• Kurven- und Oberflächen-Integrale

. Bevor wir mit der Theorie der Elektrostatik anfangen, werden wir ein Paar notwendige mathematische Begriffe lernen, und zwar die Idee von ~~K~~ Kurven- und Oberflächen-Integralen (und die wichtige Gauß- und Stokes-Sätze), und die Idee von Dirac-Delta. Wir werden später sehen, dass diese Ideen sehr nützlich für die Theorie der Elektrostatik sind.

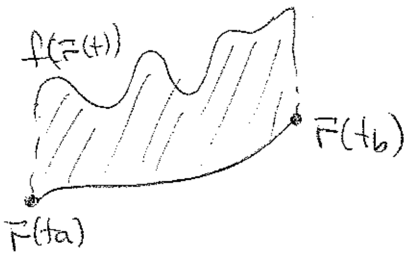
. Kurvenintegral (Auffrischung von RdP I)

. Wir werden nun anfangen mit der Idee von Kurvenintegral. Kurvenintegrale haben wir schon in RdP I gesehen (S. 106 der RdP I Notizen). Also wir werden hier die Ideen nur auffrischen.

. Sei eine Kurve $C: \vec{r}(t)$ wobei der Parameter t die Kurve parametrisiert.

Dann

$$\boxed{\int_C dl\, f(\vec{r}) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t))}$$



Kurvenintegral entlang C

. In RdP I haben wir gesagt, dass es mehreren Arten von Kurven-Integralen. Besonders wichtig für unsere künftige Diskussion sind Kurvenintegralen der Form:

$$\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} \qquad \text{wobei } \vec{V}=\vec{V}(\vec{r}) \text{ ein Vektorfeld ist}$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = (V_x(\vec{r}), V_y(\vec{r}), V_z(\vec{r}))$$

Dann:

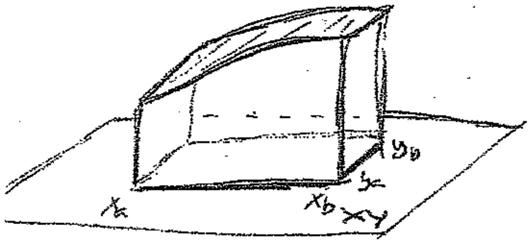
$$\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_C V_x(\vec{r})\,dx + \int_C V_y(\vec{r})\,dy + \int_C V_z(\vec{r})\,dz$$

$$= \int_C V_x(\vec{r}(t))\frac{dx}{dt}dt + \int_C V_y(\vec{r}(t))\frac{dy}{dt}dt + \int_C V_z(\vec{r}(t))\frac{dz}{dt}dt$$

(Bemerkung: Beispiele findet ihr auf S. 108 der RDP I Notizen)

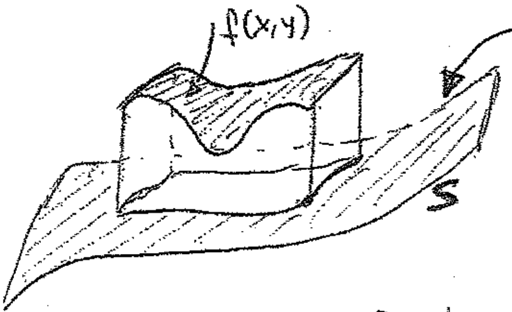
• Oberflächenintegral

* Wenn wir die 2D-Integrale in RdPI diskutiert haben, haben wir die Integrale auf der XY-Ebene gemacht



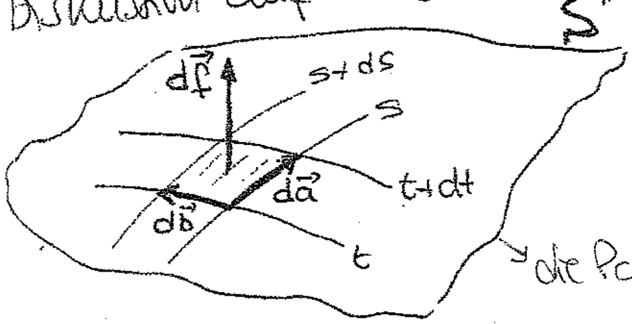
$$\longrightarrow \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a}^{y_b} dy\, f(x,y)$$

* Aber manchmals wollen wir das Integral nicht über einer Ebene, sondern über einer beliebigen Oberfläche (S)



* Wir parametrisieren die Fläche mit 2 Parametern: $\vec{r}(t,s)$

* Wie in unserer Diskussion der Kurvenintegral müssen wir nun ein Flächenelement einführen (Wir machen es genau wie in unserer Diskussion auf S. 88 der RdPI Notizen)



$$d\vec{f} = d\vec{a} \times d\vec{b} \rightarrow$$ Flächenelement (ein Vektor!)

$$\left.\begin{aligned} d\vec{a} &= dt\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \\ d\vec{b} &= ds\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \end{aligned}\right\} \boxed{d\vec{f} = dt\,ds \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right)}$$

die Parametern t und s charakterisieren die Oberfläche.

* Sei $df = dt\,ds \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|$

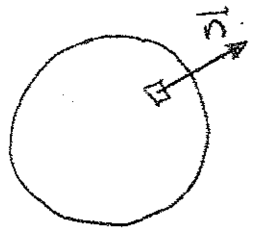
$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|} \longrightarrow$$ Normalvektor an dem Punkt $\vec{r}(t,s)$

• Für die xy-Ebene, $\vec{n} = \vec{e}_z$, und $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|$ war die Jacobi-Determinante.

• Also $\boxed{\vec{df} = df\, \vec{n}}$

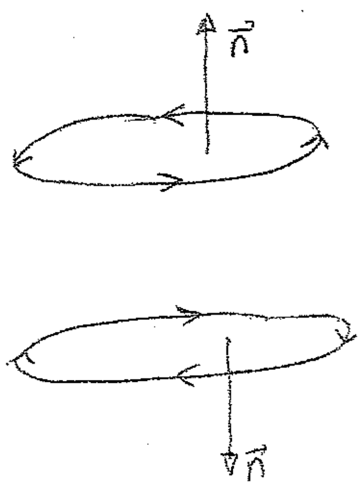
* Für die Wahl der Richtung von $\vec{n}$ folgen wir die folgende Konvention:

* Geschlossene Flächen



* $\vec{n}$ nach außen

* Offene Flächen



· Hier ist es wichtig in welche Richtung wir den Rand gehen.

· Man folgt den Schraubenziehertrick (siehe Abbildung)

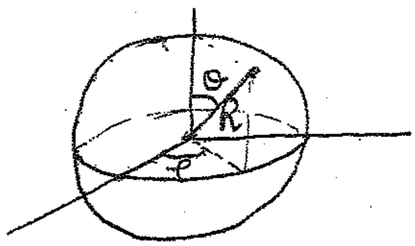
* Wie für Kurvenintegrale es gibt mehreren Sorten Oberflächenintegralen.

Wir können z.B.

$$\int_S df \; F(\vec{r}) = \int dt \int ds \; \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right| F[\vec{r}(t,s)]$$

haben. Sehen wir ein Beispiel:

• <u>Beispiel</u>: <u>Fläche einer Kugel</u> (mit Radius R)



• Erstmal müssen wir die Oberfläche der Kugel parametrisieren. Das ist sehr einfach mit Hilfe der Polar- und Azimutwinkeln (S. 61 von RdPI)

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = R\,[\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta]$$

nun R bleibt fest

$$d\vec{f} = d\theta\, d\varphi \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right]$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R\,[\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta]$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R\,[-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0]$$

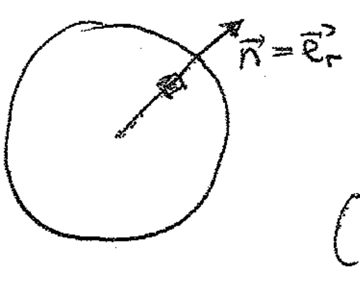
S.6 von RdPI   S.[illegible] von RdPI

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \overset{\downarrow}{=} R^2 \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \overset{\downarrow}{=} R^2 \left\{ \sin^2\theta\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin^2\theta\sin\varphi\, \vec{e}_y + \cos\theta\sin\theta\, \vec{e}_z \right\}$$

$$= R^2 \sin\theta \left[\sin\theta\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_y + \cos\theta\, \vec{e}_z \right]$$

S.62 von RdPI

$$= R^2 \sin\theta\, \vec{e}_r$$



Wie erwartet der Normalvektor des Kugels ist $\vec{e}_r$, also der Einheitsvektor in die Radialrichtung.

(<u>Bemerkung</u>: diese Definition von $\vec{n}$ folgt die Konvention die wir vorher erwähnt haben)

Also $d\vec{f} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

$df = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

Damit $\int_S df \, F(\vec{r}) = R^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; F[\vec{r}(\theta,\varphi)]$

Fläche der Kugel

* z.B. wenn $F(\vec{r}) = 1$, dann haben wir einfach die Gesamtfläche der Kugel:

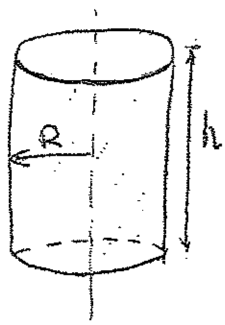
$$F = \int_S df = R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{\underbrace{[-\cos\theta]_0^{\pi}}_{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \Rightarrow \text{Fläche} = 4\pi R^2$$

* Wie für die Kurvenintegralen können wir auch Oberflächenintegralen von Vektorfelder machen. Ein wichtiges Beispiel, dann wäre (besonders so in der Theorie der Elektromagnetismus)

$$\int_S d\vec{f} \cdot \vec{V}(\vec{r}) = \int_S df \, \vec{n} \cdot \vec{V}[\vec{r}(t,s)]$$

$$= \int_S dt \, ds \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right] \cdot \vec{V}[\vec{r}(t,s)]$$

Beispiel: Wir betrachten nun eine Zylinder-Fläche (ohne die End-Kappen)



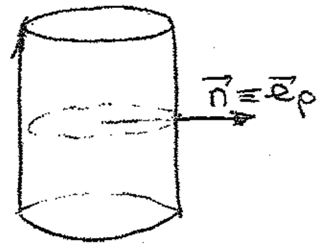
Die Fläche kann mit Hilfe der Polarwinkel φ und z parametrisiert werden:

$$\vec{r}(\varphi, z) = R\cos\varphi \, \vec{e}_x + R\sin\varphi \, \vec{e}_y + z \, \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \overset{\text{S. 61 von RdP I}}{=} R \, \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

Also $d\vec{f} = R \, d\varphi \, dz \, \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z \overset{\text{S. 61 von RdP I}}{=} R \, d\varphi \, dz \, \vec{e}_\rho$



Sei z.B.

$$\vec{F} = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\,\vec{e}_x + (y\cos\alpha + x\sin\alpha)\,\vec{e}_y$$

$$= R\,(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)\vec{e}_x + (\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi)\vec{e}_y$$

$$= R\cos\alpha\,[\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y] +$$

$$+ R\sin\alpha\,[-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y] = R(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{e}_\varphi)$$

Dann $\vec{F}\cdot\vec{n} = R\cos\alpha$

Also $$\int_S d\vec{f}\cdot\vec{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz\; R\cdot R\cos\alpha = R^2\cos\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz$$

$$= 2\pi R^2 h\cos\alpha$$

- <u>Gauß-Satz</u>

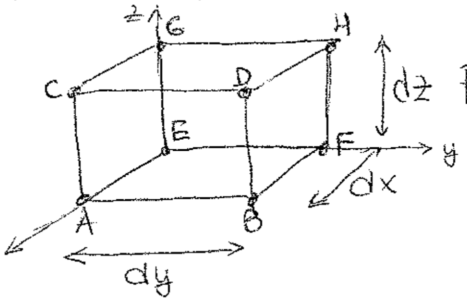
* Es gibt eine extrem nützliche Verbindung zwischen Oberflächen-Integral und Volumen-Integral:

$$\boxed{\int_{S(V)} \vec{V}\cdot d\vec{f} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\, d\tau} \rightarrow \text{Gauß-Satz}$$

wobei V ein Volumen ist, $S(V)$ die Oberfläche des Volumens, $d\vec{f}$ das Oberflächenelement, und $d\tau = dx\,dy\,dz$ das Volumen-Element. $\vec{V}(\vec{r})$ ist ein Vektorfeld.

- Dieser Satz ist sehr wichtig (besonders so in der Theorie des Elektromagnetismus). Gucken wir nun ganz kurz wo kommt dieser Satz her.

* Wir spalten das Volumen V in mehreren kleinen Parallelepipeden:



• Wir betrachten ein Vektorfeld $\vec{v} = (v_x(\vec{r}), v_y(\vec{r}), v_z(\vec{r}))$

Für die Oberfläche ABCD guckt das Oberflächen-Element in Richtung x. Also das Oberflächen-Integral ist der Form:

$$\int_{ABCD} \vec{v}\cdot d\vec{f} = v_x(0+d\vec{x})\,\underbrace{dy\,dz}_{\text{Fläche von ABCD}}$$

• Für die Oberfläche EFGH guckt das Flächenelement in Richtung $-x$, also

$$\int_{EFGH} \vec{v}\cdot d\vec{f} = -v_x(0)\,dy\,dz$$

Taylor-Entwicklung
$v_x(0+d\vec{x}) = v_x(0) + \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx$

• Also:

$$\int_{ABCD} \vec{v}\cdot d\vec{f} + \int_{EFGH} \vec{v}\cdot d\vec{f} = \left[v_x(0+d\vec{x}) - v_x(0)\right] dy\,dz =$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

Genauso:

$$\int_{BFDH} \vec{v}\cdot d\vec{f} + \int_{AECG} \vec{v}\cdot d\vec{f} = \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$$

und

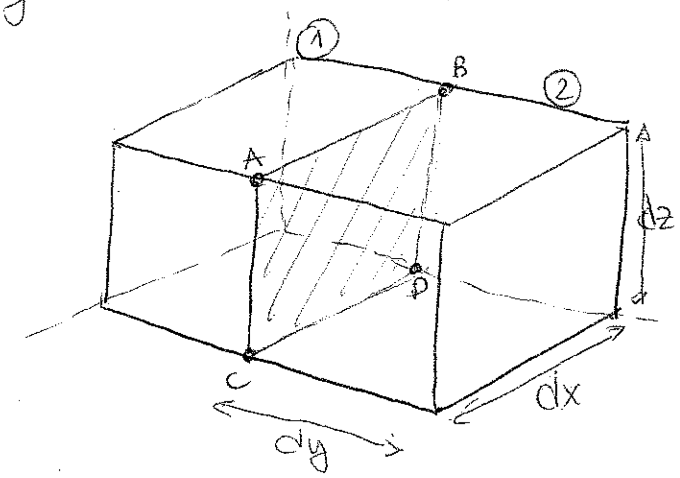
$$\int_{CGDH} \vec{v}\cdot d\vec{f} + \int_{AEBF} \vec{v}\cdot d\vec{f} = \frac{\partial v_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

* Also das gesamte Integral auf die ober Fläche des Parallelepipeds is

$$\int_{\substack{\text{Oberfläche}\\ \text{des}\\ \text{Parallelepipeds}}} \vec{v}\cdot d\vec{f} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\tau\,\equiv\,\text{Volumenelement}}$$

$$= (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\,d\tau$$

* Das ist wahr für alle unendlich kleine Parallelepipeden.
Gucken wir nun was passiert mit 2 benachbarten Parallelepipeden.



Das Oberflächenintegral auf der Trennungsfläche ABCD ist

- Für Parallelepiped 1

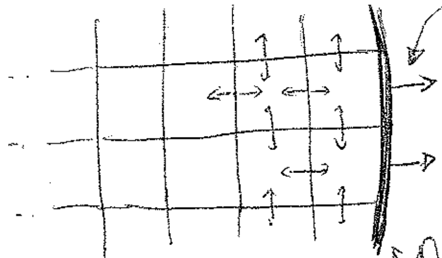
$$\vec{v}\, dx dz$$

- Für Parallelepiped 2

$$-v\, dx dz$$

- Also, wenn wir addieren die beiden Oberflächenintegralen, die Mitwirkung der Trennungsfläche verschwindet.
- Das ist wahr für alle Trennungsflächen zwischen alle elementäre Parallelepipeden.

Nur die Oberflächenintegralen an der Oberfläche S(V) des Volumens <u>überleben</u>!



* Also, die Summe über alle Parallelepipeden ist:

$$\sum_{\text{parallelepipeden}} \int_{\substack{\text{Oberfläche}\\ \text{des Parallelepipeds}}} \vec{v}\cdot d\vec{f} = \sum_{\text{parallelepipeden}} (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\, d\tau \longrightarrow \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\, d\tau$$

aber auch:

$$\sum_{\text{parallelepipeden}} \int_{\substack{\text{Oberfläche}\\ \text{des}\\ \text{Parallelepipeds}}} \vec{v}\cdot d\vec{f} \underset{\downarrow}{=} \int_{S(V)} \vec{v}\cdot d\vec{f}$$

nur die Oberflächenintegralen auf S(V) überleben

$$\boxed{\int_{S(V)} \vec{v}\cdot d\vec{f} = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\, d\tau}$$

und damit ist der Gauß-Satz bewiesen!

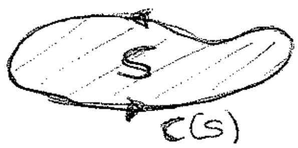
* Dieser Satz ist extrem wichtig, und irgendwie fast ein Wunder!
Wenn wir das Oberflächenintegral auf S(V) kennen, dann kennen wir das Volumenintegral von $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ auf dem gesamten Volumen!!

* Wir werden diesen Satz mehrmals in der Theorie des Elektromagnetismus anwenden.

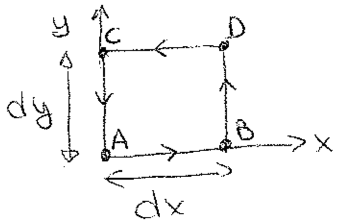
• Stokes-Satz

· Ähnlicherweise können wir Linienintegralen und Oberflächenintegralen verbinden, und zwar mit Hilfe des sogen. Stokes-Satzes:

$$\boxed{\oint_{C(S)} \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot d\vec{f}}$$



· Der Beweis ist sehr ähnlich wie für den Gauß-Satz.
Man spaltet S in kleinen Parallelogrammen



$$\left.\begin{aligned} \int_{AB} \vec{V}\cdot d\vec{l} &= V_x(0)\,dx \\ \int_{DC} \vec{V}\cdot d\vec{l} &= -V_x(dy)\,dx \end{aligned}\right\} \int_{AB}\vec{V}\cdot d\vec{l} + \int_{DC}\vec{V}\cdot d\vec{l} = [-V_x(dy)+V_x(0)]\,dx \underset{\text{Taylor}}{=} -\frac{\partial}{\partial y}V_x\,dx\,dy$$

Ebenfalls:

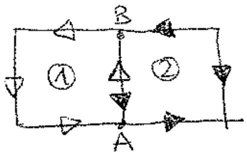
$$\left.\begin{aligned} \int_{BD} \vec{V}\cdot d\vec{l} &= V_y(dx)\,dy \\ \int_{CA} \vec{V}\cdot d\vec{l} &= -V_y(0)\,dy \end{aligned}\right\} \int_{BD}\vec{V}\cdot d\vec{l} + \int_{CA}\vec{V}\cdot d\vec{l} = [V_y(dx)-V_y(0)]\,dx = \frac{\partial}{\partial x}V_y\,dx\,dy$$

· Damit: $$\oint_{ABDC} \vec{V}\cdot d\vec{l} = (\partial_x V_y - \partial_y V_x)\,dx\,dy = (\vec{\nabla}\times\vec{V})_z\,dx\,dy$$

Das Oberflächenelement des Vierecks ist $d\vec{f} = dx\,dy\,\vec{e}_z$ (S. 3)

also $$\oint_{ABCD} \vec{V}\cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot d\vec{f}$$

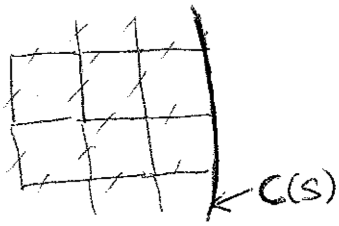
* Für zwei benachbarten Vierecken:



Das Integral AB wir ganz klar gekanzelt, weil in ② man geht von B zu A und in ① von A zu B.

Das ist wahr für alle Trennlinien zwischen elementären Vierecken.

Nur die Linienintegralen auf der Kurve C(s) überleben.



· Also die Summe alle Kurvenintegralen ist:

$$\sum_{\text{Vierecken}} \oint \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = \sum_{\text{Vierecken}} (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot\vec{df} \Rightarrow \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot\vec{df}$$

$$\| $$

$$\oint_{C(s)} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} \longrightarrow \boxed{\oint_{C(s)} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot\vec{df}}$$

Und damit ist der Stokes-Satz bewiesen.

· Dieser Satz ist auch sehr wichtig, und spielt ebenfalls eine sehr bedeutende Rolle in der Theorie des Elektromagnetismus.

• DIRAC-DELTA-FUNKTION

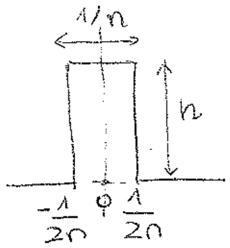
• Die Dirac-Delta-Funktion spielt eine extrem wichtige Rolle in der theoretischen Physik, auch in der Theorie des Elektromagnetismus.

• Die Delta-Funktion $\delta(x)$ wird durch die folgende Eigenschaften definiert:

$$\delta(x) = 0 \qquad \text{für } x \neq 0$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx \longrightarrow \text{z.B. } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

• Aus diesen Eigenschaften wird es klar, daß $\delta(x)$ muss unendlich hoch und schmal um $x=0$. Mathematisch ist das problematisch, weil so eine Funktion nicht existiert. Man kann trotzdem $\delta(x)$ als Limes einer Reihe von Funktionen (d.h. eine sogen. "Distribution"). $\delta(x)$ kann durch verschiedenen Funktionenreihen angenähert werden:

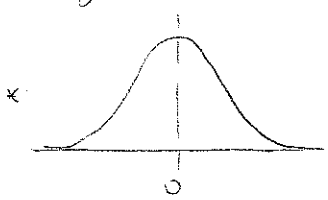
* 

• $\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -1/2n \\ n & -1/2n < x < 1/2n \\ 0 & x > 1/2n \end{cases}$

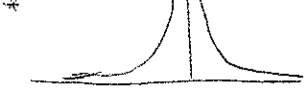
• ganz klar $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\,dx = 1$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, f(x)\, dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx} = f(0)$$

* Das gilt auch für:

* 

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

* 

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2}$$

und andere.

* Die Dirac-Delta erfüllt einige <u>nützliche Eigenschaften</u>:

① $\delta(x) = \delta(-x)$ $\longrightarrow$ das sollte klar aus der Definition von Dirac-Delta sein

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-x')\, dx = f(x')$ $\longrightarrow$ das ist nur eine Verschiebung

③ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(ax)\, dx \underset{x = y/a}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y)\, \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} f(0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx$$

also $\Rightarrow$ $\delta(ax) = \dfrac{1}{a}\delta(x)$

Wenn $a<0$, wegen $\delta(x) = \delta(-x)$ $\longrightarrow$ $\delta(ax) = \delta(-|a|x) = \delta(|a|x) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$

Also im allgemeinen: $\boxed{\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)}$

④ Sei $g(x)$ eine Funktion von x. Wir sind nun an $\delta[g(x)]$ interessiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta[g(x)]\, dx = \,?$$

Per definitionem, $\delta[g(x)] = 0$ für $g(x) \neq 0$. Also nur die Nullstellen von $g(x)$ spielen hier eine Rolle.

Sei a so eine Nullstelle. In der Nähe von a können wir Taylor-entwickeln: $g(x) \simeq g'(a)(x-a)$

Also, in der Nähe von a: $\delta[g(x)] = \dfrac{1}{|g'(a)|}\delta(x-a)$ (wegen ③)

Wenn es mehr als eine Nullstelle gibt:

$$\boxed{\delta[g(x)] = \sum_{\substack{a \in \text{Nullstellen} \\ \text{von } g(x) \\ g'(a) \neq 0}} \frac{1}{|g'(a)|}\delta(x-a)}$$

* Die Dirac-Delta kann auch in 3D definiert werden

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

also: $\int d^3r\ \delta^{(3)}(\vec{r}) = 1$

* Die Dirac-Delta ist z.B. sehr nützlich wenn wir ~~...~~ eine kontinuerliche Verteilung in eine diskrete Verteilung umwandeln wollen. (Bemerkung: das ist eigentlich das Gegenteil von S. 40 der RdP I-Notizen)

Sei z.B. eine Massenverteilung $\rho(\vec{r})$. Wenn wir eigentlich nur diskrete Massen m_j an Stellen $\vec{r}_j$ haben, dann

$$\rho(\vec{r}) = \sum_j m_j\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j)$$

damit ist z.B.

* Gesamtmasse: $M = \int \rho(\vec{r})\,d^3r = \sum_j \int m_j\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j)\,d^3r = \sum_j m_j$
* Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\,d^3r = \frac{1}{M}\int \vec{r}\sum_j m_j\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j)\,d^3r$

$$= \frac{1}{M}\sum_j m_j\,\vec{r}_j$$

---

* Gauss-Gesetz
* Wir werden nun eine extrem wichtige Eigenschaft beweisen, nämlich

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})}$$

Wir werden später sehen, daß diese Eigenschaft sehr wichtig in der Theorie der Elektrostatik ist.

* Erstmal: $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$

$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_z =$$

$$= \frac{-1}{r^3}\,\vec{r}$$

Wir werden erstmal betrachten, dass $r \neq 0$. Wir werden später sehen, was passiert wenn $r \to 0$ geht.

also: $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)$

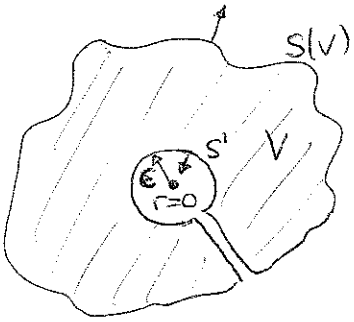
$$= \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0$$

Also $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ für $r \neq 0$..

Gucken wir was passiert wenn $r \to 0$ geht. Hier werden wir den Gauss-Satz anwenden:

$$\int_V \vec{\nabla}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) d^3r = -\int_{S(V)} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{f}$$

das wäre Null wenn $r=0$ nicht in V wäre.



Wir machen nun wie in der Abbildung. Sagen wir dass $r=0$ ist in V. Wir machen einen Kugelsymmetrischen Loch um $x=0$ mit Radius ϵ, wobei $\epsilon \to 0$ geht.

Das Oberflächen-Integral der neuen Oberfläche ist

$$\int_{S(V)} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{f}}{r^3} + \int_{S'} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{f}}{r^3} = 0$$

(die Integrale der Kanäle verschwinden miteinander)

das neue Volumen hat nicht $r=0$ innendrin.

Da S' eine Kugel ist:

$$\vec{r} = \delta \vec{e}_r$$

$$\int_{S'} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{f}}{r^3} = -\int_{S'} \frac{\vec{r}\cdot\left(\vec{e}_r\, \delta^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\right)}{r^3} = +\int_{S'} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = +4\pi$$

Also: $\displaystyle\int_{S(V)} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{f}}{r^3} = -4\pi$

und damit $\displaystyle\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d^3r = -4\pi$ wenn $\vec{r}=0$ in V ist.

also $\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})}$ wie wir beweisen wollten.