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \underbrace{e^{-\left[\frac{4}{\Delta k_0^2} \mp \frac{i}{2} Dt\right] q^2 - iq\left[z \pm v_g t\right]}}_{e^{-\left[\frac{4}{\Delta k_0^2} \mp iDt\right]\left[q^2 - 2q\left(\frac{i(z \pm v_g t)/2}{\frac{4}{\Delta k_0^2} \pm iDt/2}\right)\right]}}$$

$$= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}}\, e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \exp\left[\frac{-(z \pm v_g t)^2}{4\left(\frac{4}{\Delta k_0^2} \pm i\frac{D}{2}t\right)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-\left[\frac{4}{\Delta k_0^2} \mp \frac{iD}{2}t\right]\left[q - \frac{i(z \pm v_g t)}{\left[\frac{4}{\Delta k_0^2} \pm i\frac{D}{2}t\right]}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\left[1 \pm i\frac{\Delta k_0^2 D}{8} t\right]}}\; e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \exp\left\{\frac{-(z \pm v_g t)^2 \Delta k_0^2}{16\left[1 \pm i\frac{\Delta k_0^2}{8} Dt\right]}\right\}$$

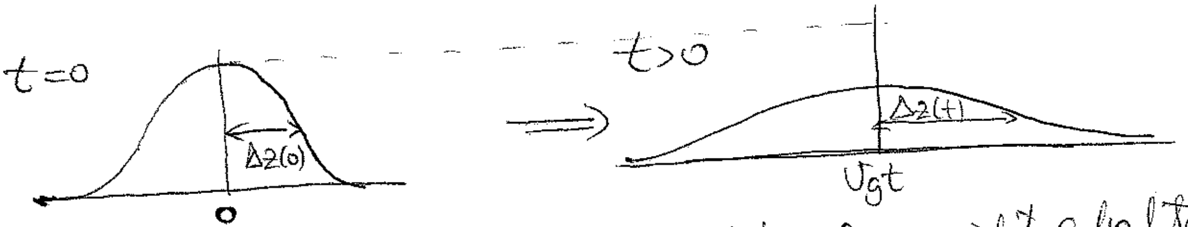
Also

$$|\psi(z,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta k_0^2 D}{8} t\right)^2}} \exp\left\{-\frac{\Delta k_0^2}{8} \frac{(z \pm v_g t)^2}{1 + \left(\frac{\Delta k_0^2}{8} Dt\right)^2}\right\}$$

Sei $(\Delta z(t))^2 = \frac{8}{\Delta k_0^2}\left[1 + \left(\frac{\Delta k_0^2}{8} Dt\right)^2\right]$

$$\Delta z(0)^2 = \frac{8}{\Delta k_0^2} \Longrightarrow \boxed{\Delta z(t) = \Delta z(0) \sqrt{1 + \left(\frac{Dt}{\Delta z(0)^2}\right)^2}}$$

und: $|\psi(z,t)|^2 = \frac{\Delta z(0)}{\Delta z(t)} \exp\left\{-\frac{(z \pm v_g(t))^2}{\Delta z(t)^2}\right\}$



Die Form des Wellenpakets bleibt also nicht erhalten. Die Breite nimmt mit der Zeit zu (und die Höhe nimmt ab) ⟹ DISPERSION

* Die Dispersion der Wellenpaketen in dispersiven Medien spielt eine wichtige Rolle in mehreren Systeme, z.B. in Glasfasern wird wegen der Dispersion das Signal schlechter wenn die Abstände gross sind. Dispersion ist auch sehr wichtig z.B. in der Quantenmechanik.

---

* KUGELWELLEN

* Noch eine besondere Sorte von speziellen Lösungen der homogenen Wellengleichung sind die Kugelwellen.

Wir nehmen radialsymmetrische Felder der Form

$$\psi(\vec{r},t) = \psi(r,t) \qquad |\vec{r}| = r$$

Dann

$$\Box\psi \overset{\text{Laplace in Kugelkoordinaten}}{=} \left\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\}\psi$$

Sei $\eta(\vec{r},t) = r\,\psi(\vec{r},t)$, dann:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \eta(\vec{r},t) = 0$$

Das ist eine 1D Wellengleichung mit Lösungen der Form (S. 107):

$$\eta(\vec{r},t) = \eta_+(kr+\omega t) + \eta_-(kr-\omega t)$$

wobei $ku = \omega \quad (\omega \geq 0)$

Dann

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left\{ \eta_+(kr+\omega t) + \eta_-(kr-\omega t) \right\}$$

* Nehmen wir, dass $\eta_\pm$ Ebenewellen sind.

Dann:

$$\boxed{\psi_\pm(r,t) = \frac{1}{r}\, e^{i(kr \pm \omega t)}} \equiv \underline{\text{Kugelwellen}}$$

* Wir sehen, dass:
  * Die Flächen der gleichen Phase $\varphi = kr \pm \omega t$ bilden für ~~jedes~~ jede Zeit t eine Kugelfläche (daher die Name Kugelwellen)
  * Die Amplitude nimmt als $\frac{1}{r}$ mit r ab
  * Kugelflächen der Phase $\varphi_\pm^{(0)}$ erfüllen $r = \frac{\varphi_\pm^{(0)}}{k} \mp \frac{\omega}{k} t$ und damit ist die Phasengeschwindigkeit $u = \omega / k$ wie für eine Ebenewelle.
  * Wie für eine Ebenewelle benachbaren Kugelflächen derselben Phase haben ein Abstand $\lambda = 2\pi / k$