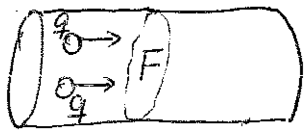
• MAGNETOSTATIK

· Wir werden nun sehen, was passiert wenn es bewegte elektrische Ladungen
gibt. Wir werden erstmal die Idee von stationärer elektrischer Strom
sehen, und später werden wir sehen, dass diese Ströme magnetischen
Felder verursachen.

* STROM

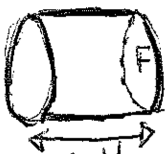
· Wir haben gesehen (S. 38), dass in metallischen Leitern in elektrostatischen
Gleichgewicht es kein E-Feld existiert. Wir können aber in solchen
Leitern eine zeitlich konstante Potentialdifferenz erzeugen.
(Bemerkung: auf S. 21 haben wir gesehen, dass die Potentialdifferenz
$\varphi(B)-\varphi(A) = U_{BA} \equiv$ Spannung. Wir erzeugen also eine Spannung hier.)

· Die Spannung ergibt eine geordnete Bewegung der elektrischen Ladungen in dem Leiter. Diese geordnete Bewegung ist der elektrische Strom.



Die geladene Teilchen haben eine Teilchendichte $n = N/V$,
eine Ladung q, und die bewegen sich mit eine mittleren Geschwindigkeit
v. Nehmen wir einen Leiter mit Leiterquerschnitt F.

Gucken wir nun die Ladung die durch die Fläche F während eines
gewissen Zeitintervalls dt fliesst. Die wäre die gesamte Ladung innerhalb
des Volumens eines Zylinders mit Länge $v\,dt$ und
Fläche F



$v\,dt$

$$\Delta Q = \underbrace{[F v\,dt]}_{\text{Volumen des Zylinders}} \cdot \underbrace{[nq]}_{\text{Ladungsdichte}}$$

· Man definiert dann die Stromstärke als:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = n F v q$$

* Die Einheit von Stromstärke ist das Ampere

$$1A = 1\ C/s$$

* Man definiert die Stromdichte als Stromstärke pro Fläche, also:

$$j = I/F = nqv$$

* Die Stromdichte ist eigentlich ein Vektor, weil die Geschwindigkeit auch ein Vektor ist

$$\vec{j} = \underbrace{nq}_{\text{Ladungsdichte} \Rightarrow \rho}\ \vec{v} \longrightarrow \text{Geschwindigkeit}$$

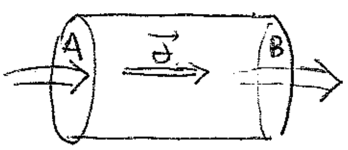
* Im allgemeinen Fall sind die Ladungsdichte und die Geschwindigkeit nicht homogen, und damit ist die Stromdichte ein zeitabhängiges Vektorfeld

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\, \vec{v}(\vec{r},t)}$$

* Die Ladungsdichte und die Stromdichte erfüllen eine wichtige Gleichung, die sogen. Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

Diese Gleichung hat eine sehr einfache Interpretation.



Nehmen wir ein Volumen zwischen zwei Flächen A und B. Wir integrieren die Kontinuitäts-gleichung auf dem Volumen:

$$\int d^3r\, \frac{d\rho}{dt} = -\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \overset{\text{Gauß-Satz}}{=} -\int_S d\vec{f}\cdot\vec{j} = -(j_B - j_A)$$

Achtung, die Normalvektoren um A und B zeigen in $-x$ und $+x$ Richtungen.

* Bemerkung: Da $\vec{j} = j\,\vec{e}_x$, die Zylinderwände spielen keine Rolle)

* Andererseits: $\int d^3r \, \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int d^3r \, \rho\right] = \frac{dQ}{dt}$

* Also $\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{\text{Änderung der Gesamtladung im Volumen V}} = \underbrace{j_A}_{\text{reinkommender Strom}} - \underbrace{j_B}_{\text{rausfliessender Strom}}$

* Das macht natürlich Sinn!
* Die Kontinuitätgleichung spielt eine wichtige Rolle später in der Elektrodynamik.

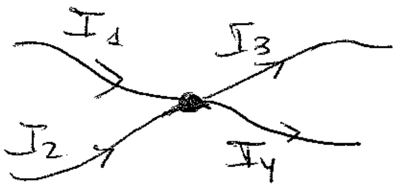
In der Magnetostatik sind wir an statischen Problemen interessiert, wo $d\rho/dt = 0$ ($\rho(\vec{r})$ ist also zeitunabhängig).

(* <u>Bemerkung</u>: Die Ladungen bewegen sich, aber die Ladungsdichte bleibt erhaltet und zeitunabhängig.)

Daher, <u>in der Magnetostatik</u>: $\boxed{\nabla \cdot \vec{j} = 0}$

D.h. dass für alle Volumina

reinkommender Strom = rausfliessender Strom



$\Rightarrow I_1 + I_2 = I_3 + I_4$

$\Rightarrow$ <u>Kirchhoffsche Knotenregel</u>

* Wir haben gesagt, dass man eine Spannung U braucht, um einen Strom I zu erzeugen. Für mehreren Materialen (sogen. <u>ohmsche</u> Leiter) ist die Beziehung zwischen

I und U ganz einfach:

$$\boxed{I = U/R}$$

(Bemerkung: Es gibt Leiter die nicht-Ohmisch sind, also $I \neq U/R$)

wobei R der <u>elektrische Widerstand</u> ist.

Die Einheit von R ist der Ohm ($1\,\Omega = 1\ V/A$).

Je größer R desto mehr Spannung braucht man um einen gewissen Strom I zu halten.

* Der elektrische Widerstand führt zu einem Energieverlust als Wärme. Die ausgestrahlte Wärmeenergie wird mit einer Leistung $\sim R I^2$ ausgestrahlt.

(<u>Bemerkung</u>: Das ist was passiert zum Beispiel in einer Glühbirne. Das Filament glüht wegen diese ausgestrahlte Energie.)

* Mehrmals ist diese ausgestrahlte Energie erwünscht (Glühbirne, Heizung), aber mehrmals ist sie ein Problem (z.B. Hochspannungs-leitungen). Die Reduktion des Widerstands führt also zu effizientere Ströme.

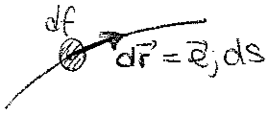
(<u>Bemerkung</u>: Das ist ein Grund warum <u>Supraleiter</u> so interessant sind. In einem Supraleiter verschwindet der Widerstand. Um das etwa zu verstehen braucht man Quantenmechanik.)

* Nun haben wir Ströme verstanden. Jetzt werden wir sehen, dass stationäre Ströme magnetostatischen Feldern erzeugen.

* AMPÈRE-GESETZ

· Auf S. 15 haben wir das Coulomb-Gesetz eingeführt. Dies war eine experimentell verifizierte Tatsache, die die Grundlage der Elektrostatik war. Diese Rolle übernimmt in der Magnetostatik das Ampère-Gesetz.

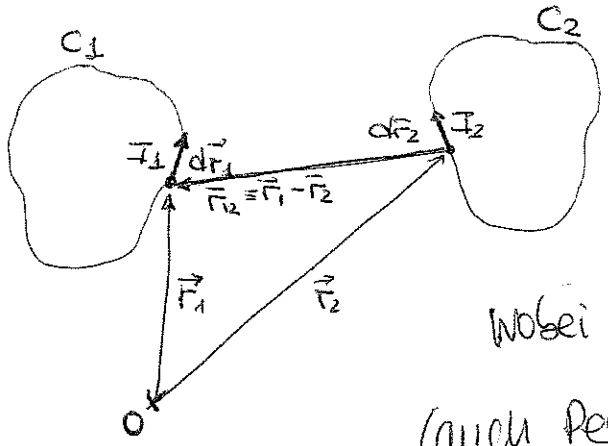
· Für die Elektrostatik haben wir die Idee von Punktladung eingeführt (S. 15). In der Magnetostatik werden wir noch eine Idealisierung einführen, <u>die Idee von Stromfaden</u>, linienförmige Ströme ohne transversale Ausdehnung. Für einen Stromfaden



$$\vec{j}\, d^3r = j \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Richtung von } \vec{j}}}{\vec{e}_j}\, df\, ds = (j\,df)\, d\vec{r} = I\, d\vec{r}$$

per Definitionem $I = j\,df$

· Wir betrachten nun zwei Stromfäden mit Stromstärke I_1 und I_2.



* Die Kraft, die C_2 auf C_1 übt, ist:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}}$$

wobei $\mu_0 = 1.26 \frac{N}{A^2}$ die magnetische Feldkonstante ist (auch Permeabilität des Vakuums genannt)

* μ_0 und ϵ_0 (S. 16) sind miteinander verknüpft, und zwar

$\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist

(<u>Bemerkung</u>: Wir werden später in dieser Vorlesungsreihe sehen, dass es ein guter Grund gibt, warum c hier auftaucht!)

· Wir werden nun die Ampère-Kraft $\vec{F}_{12}$ etwas umschreiben. Wir benutzen die Eigenschaften des Kreuzprodukts:

$$d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}) = d\vec{r}_2\,(d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}) - \vec{r}_{12}\,(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)$$

Also:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left\{ \oint_{C_2} d\vec{r}_2 \underbrace{\oint_{C_1} \frac{d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}} - \oint_{C_1}\oint_{C_2} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \right\}$$

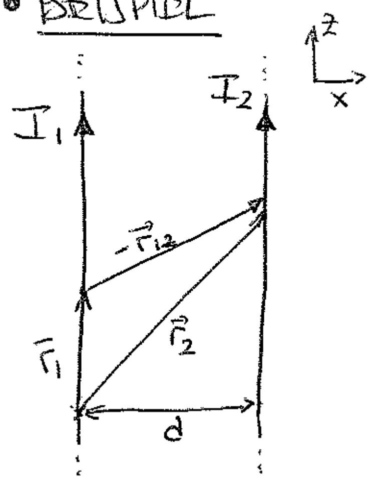
$$-\oint_{C_1} d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes-} \\ \text{-Satz}}}{=} -\int_{S_1} df_1\, \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}_{12}|}\right)\right)}_{0}$$

Also

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}}$$

* Diese Darstellung lass uns besser die Physik von $\vec{F}_{12}$ verstehen:
  * Die Kraft wirkt in $\vec{r}_{12}$ Richtung
  * Die Kraft hängt von der Orientierung von $d\vec{r}_1$ und $d\vec{r}_2$ miteinander
  * Ganz klar $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (weil $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$). Das ist natürlich einfach actio = reactio.

• BEISPIEL



* Wir betrachten zwei parallele unendlich lange gerade Drähte (Stromfäden) (mit dem Abstand d), durch die die Stromstärke I_1 und I_2 fliessen.

(Bemerkung: Das ist eigentlich äquivalent zu zwei Stromkreisen mit unendlichen Krümmungsradius

Wir sind interessiert an der Kraft, die die Leitung ② auf eine infinitesimale Stück dz_1 der Leitung ① übt. $\Rightarrow d\vec{F}_{12}$

Nun $d\vec{r}_1 = dz_1\,\vec{e}_z$, $d\vec{r}_2 = dz_2\,\vec{e}_z$

Also:

$$d\vec{F}_{12} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \, \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \qquad \vec{r}_{12} = -d\,\vec{e}_x - (z_2 - z_1)\,\vec{e}_z$$

$$= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \, \frac{d\,\vec{e}_x + (z_2 - z_1)\,\vec{e}_z}{\left[d^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}}$$

das ist Null weil der Integral eine ungerade Funktion ist

$$= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} dz_1 \left\{ (d\,\vec{e}_x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_2}{\left[d^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}} + \vec{e}_z \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_2 \, (z_2 - z_1)}{\left[d^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}}} \right\}$$

$$\lim_{z \to \pm\infty} \frac{z}{(d^2 + z^2)^{1/2}} = \pm 1$$

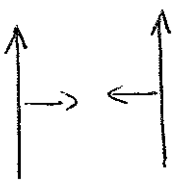
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} dz_1 (d\,\vec{e}_x) \, \frac{1}{d^2} \left[\frac{z}{(d^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dz_1 \, \vec{e}_x$$

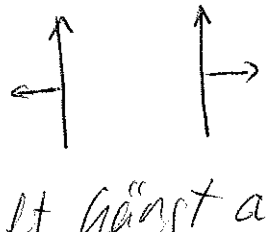
Also die <u>Kraft pro Länge</u> ist

$$\boxed{\vec{f}_{12} = \frac{d\vec{F}_{12}}{dz_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \, \vec{e}_x}$$

* Die Kraft ist also:
  * Eine <u>anziehende Kraft</u> für gleichgerichtete Ströme



  * Eine <u>abstoßende Kraft</u> für entgegengerichtete Ströme



* Die Kraft hängt also entscheidend ~~[illegible]~~ von der Orientierung der Ströme ab.

* BIOT-SAVART-GESETZ

- Wir kehren nun an der Form um $\vec{F}_{12}$ von S. 70 zurück

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{r}_1 \times \frac{(d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$= I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \left[\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right]$$

- Das bringt uns direkt zu der Idee des <u>magnetischen Induktion</u>

$$\boxed{\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}} \Rightarrow$$

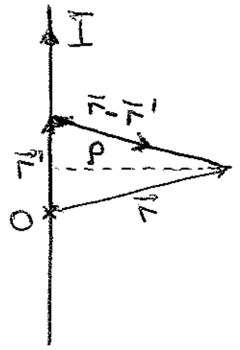
<u>BIOT-SAVART-GESETZ</u>

Das ist die magnetische Induktion, die der Strom I_2 auf C_2 erzeugt (auf der Stelle $\vec{r}_1$)

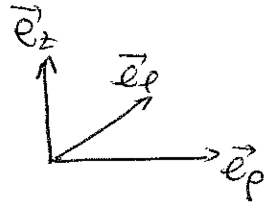
Die magnetische Induktion ist also ein <u>Vektorfeld</u>, und hat Einheiten von <u>Tesla</u> $= N/Am$

- Dann $\boxed{\vec{F}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)}$

- <u>BEISPIEL</u>: Wir nehmen einen geraden Stromfaden:

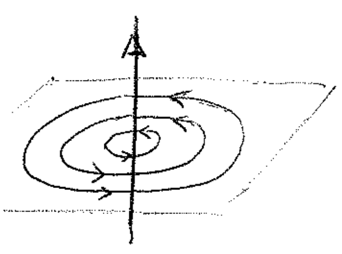


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



- In Zylinderkoordinaten:
  - $\vec{r}' = z' \vec{e}_z \longrightarrow d\vec{r}' = dz' \vec{e}_z$
  - $\vec{r}-\vec{r}' = \rho \vec{e}_\rho + (z-z')\vec{e}_z$
  - $d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = \rho\, dz'\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \rho\, dz'\, \vec{e}_\varphi$

Also: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\, dz'\, \vec{e}_\varphi}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \overset{S.72}{\downarrow} \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$



- Die $\vec{B}$-Feldlinien bauen also Kreisen. Wir werden gleich sehen, daß die $\vec{B}$-Feldlinien immer geschlossen sind (im Gegenteil zu der $\vec{E}$-Feld)

* Die Formel von $\vec{B}$ auf S. 73 ist nur für eine homogene Stromdichte ($\vec{J}\, d^3r = I\, d\vec{r}$). Wir können die Formel auf beliebige Stromdichten erweitern.

(Bemerkung: das ist etwa ähnlich wie der Übergang zwischen Punktladung und Ladungsdichte in der Elektrostatik (S. 18))

· Also anstatt $I\, d\vec{r}$ nehmen wir nun $\vec{J}(\vec{r}\,')\, d^3r'$, und damit:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}} \equiv \text{allgemeine Form des Biot-Savart-Gesetzes}$$

* Wir können nun diese Form von $\vec{B}$ mit der Form des $\vec{E}$-Feldes auf S. 18:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\, \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

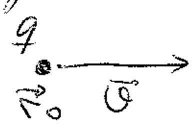
Also, es gibt eine ziemlich große Analogie zwischen Elektrostatik und Magnetostatik, aber nun anstatt $\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')$ man hat $\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')$. Es gibt andere wichtige Differenzen wie wir sofort sehen werden.

* Wir können ebenfalls die Form der Kraft von S. 73 verallgemeinern

$$\boxed{\vec{F} = \int d^3r\, \left(\vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right)}$$

* Nehmen wir zB eine Punktladung q, die sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Das verursacht eine Stromdichte (S. 67)

$$\vec{J}(\vec{r}) = q\, \vec{v}(\vec{r}_0)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$



Die bewegte Ladung spürt also eine Kraft wenn es ein ~~Magnetfeld~~ $\vec{B}$-Feld gibt:

$$\boxed{\vec{F} = q\, \vec{v}(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}_0)}$$ ← Das ist die sogen. Lorentz-Kraft

Wir werden die Lorentz-Kraft in unserer Diskussion der Elektrodynamik nochmal treffen.

* MAXWELL-GLEICHUNGEN ~~DER~~ MAGNETOSTATIK

- Auf S. 25 haben wir die Maxwell-Gleichungen der ~~E~~Elektrostatik gesehen. Nun werden wir die entsprechenden Gleichungen der Magnetostatik herleiten.

- Wir werden erstmal das Biot-Savart-Gesetz etwas umschreiben:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \qquad \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

$$= \frac{-\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \vec{J}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}_r\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \qquad \vec{J}(\vec{r}\,')\times\vec{\nabla}_r\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] =$$

$$= \vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \vec{\nabla}_r \times \vec{A}$$

(Bemerkung: Wir werden später den Vektor $\vec{A}$ genauer studieren)

- Also $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, und daher:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0} \longrightarrow \text{1. Maxwell-Gleichung der Magnetostatik}$$

- Wir können diese Gleichung in einer integralen Form umschreiben:

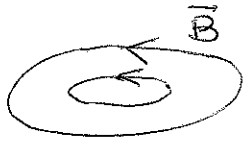
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, d^3r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß-} \\ \text{Satz}}}{=} \int_{S(V)} \vec{B}\cdot d\vec{f} \Longrightarrow \boxed{\int_{S(V)} \vec{B}\cdot d\vec{f} = 0}$$

- ~~D~~Der $\vec{B}$-Fluss durch $S(V)$ für ein beliebiges Volumen V ist also Null. Das ist Ausdruck der Tatsache, dass es keine magnetische Ladungen gibt. Das $\vec{B}$-Feld ist quellenfrei ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$).

- Das ist eine entscheidende Differenz zwischen Elektro- und Magnetostatik. Es gibt zwar freie elektrische Ladungen (und deswegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$) aber es gibt keine freie magnetische

Ladung (und deswegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$).

· Die Feldlinien sind deswegen immer geschlossen (weil es keine Quelle gibt):



[Bemerkung: für $\vec{E}$-Feld hatten wir

→ die Feldlinien hatten einen Ursprung]

* Nun haben wir eine wichtige Gleichung hergeleitet. Jetzt werden wir noch eine zweite Gleichung herleiten.

Für so was werden wir die folgende mathematische Eigenschaft benutzen. Sei $\vec{a}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Wir können immer $\vec{a}(\vec{r})$ in der Form: $\vec{a}(\vec{r})=\vec{a}_\ell(\vec{r})+\vec{a}_t(\vec{r})$ zerlegen, wobei

- $\vec{\nabla}\times\vec{a}_\ell=0 \Rightarrow \vec{a}_\ell$ ist also wirbelfrei
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_t=0 \Rightarrow \vec{a}_t$ ist also quellenfrei

Da $\vec{a}_\ell$ wirbelfrei ist, dann können wir immer eine Skalar Funktion $\alpha(\vec{r})$ finden, solch dass $\vec{a}_\ell=\vec{\nabla}\alpha(\vec{r})$, wobei $\alpha(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{a}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

Da $\vec{a}_t$ quellenfrei ist, dann können wir immer ein Vektorfeld $\vec{\beta}(\vec{r})$ finden, solch dass $\vec{a}_t=\vec{\nabla}\times\vec{\beta}(\vec{r})$, wobei $\vec{\beta}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}\times\vec{a}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

* Wir werden nun diese Eigenschaft anwenden. Nun $\vec{a}=\vec{B}(\vec{r})$.

Da $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{a}_t=\vec{B}$, also

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

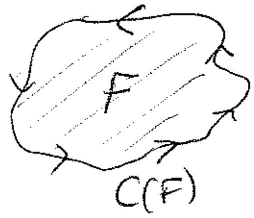
aber andererseits:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

Daher:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}} \longrightarrow$$ 2. Maxwell-gleichung der Magnetostatik

· Wir können diese gleichung auch in einer integralen Form umschreiben. Wir nehmen eine Fläche F und die entsprechende Randkurve C(F).



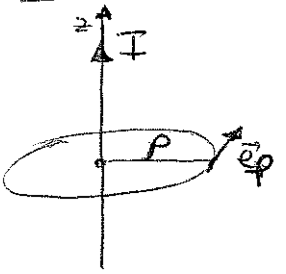
$$\oint_{C(F)} \vec{B}\cdot d\vec{r} \underset{\text{Stokes-Satz}}{=} \int_F (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{f} = \mu_0\int_F \vec{J}\cdot d\vec{f} = \mu_0 I$$

also: $$\boxed{\oint_{C(F)} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I} \longrightarrow$$ Ampère-Durchflutungsgesetz

· Bemerkung: dies Gesetz spielt eine ähnliche Rolle wie das Gauss-Satz für die Elektrostatik (S. 24))

· Also, wenn wir den Strom I durch eine Fläche kennen, dann kennen wir $\vec{B}$ am Rand der Fläche!

• BEISPIEL:



· Wir nehmen noch mal den Beispiel von S. 73.

· Aus Biot und Savart kennen wir, dass das $\vec{B}$-Feld geht in $\vec{e}_\varphi$ Richtung.

Ausserdem wegen Symmetrie, $\vec{B} = \vec{B}(\rho)$

· Wir nehmen ein Kreis von Radius ρ um die Stromlinie.

Dann: $$\mu_0 I = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \oint_C B(\rho)\,\vec{e}_\varphi\cdot(dr\,\vec{e}_\varphi) \underset{dr=\rho d\theta}{=} \oint_C B(\rho)\,d\theta\,\rho$$

$$= B(\rho)\,\rho\, 2\pi \longrightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi}$$

· Genau was wir auf S. 73 bekommen haben.

· Also das Ampère-Durchflutungsgesetz und ein Paar Symmetrie-Überlegungen können uns wirklich viele Rechnungen sparen!

* VEKTORPOTENTIAL

· Auf S. 75 haben wir gesehen, daß

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

wobei $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$ → Das ist das sogenannte <u>Vektorpotential</u>

· Das Vektorpotential spielt in der Magnetostatik eine ähnliche Rolle wie das Skalarpotential in der Elektrostatik. Eigentlich $\vec{A}$ und φ sehen ziemlich ähnlich aus. Ich erinnere euch, dass

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

· Das Vektorpotential ist durch den obigen Ansatz allerdings nicht eindeutig bestimmt. Die physikalisch relevante Feldgröße ist $\vec{B}$ und nicht $\vec{A}$. Man kann eine Transformation:

$$\vec{A} \Longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

machen, wobei $\chi(\vec{r})$ eine beliebige skalare Funktion ist.

Dann $\vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \cancelto{0}{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\chi)} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$

Also beide $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ ergeben dieselbe Physik, d.h. dasselbe $\vec{B}$.

· Das ist ein Beispiel einer sogen. <u>Eichtransformation</u>

(Bemerkung: noch eine Eichtransformation wäre z.B. in der Elektrostatik $\varphi(\vec{r}) \longrightarrow \varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \text{KONSTANTE}$, dann $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}\varphi'$. Eichtransformationen spielen eine sehr bedeutende Rolle in der Physik. Wir werden mehr über diese Transformationen in unserer Diskussion der Elektrodynamik lernen).

· Häufig nimmt man $\vec{A}$ solch dass $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$ ⇒ <u>COULOMB-EICHUNG</u>

Dann $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A}$

und dann $\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$ → POISSON-GLEICHUNG DER MAGNETOSTATIK

* Diese Gleichung spielt eine ähnliche Rolle in der Magnetostatik wie die Poisson-Gleichung in der Elektrostatik.

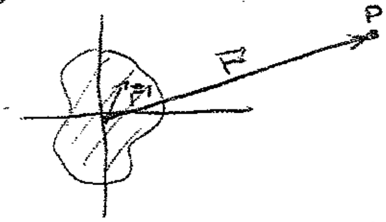
Also man kennt $\vec{J}(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$, und Randbedingungen auf $S(V)$ und man will $\vec{A}(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$. (ähnlich wie in der E-Statik (S. 36))

---

* MULTIPOLENTWICKLUNG

* Auf S. 32 haben wir die Multipolentwicklung des φ-Feldes einer Ladungsverteilung eingeführt. Wir werden nun etwas ähnliches für den Potentialvektor $\vec{A}$ einer Stromdichteverteilung machen.

* Sei $\vec{J}(\vec{r})$ eine Stromdichteverteilung, die auf einem endlichen Raumbereich begrenzt ist. Diese Stromdichte verursacht eine magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$. Wir sind interessiert an Punkte P, solch daß $\vec{r}$ ist viel größer als die Ausdehnung des Gebietes, wo $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$.



* Wir haben gesehen (S. 78) daß $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Wie für die Multipolentwicklung des skalaren Potentials, wir Taylor-entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \dots$$

Also:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3r' \vec{J}(\vec{r}')}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r' (\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')}_{\text{Dipol}} + \dots$$

* Wir werden nun sehen, daß der Monopolglied eigentlich Null ist.

* Dafür brauchen wir erstmal folgendes zu beweisen.
Seien $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ skalare Felder. Sei $\vec{J}(\vec{r})$ die Stromdichte eines magnetostatischen Systems (in Magnetostatik $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \underbrace{\frac{d\rho(\vec{r})}{dt} = 0}_{\text{Magnetostatik}}$) (S. 68)

Dann:

$$\int d^3r \left[f(\vec{r})\, \vec{J}\cdot\vec{\nabla} g + g(\vec{r})\, \vec{J}\cdot\vec{\nabla} f \right] = 0$$

Das ist sehr einfach zu beweisen:

$$\vec{\nabla}[gf\vec{J}] = (gf)\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\vec{J}}}_{0} + \vec{J}\cdot\vec{\nabla}(gf) = f(\vec{r})\vec{J}\cdot\vec{\nabla} g + g(\vec{r})\,\vec{J}\cdot\vec{\nabla} f$$

Also

$$\int d^3r \left[f\, \vec{J}\cdot\vec{\nabla} g + g\, \vec{J}\cdot\vec{\nabla} f \right] = \int_{r=\infty} \vec{\nabla}(gf\vec{J})\, d^3r \overset{\text{gauß-Satz}}{=} \int_{S(V)\to\infty} d\vec{f}\, (gf\vec{J}) \underset{\vec{J}=0 \text{ in } \infty}{=} 0$$

- Dieser Ausdruck ist sehr nützlich.
- Sei $f = 1$, und $g = x, y$ oder z.

Dann
$$\left.\begin{aligned} \int d^3r\, j_x &= 0 \\ \int d^3r\, j_y &= 0 \\ \int d^3r\, j_z &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\int d^3r'\, \vec{J}(\vec{r}) = 0}$$

Also der Monopolterm verschwindet!

* Das ist eine extrem wichtige Differenz zwischen Elektrostatik und Magnetostatik. Es gibt elektrische Ladungen, aber keine magnetische Ladung! (sowas haben wir schon auf S. 75 diskutiert)

* Quellen wir nun den Dipolterm: $A(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int d^3r'(\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')$
- Wir nehmen nun oben: $f = x_i$, $g = x_j$ wobei $x_i, x_j = \{x, y, z\}$

$$0 = \int d^3r \left[x_i\, j_j + x_j\, j_i \right] \longrightarrow \int d^3r\, x_j j_i = -\int d^3r\, x_i j_j$$

• Also $\int d^3r' \, (\vec{r}\cdot\vec{r}')\, j_i(\vec{r}') = \sum_j \int d^3r' \, x_j x'_j \, j_i$

$$= \frac{1}{2}\sum_j x_j \left\{ \int d^3r' \, x'_j j_i + \int d^3r' \, x'_j j_i \right\} \overset{\int d^3r' x'_j j_i = -\int d^3r' x'_i j_j}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j x_j \left\{ \int d^3r' \, x'_j j_i - \int d^3r' \, x'_i j_j \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j x_j \int d^3r' \, (x'_j j_i - x'_i j_j) = -\frac{1}{2}\sum_{jk} x_j \int d^3r' \, (\vec{r}'\times\vec{j})_k \varepsilon_{ijk}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\vec{r}\times\left[\int d^3r' \, (\vec{r}'\times\vec{j})\right]$$

Wir definieren nun $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')}$ ≡ *Magnetisches Moment*

($\vec{m}$ spielt eine ähnliche Rolle wie das Dipolmoment $\vec{p}$ für die Elektrostatik (S. 32))

• Dann $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$ → Vektorpotential bzw. zum Dipolterm.

• Wir werden uns hier auf dieser Ordnung beschränken.

• Nun kennen wir $\vec{A}$. Wir wollen aber $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] \overset{\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\vec{\nabla}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{\nabla}\varphi}{=}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r^3}\,\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r}) - (\vec{m}\times\vec{r})\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\} \overset{\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})}{=}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r^3}\left[\cancel{(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{m}} - (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} + \vec{m}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{m})\right] + \frac{3}{r^5}(\vec{m}\times\vec{r})\times\vec{r}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{1}{r^3}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} + \frac{1}{r^3}\vec{m}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - \frac{3}{r^5}\left[\vec{m}\,r^2 - \vec{r}\,(\vec{m}\cdot\vec{r})\right]\right\} \overset{(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{m},\ \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3}{=}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5}\,\vec{r}\,(\vec{m}\cdot\vec{r})\right]$$

Also $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]}$

Das hat genau dieselbe Form wie das $\vec{E}$-Feld eines elektrostatischen Dipols (S. 28)

* Also $\vec{B}(\vec{r})$ induziert von der Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ verhält sich (weit entfernt von $\vec{j}$) wie ein Dipolfeld. mit Dipolmoment $\vec{m}$.

Also, <u>die Grundeinheit des Magnetismus ist nicht irgendeine Elementarladung (kein Monopol), sondern der magnetische Dipol $\vec{m}$.</u> (!!)

• <u>Gyromagnetisches Verhältnis: Beziehung zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls</u>

• Nehmen wir nun eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an, die durch eine Anzahl von Ladungen (mit Ladung q) hervorgerufen wird. Die i-te Ladung bewegt sich zur Zeit t am Ort $\vec{R}_i(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$.

Dann $\quad \vec{J}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \, \delta(\vec{r}-\vec{R}_i)$

Also der magnetische Moment dieser Stromdichte ist:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r \, [\vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})] =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3r \, \vec{r}\times\left[q \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \, \delta(\vec{r}-\vec{R}_i)\right]$$
$$= \frac{q}{2}\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i\times\vec{v}_i \underset{\uparrow}{=} \frac{q}{2M}\left[\sum_{i=1}^{N} M\,\vec{R}_i\times\vec{v}_i\right] = \frac{q}{2M}\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i$$

Drehimpuls des i-ten Teilchens

$M \equiv$ Masse des Teilchen
(alle haben dieselbe Masse)

• Also $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i \equiv$ Gesamtdrehimpuls des Ladungssystems

Also es gibt eine <u>Beziehung zwischen magnetischem Moment und Gesamtdrehimpuls der Ladungen</u>:

$$\vec{m} = \underbrace{\left(\frac{q}{2M}\right)}\vec{L}$$

↳ Das ist das sogen. <u>gyromagnetische Verhältnis</u>.

* Die Idee, daß ein Ladungssystem mit Drehimpuls ein magnetischen Moment verursacht, ist <u>extrem wichtig</u>! Diese Idee bleibt

bis in der <u>Quantenmechanik</u> gültig!
In der Quantenmechanik wird Ihr lernen, daß assoziiert mit dem <u>Bahndrehimpuls</u> (und auch dem sogen. <u>Spin</u>) des Elektrons gibt es ein magnetischer Moment.

• <u>Kraft auf einem magnetischen Dipol: Potentielle Energie</u>

Auf S. 74 haben wir gesehen, daß ein $\vec{B}$-Feld übt eine Kraft

$$\vec{F} = \int [\vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]\, d^3r$$

auf ~~einem~~ Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$.

(um $\vec{r}=0$)

• Sagen wir nun, daß $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ nur auf einem kleinen Gebiet; Klein genug so daß $\vec{B}(\vec{r})$ auf diesem Gebiet sich nur wenig ändert.

Wir Taylor-entwickeln:

$$\vec{B}(\vec{r}) \simeq \vec{B}(0) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{B}(\vec{r})\big|_{\vec{r}=0} + \cdots$$

Dann

$$\vec{F} \cong \underbrace{\left[\int \vec{J}(\vec{r})\, d^3r\right]}_{\substack{\parallel \leftarrow \text{S. } 80 \\ 0}} \times \vec{B}(0) + \int [\vec{J}(\vec{r}) \times (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(0)]\, d^3r + \cdots$$

Beliebig $\vec{a}$

$$\int d^3r'\, (\vec{a}\cdot\vec{r}')\,\vec{J}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}\left\{\vec{a} \times \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}'))\right\}$$

hier $\vec{a} = \vec{\nabla} B_j(0)$

$$\int d^3r\, (\vec{\nabla}B_j(0))\cdot\vec{r}\, j_K(\vec{r}) =$$
$$= \left[\int d^3r\, ((\vec{\nabla}B_j)\cdot\vec{r})\,\vec{J}(\vec{r})\right]_K =$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{(\vec{\nabla}B_j) \times \int d^3r\, (\vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\right\}_K$$

Also die i-Komponente der Kraft ist

$$F_i \simeq -\int d^3r\, \left[(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(0) \times \vec{J}(\vec{r})\right]_i$$

$$= -\sum_{j,K} \int d^3r\, \left[\varepsilon_{ijK} [(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})B_j(0)]\, j_K(\vec{r})\right]$$

$$= -\sum_{j,K} \varepsilon_{ijK} \left[\int d^3r\, \vec{r}\, j_K(\vec{r})\right]\cdot(\vec{\nabla}B_j(0)) \stackrel{!}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,K} \varepsilon_{ijK} \left\{(\vec{\nabla}B_j(0)) \times \left[\int d^3r\, \vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\right]\right\}_K$$

$$= -\sum_{j,K} \varepsilon_{ijK} \left\{\underbrace{\left[\frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\right]}_{\vec{m}} \times (\vec{\nabla}B_j(0))\right\}_K =$$

$$= -\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left[\vec{m} \times \vec{\nabla} B_j(0)\right]_k = -\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left[\vec{m} \times \vec{\nabla}\right]_k B_j(0)$$

$$= -\sum_{jk} \varepsilon_{ikj} (\vec{m} \times \vec{\nabla})_j B_k(0) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\vec{m} \times \vec{\nabla})_j B_k(0) = \left[(\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}(0)\right]_i$$

Also $\vec{F} \simeq (\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}(0)$

$$= -\vec{m} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0))}_{\overset{\text{s. } 75}{=} 0} + \vec{\nabla}\left[\vec{m} \cdot \vec{B}(0)\right]$$

Also $\boxed{\vec{F} \simeq \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}(0))}$

* ganz klar ist diese Kraft konservativ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, wobei dieser Ausdruck eine potentielle Energie V definiert:

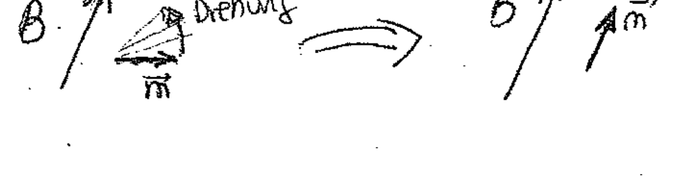
$$\boxed{V = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

(Bemerkung: in der Elektrostatik war es irgendwie ähnlich (s. 29). Da hatten wir $V = -\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})$ für den elektrischen Dipol $\vec{p}$).

* Also nun haben wir die potentielle Energie, die ein $\vec{B}$-Feld auf einen Dipol $\vec{m}$ verursacht.

Ganz klar minimiert der Dipol die potentielle Energie wenn $\vec{m}$ parallel zu $\vec{B}$ ist. Also ganz genau wie auf S. 29 mit dem elektrischen Dipol $\vec{p}$ und dem $\vec{E}$-Feld.

(Bemerkung: Auch wie auf S. 29 können wir finden, daß der Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \simeq \vec{m} \times \vec{B}(0)$. Für die Elektrostatik hatten wir $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. Also $\vec{M} = 0$ nur wenn $\vec{m}$ parallel zu $\vec{B}$ ist.



)

• Magnetostatik in der Materie

• Bisher haben wir nur Stromdichten $\vec{j}(\vec{r})$ im Vakuum studiert. Wir werden nun die Magnetostatik in der Materie studieren. Die Überlegungen sind ähnlich wie in der Elektrostatik der Materie (S. 57). In der Elektrostatik der Materie erzeugten die äußere Felder eine Umverteilung der Ladungen, die einer Polarisation (makroskopisches Dipolmoment) verursachte.
In der Magnetostatik erzeugen die äußere Felder eine Umverteilung der Ströme, und daher auch zusätzliche Felder. Gucken wir das ein bisschen genauer.

• Wie für die Elektrostatik nehmen wir erstmal an, dass die Maxwell-gleichungen des Vakuums mikroskopisch universell gelten:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{b}=0\\ \vec{\nabla}\times\vec{b}=\mu_0\vec{j}_m\end{array}\right\rangle$$

wobei $\vec{b}$ die mikroskopische Induktion ist, und $\vec{j}_m$ die mikroskopische Stromdichte ist.

Wie für die Elektrostatik sind wir an Durchschnittsgrößen interessiert

$$\vec{B}(\vec{r})=\overline{\vec{b}(\vec{r})}$$

Durchschnitt innerhalb eines Volumens $V(\vec{r})$ (mikroskopisch groß, makroskopisch sehr klein) (S. 58)

• Die erste Maxwell-gleichung ist unproblematisch, da Durchschnitt und Ableitung können umgetauscht werden:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0}$$

• Die 2. Maxwell-gleichung verlangt mehr Mühe. Erstmal gucken wir was $\vec{j}_m$ ist:

* Beitrag der freien Ladungen: $\vec{J}_f = \overline{\rho_f \, \vec{v}}$

* Beitrag der gebunden Ladungen

* Stromdichte der Polarisationsladungen (S. 62)

Polarisations-dichte $\longrightarrow \rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

Kontinuitäts-gleichung $\Big\rangle \; \frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_P = 0 \Rightarrow \vec{J}_P = \frac{\partial}{\partial t} P$

Das spielt keine Rolle in der Magnetostatik
(in der Statik gibt es keine Zeitabhängigkeit)

(Bemerkung: Das spielt aber eine bedeutende Rolle in der Elektrodynamik, wie wir bald sehen werden.)

* Magnetisierungsstromdichte

· Die wird von der Bewegung der Atomelektronen (um den Kernen) auf ihren stationären Bahnen verursacht

· Aus unserer Diskussion der S. 82 haben wir gesehen das so eine Bewegung kleine magnetische Momente verursacht. Die werden wegen des äußeren Feldes orientiert (S. 84) und daher wird ein Zusatzfeld verursacht (S. 81)

· Dieses Zusatzfeld stellen wir uns durch einen Strom $\vec{J}^{(i)}_{mag}$ vor.

$\left(\vec{m}_i = \frac{1}{2}\int d^3r\, (\vec{r}-\vec{R}_i)\times \vec{J}^{(i)}_{mag}(\vec{r})\right.$, wobei $\vec{R}_i$ der Ort des i^{ten} Dipols ist).

S. 81

Diese Magnetisierungs-Stromdichte spielt hier eine entscheidende Rolle. Wie immer sind wir an Durchschnitte interessiert. Der Durchschnitt von $\vec{J}^{(i)}_{mag}$ kann in einer einfachen Form ausgedrückt werden:

$$\vec{J}_{max}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})$$

wobei $\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{V(\vec{r})} \sum_{i \in V(\vec{r})} \vec{m}_i \Longrightarrow$ Magnetisierung

(Magnetischer Moment pro Volumen)

(Bemerkung: die Magnetisierung spielt hier eine ähnliche Rolle wie die Polarisation in der Elektrostatik. Ich erinnere euch (S. 60), dass $\vec{P}$ als die elektrische Dipolmomente pro Volumen definiert wird.)

· Nun können wir die 2. Maxwell-gleichung in der Materie schreiben:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_m = \mu_0 \left[\vec{J}_f + \vec{J}_P + \vec{J}_{mag} \right] = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

In der Magnetostatik $\partial \vec{P}/\partial t = 0$, und daher (von nun an $\vec{J} = \vec{J}_f$):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \rightarrow \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right] = \vec{J}$$

· Das bringt uns direkt an der Definition vom Magnetfeld

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}$$

Also: $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}}$ → 2. Maxwell-gleichung der Magnetostatik in der Materie.

(und daher, wie auf S. 77 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$)

· $\vec{H}$ ist also nur vom freien Strom verursacht, $\vec{B}$ dagegen vom tatsächlichen Strom (das ist ähnlich wie $\vec{D}$ und $\vec{E}$ in der Elektrostatik (S. 62)).

- In der Elektrostatik hatten wir eine Beziehung zwischen Polarisation ($\vec{P}$) und $\vec{E}$-Feld. Für isotropen, linearen Media hatten wir $\vec{P} = \gamma \vec{E}$ (S. 64).

Nun gibt es eine ähnliche Beziehung zwischen Magnetisierung ($\vec{M}$) und Magnetfeld ($\vec{H}$):

$$\boxed{\vec{M} = \chi_M \vec{H}} \quad (\chi_m \equiv \underline{\text{magnetische Suszeptibilität}})$$

(<u>Bemerkung</u>: im allgemeinen $\vec{M} = \hat{\chi} \cdot \vec{H}$, wobei $\hat{\chi}$ eine Matrix ist)

- Also:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_M)}_{\mu_r \,\equiv\, \underline{\text{relative Permeabilität}}} \vec{H}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}}$$

(<u>Bemerkung</u>: im Vakuum $\mu_r = 1$ und daher $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$)

- Im Unterschied zur elektrischen Suszeptibilität χ_e (S. 64), kann die magnetische Suszeptibilität <u>positiv aber auch negativ sein</u>.

- Ein Material ist <u>diamagnetisch</u> wenn $\chi_M < 0$.

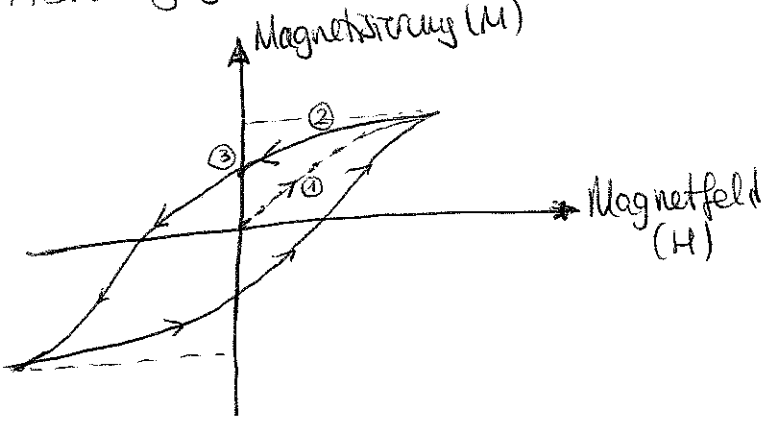
Diamagnete enthalten keine permanenten magnetischen Dipole. Wenn ein äußeres Feld auf dem Material einwirkt, wird ein magnetisches Moment induziert, welches dem von außen angelegten magnetischen Feld entgegengesetzt ist (und daher $\chi_M < 0$).

Interessanterweise heißt das, dass ein Diamagnet in Richtung niedrigerer Feldstärke strebt. Typischerweise ist $|\chi_M|$ sehr klein, aber für <u>Supraleitern</u> ist $\chi_M = -1$ (perfekte Diamagnete). D.h. Supraleitern stoßen die Magnetfeldlinien ab (das ist das sogen. <u>Meissner-Effekt</u>). Deswegen <u>schwebt</u> ein Supraleiter über ein Magnet (!!)

* Paramagnetische Materialien haben dagegen permanente magnetische Dipolen, die im Feld ausgerichtet werden (S. 84) (also $\chi_M > 0$)
Diese Ausrichtungstendenz steht die Unordnungstendenz der thermischen Bewegung entgegen (ich erinnere euch an unserer Diskussion der Paraelektrika von S. 63). Daher $\chi_M = \chi_M(T)$.

* Ferromagnetische Materialien zeigen unter einer gewissen Temperatur ($T_C \equiv$ Curie-Temperatur) Dipolausrichtung sogar wenn es kein äußeres Magnetfeld gibt. (z.B. Eisen ist ferromagnetisch für $T < T_C = 1043\,°K$)

(Bemerkung: Interessanterweise zeigen Ferromagneten eine starke Abhängigkeit von der Vorbehandlung des Materials (Hysteresekurve)



* Man nimmt z.B. ein Stück Eisen.
* Ein Magnetfeld wird eingeschaltet (Kurve ①)
* Das Magnetfeld wird ausgeschaltet (Kurve ②)
* Nun für $H=0$ (Punkt ③) gibt es eine Magnetisierung $M \neq 0$.

Das ist die sogen. Remanenz → man hat ein Permanentmagnet
Für Paramagneten thermische Fluktuationen würden M zerstören.
Aber nicht für Ferromagneten!
• So wird eine Stück Eisen magnetisiert. So lange $T < T_C$ bleibt diese Stück Eisen ein Magnet!
• Das spielt natürlich eine wichtige Rolle in Magnetbänder.

Feldverhalten an Grenzflächen

- Auf S. 39 haben wir studiert, was passiert mit dem $\vec{E}$-Feld an Grenzflächen. Wir können etwas ähnliches machen, aber diesmal mit $\vec{B}$ und $\vec{H}$.

- Die Maxwell-gleichungen der Magnetostatik sind

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}&=0\\ \vec{\nabla}\times\vec{H}&=\vec{J}\end{aligned}\right\}$$

Genau wie für die Elektrostatik, können wir aus der Maxwell-gleichungen das Feldverhalten an Grenzflächen bestimmen.

- Wie für unsere Diskussion der Elektrostatik, benutzen wir den Gauß- und Stokes-Satz.

Gauß-Kästchen (wie auf S. 40)

$$0=\int_{\Delta V} d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Gauß-}\\ \text{-Satz}}}{=} \int_{S(\Delta V)} d\vec{f}\cdot\vec{B} \underset{\substack{\uparrow\\ \Delta x\to 0}}{=} \Delta f\;\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)$$

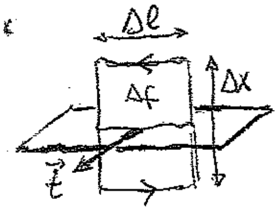
Dann $\boxed{\vec{B}_2\cdot\vec{n}=\vec{B}_1\cdot\vec{n}}$

Die Normalkomponente der magnetischen Induktion ist an der Grenzfläche stetig.

Bei unterschiedlichen Permeabilitäten $\mu_r^{(1)},\mu_r^{(2)}$

$$\vec{n}\cdot\vec{H}_2=(\mu_0\mu_r^{(2)})^{-1}(\vec{n}\cdot\vec{B}_2)=(\mu_0\mu_r^{(2)})^{-1}(\vec{n}\cdot\vec{B}_1)=\left(\mu_r^{(1)}/\mu_r^{(2)}\right)(\vec{n}\cdot\vec{H}_1)$$

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{H}_2=\frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}}\,\vec{n}\cdot\vec{H}_1}\longrightarrow \vec{n}\cdot\vec{H} \text{ ist also } \underline{\text{nicht immer}} \text{ stetig}$$



$\vec{J}_F$ = Flächenstromdichte

$$\int_{\Delta f} d\vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})=\int_{\Delta f} d\vec{f}\cdot\vec{J}\overset{\substack{\Delta x\to 0\\ \downarrow}}{=}(\vec{J}_F\cdot\vec{t})\,\Delta l$$

$\| \leftarrow$ Stokes-Satz

$$\oint_C d\vec{s}\cdot\vec{H}\underset{\substack{\uparrow\\ \Delta x\to 0}}{=}\Delta l\,(\vec{t}\times\vec{n})\cdot(\vec{H}_2-\vec{H}_1)$$

$$\boxed{(\vec{t}\times\vec{n})\cdot(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_F\cdot\vec{t}}$$

Nur wenn $\vec{J}_F\cdot\vec{t}=0$ ist die tangentielle Komponente von $\vec{H}$ stetig.

Aber selbst für $\vec{J}_F\cdot\vec{t}=0$ ist $\vec{B}$ nicht unbedingt stetig ~~[illegible]~~ da

$$\boxed{\vec{B}_2\cdot(\vec{t}\times\vec{n})=\left(\frac{\mu_r^{(2)}}{\mu_r^{(1)}}\right)\vec{B}_1\cdot(\vec{t}\times\vec{n})\qquad(\text{wenn } \vec{J}_F\cdot\vec{t}=0)}$$

Damit ist unsere Diskussion der Magnetostatik am Ende. Wie Ihr seht, Elektrostatik und Magnetostatik laufen irgendwie parallel zueinander. Sofort werden wir $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einer einzigen Theorie zusammen beschreiben.