• Relativistische Quantenmechanik

* Wir werden in den nächsten Vorlesungen sehen, wie man spezielle Relativitätstheorie und Quantenmechanik kombiniert (bisher haben wir in QM-I die Quantenmechanik ohne Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie studiert.)
* Wir werden erstmals mit einer Auffrischung der speziellen Relativitätstheorie anfangen. Später werden wir die Klein-Gordon-Gleichung und die Dirac-Gleichung einführen. Dann werden wir einige wichtige Eigenschaften der Dirac-Gleichung untersuchen, und auch einige wichtige Anwendungen (Wasserstoffatom).

* Auffrischung der speziellen Relativitätstheorie

* Wir werden erstmals die relativistische Notation auffrischen. Wir werden später diese geeignete Notation anwenden, um relativistische Ausdrücke effizient schreiben zu können.
* Die erste wichtige Idee ist die um Kontravarianten Vierervektor

$$X = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longrightarrow \underline{\text{Raum-Zeit-Punkt}}$$

wobei $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$

(Bemerkung: Indizes oben! Von nun an griechische Indizes $\mu, \nu, \rho, \ldots$ gehen um $0, \ldots, 3$)

* Wir können ebenfalls den Kovarianten Vierervektor definieren:

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \text{(Bemerkung: Indizes unten!)}$$

wobei $x_0 = ct$ und $x_1 = -x$, $x_2 = -y$, $x_3 = -z$

• Es ist klar, dass $x_0 = x^0$, und $x_k = -x^k$

(Bemerkung: lateinische Indizes $i, j, k, \ldots$ die gehen um ~~1~~ bis 3)

* Wir führen nun den metrischen Tensor:

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (Minkowski-Metrik)

solch daß, $\boxed{a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu}$ für alle Vierervektoren a.

(Bemerkung: Wir folgen hier die Einsteinsche Summationskonvention:

$g_{\mu\nu} a^\nu \equiv \sum_\nu g_{\mu\nu} a^\nu$)

(Bemerkung II: in der allgemeinen Relativitätstheorie wird $g_{\mu\nu}$ von der lokalen Energiedichte (Einsteinsgleichungen) abhängig, aber hier betrachten wir nur die spezielle Relativitätstheorie).

* Auch wichtig ist die Definition des Skalarprodukts der Vierervektoren. Man definiert den Skalarprodukt

Seien a und b 2 Vierervektoren.

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

(Bemerkung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_k a^k b^k \longrightarrow$ der "normale" Skalarprodukt von 2 3D-Vektoren)

Dann:

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \sum_k a^k b^k = a_0 b_0 - \sum_k a_k b_k$$

* So können wir auch die Norm eines Vierervektors definieren

$$a^2 = a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - (\vec{a})^2$$

* Gucken wir nur die Differentialoperatoren

- Kovarianter Gradient: $(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$
- Kontravarianter Gradient: $(\partial^\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right)$

- D'Alembert Operator: $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2}$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

* Besonders wichtig ist auch die Idee um Lorentz-Transformation

Nehmen wir 2 Inertialsysteme mit gleich orientierten Koordinaten-systemen, die sich nur durch eine relative Geschwindigkeit v entlang z.B. die x-Richtung) unterscheiden.

(Bemerkung: Ich erinnere euch aus der klassischen Mechanik, dass ein Inertialsystem ein Bezugssystem ist, in dem sich kräftefreie Teilchen gleichförmig bewegen.)

Das Relativitätsprinzip sagt uns, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen von gleicher Form sind. Wir wissen auch, dass die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum zu allen Zeiten und auf allen Orten den konstanten Wert c hat.

Das führt zu der Bedingung:

$$\boxed{x^2 = (x')^2}$$

wobei $\boxed{(x')^\mu = L^\mu_{\ \lambda}\,(x)^\lambda}$

$(x')^\mu$: Koordinaten im Bezugssystem S'

$L^\mu_{\ \lambda}$: Transformationsmatrix

$(x)^\lambda$: Koordinaten im Bezugssystem S

* Die Bedingung $x^2 = (x')^2$ führt zu der Form der Transformationsmatrix:

$$\boxed{L^\mu_{\ \lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Longrightarrow \text{Lorentz-Transformation}$$

wobei $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$\beta \equiv v/c$

(Bemerkung: Ich werde hier die Herleitung nicht machen. Einzelheiten findet Ihr z.B. auf meinen Notizen um Klassischen Teilchen und Felder WS 08/09, S. 209-211)

* Es ist ganz einfach zu sehen, dass

$$\underbrace{(a')\cdot(b') = (a)\cdot(b)} \qquad \text{und} \qquad L^T g L = g$$

↳ Die Lorentz-Transformation erhaltet den Skalarprodukt von 2 Vierervektoren.

(Bemerkung: da $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ eine Skalarprodukt von 2 Vierervektoren ist, dann $\Box$ Lorentz-invariant ist.)

* Es ist ganz einfach zu ~~beweisen~~, dass die Elektrodynamik schon Lorentzinvariant ist. Quellen wir es ganz kurz:
Quellen wir erstmals die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik

$$\vec\nabla\cdot\vec J + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec J + \frac{\partial}{\partial(ct)}(c\rho) = 0$$

Sei $\boxed{(j^\mu) = (j^0 \equiv c\rho,\ j^1 \equiv j_x,\ j^2 \equiv j_y,\ j^3 \equiv j_z)}$ → Viererstromdichte

Da $\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec\nabla\right)$ (S. 52) dann können wir die Kontinuitätsgleichung als ein Skalarprodukt (und daher Lorentzinvariant) darstellen:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

* Seien φ und $\vec A$ → Skalar- und Vektorpotentiale.

Sei $(A^\mu) = (A^0 \equiv \varphi/c,\ A^1 \equiv A_x,\ A^2 \equiv A_y,\ A^3 \equiv A_z)$

Wir nehmen die Lorentz-Eichung: $\vec\nabla\cdot\vec A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \partial_\mu A^\mu = 0$

(daher auch Lorentz-invariant). Mit dieser Eichung

$$\left.\begin{aligned} \Box\vec A &= -\mu_0 \vec J \\ \Box\left(\frac{\varphi}{c}\right) &= -\mu_0 (c\rho) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu} \Rightarrow$$

Maxwell-gleichungen in einer Kovarianten Form.

* Die Maxwell-Gleichungen (und daher die Elektrodynamik) sind also schon Lorentz-invariant. Die Newton-Mechanik ist dagegen Galilei-invariant. Die spezielle Relativitätstheorie führt dann zu einer inhaltigen Änderung der Mechanik
$\longrightarrow$ relativistische Mechanik.

* Die 4-Geschwindigkeit (u^μ) eines Massenpunktes erhält man als Veränderung des Ereignisvektors (x^μ) bezogen auf die Eigenzeit (τ)

Bemerkung: Die Eigenzeit, τ, ist die Zeit im Ruhensystems des Massenpunkten. Die Lorentztransformation ergibt $dt = \gamma d\tau$ für die Beziehung zwischen Eigenzeit und die Zeit in anderen Bezugssystem (Zeitdilatation))

Dann
$$(u^\mu) = \frac{d}{d\tau}(x^\mu) = \gamma \frac{d}{dt}[ct, x, y, z] = \gamma\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \gamma(c, \vec{v})$$

Dann
$$u^0 \equiv \gamma c$$
$$u^1 \equiv \gamma \frac{dx}{dt} \; ; \; u^2 \equiv \gamma \frac{dy}{dt} \; ; \; u^3 \equiv \gamma \frac{dz}{dt}$$

Bemerkung: $(u)^2 = u_\mu u^\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 \longrightarrow$ Lorentz-invariant

* Für den 4-Impuls setzt man an:
$$(p^\mu) = m_0 (u^\mu) = m_0 \gamma (c, \vec{v}) = (p^0, \vec{p})$$

zur Identifikation von m_0 betrachten wir den Grenzfall $v \ll c$
$\longrightarrow \gamma \simeq 1 \longrightarrow (p^\mu) = (m_0 c, m_0 \vec{v}) \longrightarrow$ m_0 ist also die Ruhemasse des Massenpunktes.

Im Gegensatz dazu ist
$$m(v) = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
die relativistische Masse

(Bemerkung: $p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2$)

* In der Newton-Mechanik hatten wir $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$, wir können nun ähnlicherweise die 4-Kraft definieren als:

$$(K^\mu) \equiv \frac{d}{d\tau} p^\mu = \gamma \frac{d}{dt} p^\mu = \left(K^0 \equiv \gamma \frac{dp^0}{dt}, \vec{K} \equiv \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

* gucken wir nun den Skalarprodukt

$$\begin{aligned} u_\mu K^\mu &= u_0 K^0 + u_j K^j = u^0 K^0 - \vec{u}\cdot\vec{K} \\ &= u^0 \frac{d}{d\tau}[m_0 u^0] - \vec{u}\frac{d}{d\tau}[m_0 \vec{u}] = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{m_0}{2}\left((u^0)^2 - \vec{u}\cdot\vec{u} \right)\right] \\ &= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2m_0} p_\mu p^\mu\right] = \frac{d}{d\tau}\Big[\underbrace{\frac{m_0 c^2}{2}}_{\text{konstant}}\Big] = 0 \end{aligned}$$

Andererseits:

$$u_\mu K^\mu = u^0 K^0 - \vec{u}\cdot\vec{K} = -\gamma c K^0 + \gamma \vec{v}\cdot\gamma\vec{F}$$

Dann $K^0 = \frac{\gamma}{c}(\vec{F}\cdot\vec{v})$

Ich erinnere euch, dass $\vec{F}\cdot\vec{v} \equiv$ die Leistung $\equiv \frac{d}{dt} T$ kinetische Energie

$$\left.\begin{aligned} &\text{Dann} \quad K^0 = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt} T \\ &\text{Aber} \quad K^0 = \frac{d}{d\tau} p^0 = \gamma \frac{d}{dt}[m_0 \gamma c] \end{aligned}\right\} \frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt}\left[m_0 \gamma c^2\right]$$

* Die <u>relativistische kinetische Energie</u> ist also

$$T = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2 = p^0 c$$

* Nun: $p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2$

$$\hookrightarrow = p_0 p^0 - \vec{p}^{\,2} = p^0 p^0 - p^2 = \left(\frac{T}{c}\right)^2 - p^2$$

Dann: $\boxed{T(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$ Relativistische Energie-Impuls Relation (<u>relativistische Dispersionsgesetz</u>)

(Bemerkung: nichtrelativistisch $T(p) = p^2/2m_0$)

* Für Teilchen im freien Raum $E = T$, und daher

$$E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

(Bemerkung: Für geladenen Teilchen in einem elektromagnetischen Feld:

$$E = \underbrace{q}_{\text{Ladung}}\underbrace{\varphi}_{\text{Skalar Potential}} + \sqrt{(\vec{\pi} - q\underbrace{\vec{A}}_{\text{Vektorpotential}})^2 c^2 + m_0^2c^4}$$

) $\underbrace{\vec{\pi}}_{\text{Kanonischer Impuls}} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Kinetischer Impuls}} + q\vec{A}$

* Die relativistische Beziehung $E(p)$ spielt eine sehr wichtige Rolle in der folgenden Diskussion über die Klein-Gordon-Gleichung.

---

* Die Klein-Gordon-Gleichung

* Wir werden nun relativistische quantenmechanische Wellengleichungen herleiten. Hier werden wir den Ausdruck für $E(p)$ anwenden.

Das Korrespondenzprinzip sagt aus wie wir Klassische Größen durch Operatoren ersetzen können:

* Energie: $E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
* Impuls: $\vec{p} \longrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$

* Zum Beispiel, aus der nichtrelativistischen Energie eines freien Teilchens $E = p^2/2m$, erhalten wir:

$$E = p^2/2m \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2\psi \rightarrow i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi$$

also, die zeitabhängige Schrödinger Gleichung. Diese Gleichung ist natürlich nicht Lorentz-invariant (1. Ableitung in t, und 2. Ableitung in $\vec{r}$)

* Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ würden wir nach dem Korrespondenzprinzip zunächst auf folgende Gleichung kommen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m_0^2 c^4}\ \psi$$

Diese Gleichung ist aber problematisch wegen der Wurzel, auch Zeit und Ort treten unsymmetrisch auf.

* Deshalb ist es besser die Relation

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

zu benutzen. Somit erhalten wir

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = \left(-i\hbar \vec{\nabla}\right)^2 \psi + m_0^2 c^4 \psi$$

$$\boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left[-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4\right] \psi}$$

KLEIN-GORDON-GLEICHUNG

(im freien Raum)

* Die Gleichung ist Lorentz-Invariant, glauben wir das. Wir können die Gleichung so umschreiben:

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0 \Rightarrow \left[\Box + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0} \longrightarrow \text{und ganz klar Lorentz-invariant.}$$

* Es ist auch interessant, dass hier ~~die~~ Compton-Wellenlänge $\hbar / m_0 c$ auftritt.

(Bemerkung: die Compton-Wellenlänge hat beides $\hbar$ und c in sich, also quantenmechanisch und relativistisch!).

* Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften der Klein-Gordon-Gleichung untersuchen.

* Die Klein-Gordon-Gleichung hat eine <u>Kontinuitätsgleichung</u> assoziiert; gucken wir das:

Wir multiplizieren erstmal die KG-Gleichung mit ψ^*:

$$\psi^* \left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right) \psi = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ Komplex-Konjugiert}$$

$$\psi \left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right) \psi^* = 0$$

Wir subtrahieren beide Gleichungen:

$$\psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = \partial_\mu \left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^* \right) = 0$$

Wir multiplizieren mit $\hbar/2mi$:

$$\partial_\mu \left[\frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^* \right) \right] = \partial_\mu j^\mu = 0$$

j^μ spielt also die Rolle eines 4-Stroms $j^\mu = (c\rho, \vec{J})$

wobei $\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \longrightarrow$ die Stromdichte von QM-I

und $$\boxed{\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right)}$$

Damit $\boxed{\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0} \longrightarrow$ <u>Kontinuitätsgleichung</u>

* Diese Gleichung hat aber ein Problem, da ρ nicht positiv definit ist, und kann deshalb <u>nicht</u> die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte haben!

(<u>Bemerkung</u>: Die KG-Gleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung in t, deshalb können die Anfangswerte von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ unabhängig vorgegeben werden, so daß ρ positiv oder negativ sein kann!)

* Wir untersuchen nun die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung im freien Raum.

Wir nehmen eine Ebenewelle der Form:

$$\psi(\vec{x},t) = e^{i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}$$

Wenn wir nun diese Gleichung in der KG-Gleichung setzen,

dann $\left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right)\psi = 0 \longrightarrow E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

Also $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$

* Es treten also positive und negative Energien auf, und die Energie ist nach unten nicht beschränkt. Das ist auch so, wie wir sehen werden, für die Dirac-Gleichung. Das Problem der KG-Gleichung ist, dass diese Theorie skalar ist, d.h. die Theorie enthält den Spin nicht, und, wenn überhaupt, kann nur Teilchen mit Spin 0 beschreiben. (und auch wegen $\rho<0$)

* Die KG-Gleichung würde deshalb zunächst verworfen, weil man eine Theorie fürs Elektron wollte.

Interessanterweise wird die Klein-Gordon-Gleichung im Rahmen der Quantenfeldtheorie neu interpretiert. Diese neue Theorie (Klein-Gordon-Feld) wird benutzt, um neutrale und geladene Mesonen zu beschreiben. Aber das werden wir hier nicht untersuchen.

* Die Dirac-Gleichung

* Das Problem der KG-Gleichung mit der Kontinuitätsgleichung kommt deswegen, weil die KG-Gleichung eine Differentialgleichung 2. Ordnung in der Zeit ist. Man sucht also eine Differential-gleichung 1. Ordnung in der Zeit (wie die Schrödingergleichung), die relativistisch invariant ist (also im Gegenteil zu der Schrödinger-gleichung). Und hier kommt die Idee der Dirac-Gleichung im Spiel.

* Wir suchen eine Gleichung der Form

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\hbar c\, \alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right)\psi \equiv H\psi}$$

(Bemerkung: von nun an wir benutzen $m \equiv m_0$. Auch $k = 1,2,3$)

Die Forderung der Lorentz-invarianz verlangt, daß die räumlichen Ableitungen auch 1. Ordnung sind!

* Die Koeffizienten α^k, β können nicht einfach Zahlen sein, da sonst die Gleichung nicht ganz forminvariant gegenüber räumlichen Drehungen wäre (Bemerkung: in der Schrödinger-Gleichung hat man ∇^2, und ∇^2 ist natürlich forminvariant gegen Drehungen).

Eigentlich α^k, β müssen hermitesche Matrizen sein, damit H hermitesch ist, und eine positive, erhaltene Wahrscheinlich-keitsdichte existiert.

Also, α^k und β sind $N \times N$ Matrizen und

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \longrightarrow N\text{-komponentiger Spaltenvektor.}$$

(N noch unbestimmt)

* Die charakteristische Länge ist auch in der Dirac-Gleichung die Compton-Länge $\hbar/mc$.

* Diese Gleichung muss einige wichtige Eigenschaften erfüllen:
  (i) Die Komponenten von ψ müssen die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen $\longrightarrow$ Ebenewellen müssen $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ erfüllen
  (ii) Es existiert ein erhaltener 4-Strom, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist (also im Gegenteil zu der KG-Gleichung)
  (iii) Die Gleichung muss Lorentz-Invariant sein

* Suchen wir nun welche Konsequenzen aus diesen Bedingungen folgen.

Aus der Bedingung (i): Wir wenden H 2 mal an:

$$\sum_{ij} \alpha^i \alpha^j \partial_i \partial_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} (\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)\partial_i\partial_j$$

$$\Big\downarrow \text{da } \partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = H^2 \psi$$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left[-i\hbar c \alpha^k \partial_k + \beta mc^2\right]\left[-i\hbar c \alpha^j \partial_j + \beta mc^2\right]\psi =$$

$$= -\hbar^2 c^2 \sum_{ij} \frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)\partial_i\partial_j\psi$$

$$-i\hbar mc^3 \sum_i (\alpha^i\beta + \beta\alpha^i)\partial_i\psi + \beta^2 m^2 c^4 \psi$$

aber $-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -\hbar^2 c^2 \sum_j \partial_j^2 \psi + m^2c^4\psi$ $\leftarrow$ die KG-Gleichung

Also:
$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i &= 2\delta^{ij}\mathbb{1} \\ \alpha^i\beta + \beta\alpha^i &= 0 \\ \beta^2 &= \mathbb{1} \end{aligned}}$$

* Also, aus der Bedingung (i) haben wir einige Bedingungen für die Matrizen α^k und β hergeleitet. Suchen wir nun was die Bedingung (ii) ergibt. Wir müssen nun eine Kontinuitätsgleichung herleiten.

Sei $\psi^+ = (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$

* Wir multiplizieren die Gleichung von links mit $\psi^\dagger$:

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hbar c\, \psi^\dagger \alpha^i \partial_i \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi$$

$\downarrow$ komplex konjugiert

$$-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger\right)\psi = i\hbar c \left(\partial_i \psi^\dagger\right)(\alpha^i)^\dagger \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta^\dagger \psi$$

Wir subtrahieren die beide Gleichungen:

$$i\hbar \left[\psi^\dagger\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger\right)\psi\right] = -i\hbar c \left[\psi^\dagger \alpha^i (\partial_i \psi) + (\partial_i \psi^\dagger)(\alpha^i)^\dagger \psi\right] + mc^2 \left(\psi^\dagger \beta \psi - \psi^\dagger \beta^\dagger \psi\right)$$

Dann:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) = -c\left[(\partial_i \psi^\dagger)(\alpha^i)^\dagger \psi + \psi^\dagger \alpha^i (\partial_i \psi)\right] + \frac{imc^2}{\hbar}\left[\psi^\dagger \beta^\dagger \psi - \psi^\dagger \beta \psi\right]$$

Wir wollen, daß diese Gleichung die Form einer <u>Kontinuitätsgleichung</u> annimmt. Das ist so wenn

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha^i)^\dagger &= \alpha^i \\ \beta^\dagger &= \beta\end{aligned}}$$

also wenn α^i und β <u>hermitesch</u> sind

Wenn das so ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) = -\partial_i \left[c\psi^\dagger \alpha^i \psi\right]$$

Wir können dann Dichte und Stromdichte definieren:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho &\equiv \psi^\dagger \psi = \sum_{\alpha=1}^{4} \psi_\alpha^* \psi_\alpha \longrightarrow \text{Dichte} \\ j^k &= c\psi^\dagger \alpha^k \psi \longrightarrow \text{Stromdichte}\end{aligned}}$$

und dann $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

* Wie in unserer Diskussion der Elektrodynamik (S. 54) können

wir nun die 4-Stromdichte einführen:

$$\boxed{(j^\mu) \equiv (j^0 \equiv c\rho, \vec{j})}$$

Und damit wir die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

- Entscheidend hier ist die Tatsache, daß ρ nun positiv definit ist, und kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. Das löst ein Problem der KG-gleichung.

- Nun kennen wir einige Eigenschaften von α^k und β und wir können einige Konsequenzen über die Struktur der Matrizen ziehen.

$$\left.\begin{aligned} * (\alpha^k)^2 &= \mathbb{1} \\ (\beta)^2 &= \mathbb{1} \end{aligned}\right\}$$ d.h. dass die Matrizen α^k und β nur die Eigenwerte ± 1 besitzen.

$$* \ \alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0 \longrightarrow \alpha^k = -\beta\alpha^k\beta$$

Dann $Sp(\alpha^k) = -Sp(\beta\alpha^k\beta) = -Sp(\alpha^k\beta^2) = -Sp(\alpha^k)$

Daher $Sp(\alpha^k) = 0$

und ähnlicherweise $Sp(\beta) = 0$

die Anzahl der $+1$ Eigenwerte muss gleich die Anzahl der -1 Eigenwerte. Daher muss N eine gerade Zahl sein.

- $N = 2$ ist nicht genug. Die 2×2 Matrizen, die die Eigenschaften erfüllen sind Kombinationen von $\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (die Pauli-Matrizen)

Bemerkung: ich erinnere euch, dass $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)

Aber deswegen haben wir nur 3 antikommutierende Matrizen, anstatt 4 $(\beta, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$.

- Daher ist $N = 4$ die kleinstmögliche Dimension der Matrizen.

* Eine spezielle Darstellung der Matrizen ist

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{wobei } \sigma^{1,2,3} \equiv \sigma_{x,y,z})$$

* Mit diesem Auswahl der α^k, β Matrizen erhält man die <u>Standarddarstellung der Dirac-gleichung</u>.

Nun ist ψ ein Vektor mit 4 Komponenten $\rightarrow$ <u>Viererspinor</u> (oder einfach <u>Spinor</u>)

* Wir werden nun die Dirac-gleichung in einer Kovarianten Form schreiben. Wir multiplizieren die Gleichung mit β/c:

$$i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hbar c\beta\alpha^k\partial_k\psi + \beta^2 mc^2\psi$$

$$-i\hbar\beta\,\partial_0\psi - i\hbar\beta\alpha^k\partial_k\psi + mc\psi = 0$$

Wir definieren die <u>Dirac-Matrizen</u>

- $\gamma^0 \equiv \beta \rightarrow$ dann γ^0 ist hermitesch und $(\gamma^0)^2 = 1$
- $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i \rightarrow (\gamma^i)^\dagger = (\alpha^i)^\dagger\beta \overset{(\alpha^i)^\dagger=\alpha^i}{=} -\beta(\alpha^i) = -\gamma^i \rightarrow \gamma^i$ ist anti-hermitesch

  $\searrow (\gamma^i)^2 = \beta\alpha^i\beta\alpha^i = -\beta(\alpha^i)^2\beta = -1$

Dann $\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \beta\beta\alpha^i + \beta\alpha^i\beta = \alpha^i - \beta^2\alpha^i = 0$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i = -\beta^2[\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i] = -2\delta^{ij}$$

Damit $\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}1}$

* Wir können dann die <u>Kovariante Form der Dirac-gleichung</u> schreiben

$$\boxed{\left(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

* Für die Darstellung der α^k, β Matrizen der S. 65 haben wir:

$$\boxed{\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}}$$

Wie gesagt, in dieser Form haben wir die Standarddarstellung der Dirac-Gleichung (es gibt andere Darstellungen möglich)

* Mit der Feynmansche Kurzschreibweise $\boxed{\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu}$ können wir die Dirac-Gleichung in der kompakten Form:

$$\boxed{\left(-i\not{\partial}_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) = 0}$$

* DIRAC-GLEICHUNG MIT ELEKTROMAGNETISCHEM FELD

* Bisher haben wir die Dirac-Gleichung nur im freien Raum gesehen. Es ist aber interessant zu sehen, wie die Gleichung für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld aussieht.

* Im Präsenz des EM-Feldes ist der kanonische Impuls

$$\Pi^\mu \equiv \underbrace{p^\mu}_{\text{Kinetischer Impuls}} + \underbrace{q}_{\text{Ladung}} A^\mu \longrightarrow \text{Vektorpotential (S. 54)} \; \hookrightarrow (\varphi/c, \vec{A})$$

Deswegen kriegen wir den Ausdruck um S. 57:

$$E(p) - q\varphi = \sqrt{(\vec{\Pi} - q\vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$ (die Herleitung ist genauso wie auf S. 56)

* Der Korrespondenzprinzip geht eigentlich mit dem kanonischen Impuls.

Daher ersetzt man:

$$\left.\begin{aligned} E &\longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\Pi} &\longrightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \end{aligned}\right\} \text{dann } \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (p^\mu) \Longrightarrow \left[\frac{E - q\varphi}{c}, \vec{\Pi} - q\vec{A}\right]$$

$$\text{also } (p^\mu) \longrightarrow \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)} - q\frac{\varphi}{c}, \; i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right]$$

$$= i\hbar\partial^\mu - qA^\mu$$

* Also $\boxed{p^\mu \longrightarrow i\hbar\partial^\mu - qA^\mu}$

Das ist die sogen. Minimalkopplung

* Gucken wir erstmal die KG-gleichung.

$$[E - q\varphi]^2 = (\vec{\Pi} - q\vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$\big\downarrow$ Korrespondenzprinzip

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right]^2\psi = \left[-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right]^2\psi + m_0^2c^4\psi$$

$$\underbrace{\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)} - q\frac{\varphi}{c}\right]}_{i\hbar\partial^0 - qA^0}{}^2\psi = \Big[\underbrace{-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}}_{\sum_k (i\hbar\partial^k - qA^k)}\Big]^2\psi + m_0^2c^4\psi$$

Sei $\underbrace{\boxed{D^\mu = \partial^\mu + \frac{iq}{\hbar}A^\mu}}_{\text{Minimalkopplung nochmal}}$, dann $\Rightarrow \boxed{\left[D_\mu D^\mu - \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0}$

Die KG-gleichung sieht also genauso aus wie auf S. 58

aber wir ersetzen $\boxed{\partial^\mu \longrightarrow D^\mu}$

* Das ist eigentlich alles was wir brauchen auch für die Dirac-Gleichung, damit

$$\left(-i\gamma^\mu D_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \boxed{\left(-i\not{D}_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

---

* Die Minimalkopplung hat die Invarianz der Dirac-Gleichung gegenüber Eichtransformationen zur Folge. Das ist einfach zu beweisen. Sei $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$, dann

$$D_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}(A_\mu + \partial_\mu \chi) = \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}\partial_\mu \chi\right) + \frac{iq}{\hbar} A_\mu$$

Sei $\psi \rightarrow e^{ik}\psi$

Dann $\partial_\mu \psi \rightarrow (i\partial_\mu k + \partial_\mu)\Phi\, e^{ik}$

Also $k = \frac{q}{\hbar}\chi$

Somit, wenn wir $A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$ transformieren,
wir müssen einfach die Lösung der Dirac-Gleichung auch
transformieren: $\boxed{\psi(x) \longrightarrow e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}\psi(x)}$

---

* Wir können die Dirac-Gleichung mit Minimalkopplung etwa umschreiben: Wir multiplizieren mal γ^0 und umschreiben:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = c\alpha^k\left[-i\hbar\partial_k - qA^k\right]\psi + q\varphi\psi + mc^2\beta\psi$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[c\vec{\alpha}\cdot(\vec{\pi} - q\vec{A}) + \beta mc^2 + q\varphi\right]\psi}$$

Wir werden diese Gleichung in der folgenden Diskussion anwenden.

---

* NICHTRELATIVISTISCHER GRENZFALL: DIE PAULI-GLEICHUNG

* Wir werden nun die Darstellung der S. 65 anwenden.
ψ ist also ein Vierspinor, $\alpha^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$, $\beta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
* Wir zerlegen den 4-Spinor in 2 Teilen:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\phi}, \tilde{\chi} \rightarrow \text{2-komponentige Vektoren.}$$

* Dann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\tilde{\chi}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\tilde{\Phi}\end{pmatrix} + q\varphi\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}$$

wobei $\vec{p} = \vec{\pi} - q\vec{A}$ (Kinetischer Impuls)

* Gucken wir zuerst was passiert in freien Raum (also ohne EM-Feld) und für ruhenden Teilchen ($\vec{p}=0$), dann

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}$$

Hier haben wir 2 verschiedene Art von Lösungen

* $\tilde{\chi} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \psi_1^{(+)}(t) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\psi_2^{(+)}(t) = e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

* $\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \psi_1^{(-)}(t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\psi_2^{(-)}(t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Die Lösungen $\psi_{1,2}^{(+)}$ haben <u>positive Energie</u>, während $\psi_{1,2}^{(-)}$ <u>negative Energie</u> haben. Wir werden später die Lösungen negativer Energie interpretieren. Wir betrachten zunächst die Lösungen mit positiver Energie

* Wir sind nun am <u>nichtrelativistischen Grenzfall</u> interessiert, wo die Ruheenergie mc^2 eine sehr große Energieskala ist.

Daher zerlegen wir:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$

und somit:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi + q\varphi\Phi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi + q\varphi\chi - 2mc^2\chi$$

* In der zweiten Gleichung können wir $\hbar\dot{\chi}$ und $q\varphi\chi$ gegenüber $-2mc^2\chi$ vernachlässigen. Dann

$$\chi \simeq \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\Phi$$

[also χ ist etwa $\sim \frac{v}{c}$ kleiner als Φ. Deswegen bezeichnet man Φ als große und χ als kleine Komponenten des Spinors]

Wir ersetzen das in der 1. Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) + q\varphi\right]\Phi$$

* Aus der Eigenschaften der Pauli-Matrizen:

$$\sigma^i\sigma^j = \delta_{ij} + i\sum_k \varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

($\varepsilon^{ijk} \rightarrow$ Antisymmetrischer Tensor, z.B. $\varepsilon^{123} = +1$, $\varepsilon^{132} = -1$)

* Dann

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = \sum_i \sigma^i p^i \sum_j \sigma^j p^j = \sum_{ij}\sigma^i\sigma^j p^i p^j$$

$$= \sum_i (p^i)^2 + i\sum_{ijk}\varepsilon^{ijk}\sigma^k p^i p^j$$

$$= \sum_i (p^i)^2 + i\sum_{ijk}\varepsilon^{ijk}\sigma^k[-i\hbar\partial_i - qA^i][-i\hbar\partial_j - qA^j]$$

$$= \sum_i (p^i)^2 + i\sum_k \sigma^k \sum_{ij}\varepsilon^{ijk}\Big[\underbrace{\cancel{-\hbar^2\partial^i\partial^j} + \cancel{q^2 A^i A^j}}_{\text{die sind symmetrisch}} + i\hbar q\underbrace{(\partial_i A^j + A^i\partial_j)}_{(\partial_i A^j) + \underbrace{\cancel{A^j\partial_i + A^i\partial_j}}_{\text{symmetrisch}}}\Big]$$

$$= \sum_i (p^i)^2 - \hbar q\sum_K \sigma^K \underbrace{\left[\sum_{ij}\varepsilon^{ijk}\partial_i A^j\right]}_{(\nabla\times\vec{A})^k = B^k}$$

$$= \vec{p}\cdot\vec{p} - \hbar q\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

Dann

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \left\{\frac{1}{2m}\left[\vec{p}\cdot\vec{p} - \hbar q\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right] + q\varphi\right\}\Phi$$

und daher:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Phi = \left\{ \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right]^2 - \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + q\varphi \right\}\Phi}$$

* Diese Gleichung ist die so genannte Pauli-Gleichung und Φ ist der Pauli-Spinor (wir sollten nicht vergessen, dass Φ ein Vektor mit 2 Komponenten ist). Die Pauli-Gleichung beschreibt geladene Spin-1/2 Teilchen (z.B. der Elektron), die sich in einem EM-Feld bewegen (Bemerkung: die Gleichung ist nicht-relativistisch und daher muss die Bewegung viel langsamer als c).
* Die Pauli-Gleichung kann in 2 Teile zerlegt werden:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Phi = \underbrace{\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + q\varphi\right]}_{\text{Hamilton-Operator ohne Spin}}\Phi \underbrace{- \left(\frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)}_{\text{Wechselwirkung zwischen Spin und Magnetfeld}}\Phi$$

[Bemerkung: die beiden Komponenten von Φ beschreiben den Spin des Teilchens: ↑ und ↓]

(dieser Term hat in der klassischen Physik keine Entsprechung)

* Die Dirac-Gleichung geht also in dem nichtrelativistischen Limes zu den Pauli-Gleichung, die Spin-1/2 Teilchen beschreibt. Dagegen geht die Klein-Gordon-Gleichung in dem nichtrelativistischen Limes zu den Schrödinger Gleichung (für Spin-0 Teilchen).
* Die Dirac-Gleichung führt also natürlich zu der Idee von Spin, die, wie schon erwähnt, keine klassische Entsprechung hat. (Bemerkung: wie wir aus QM-I schon kennen, die Wechselwirkung zwischen Spin und Magnetfeld verursacht den Stern-Gerlach-Effekt)
* Wir können nun die Pauli-Gleichung etwa umschreiben. Sei $\vec{B}$ ein homogenes Magnetfeld (also $\vec{B} \neq \vec{B}(\vec{x})$). Dann, da $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, wir können schreiben $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r})$ (Beweis es!)

* Wir benutzen die Definitionen um:
  * Bahndrehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
  * Spin: $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$
* Aus der Pauli-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\bar{\Phi} = \left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{q^2}{2m}A^2 - \frac{q}{m}\underbrace{\vec{p}\cdot\vec{A}}_{\downarrow} - \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + q\varphi \right\}\bar{\Phi}$$

$$\frac{1}{2}\vec{p}\cdot(\vec{B}\times\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{L}$$

$$= \left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{q^2}{2m}A^2 - \frac{q}{2m}\vec{B}(\vec{L}+2\vec{S}) + q\varphi \right\}\bar{\Phi}$$

$$= \left(\frac{p^2}{2m}\right)\bar{\Phi} + H_{INT}\,\bar{\Phi}$$

$\hookrightarrow$ Die Wechselwirkung mit dem EM-Feld ist dann

$$H_{INT} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} + \frac{q^2}{2m}A^2 + q\varphi$$

wobei $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{BAHN} + \vec{\mu}_{spin} = \frac{q}{2m}(\vec{L}+2\vec{S})$

das magnetische Moment des Teilchens ist, das aus der Zusammensetzung von Bahn- und Spinanteil kommt. Das Spin-Moment ist von der Größe:

$$\vec{\mu}_{SPIN} = g\,\frac{e}{2m}\vec{S}$$

$\rightarrow$ gyromagnetischer Faktor $g = 2$

Für das Elektron $\frac{q}{2m_{elek}} = \frac{-e}{2m_{elek}} = -\mu_B/\hbar$ wobei

$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_{elek}} \Rightarrow$ Bohrsche Magneton

* Also, aus der Dirac-Gleichung bekommen wir ganz natürlich die nichtrelativistische Theorie für Spin-1/2 Teilchen mit dem richtigen gyromagnetischen Faktor für $\vec{\mu}_{spin}$.

* Die Pauli-Gleichung ist eine sehr gute Näherung für z.B. Wasserstoff, weil da die Larmor-Frequenz $\sim \mu_B B/\hbar$ und die typische potentielle Energie $q\Phi \sim -Ze^2/r$ viel kleiner als mc^2 sind.