• RELATIVISTISCHE QUANTENMECHANIK II : SPINOREN

* Auf S. 65 haben wir die kovariante Form der Dirac-Gleichung geschrieben:

$$\left(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Dirac-Gleichung tatsächlich bei Lorentz-Transformationen forminvariant ist. Hier aufpassen: trotz der suggestiven Schreibweise $\gamma^\mu \partial_\mu$ ist nicht lorentzinvariant, da die γ^μ konstante Matrizen sind, die nicht lorentztransformiert werden.
Die Lorentzinvarianz der Dirac-Gleichung verlangt also eine gewisse Lorentz-Transformation der Spinor ψ, die wir nun herleiten werden.

* LORENTZ-TRANSFORMATION

* Auf S. 53 haben wir die Idee von Lorentz-Transformation eingeführt. Nun werden wir diese Idee erweitern, und etwas näher untersuchen.
* Die Lorentz-Transformationen geben an, wie sich die Koordinaten zweier Inertialsysteme ineinander transformieren. Die Koordinaten zweier gleichförmig bewegter Bezugssysteme müssen durch eine lineare Transformation zusammenhängen (Bemerkung: Geraden werden in Geraden transformiert). Deshalb besitzen die allgemeine Lorentz-Transformationen die Form:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + \underbrace{a^\mu}_{\text{Translation}}$$

Translationen sind eigentlich nicht so interessant, und daher werden wir von nun an nur homogene Lorentz-Transformationen

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$$

untersuchen.

* Der Relativitätsprinzip sagt uns, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich sind. Aus der Forderung der Invariante des d'Alembert-Operators $[\Box = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu}\partial^\mu \partial^\nu]$ ergibt sich:

$$\Lambda^\lambda_{\ \mu}\, g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_{\ \nu} = g^{\lambda\rho} \longrightarrow \boxed{\Lambda g \Lambda^T = g}$$

(Ich erinnere euch an dem Ergebnis von S. 54)

Diese Beziehung definiert die Lorentz-Transformationen.

[Bemerkung: Die Lorentz-Transformationen im engeren Sinn, d.h. Transformationen, bei denen Raum und Zeit transformiert werden, sind ein besonderes Beispiel dieser allgemeinen $\Lambda^\mu_{\ \lambda} = L^\mu_{\ \lambda}$ (S. 53), sind ein besonderes Beispiel dieser allgemeinen Transformationen die Lorentz-Transformationen. Es gibt andere Transformationen die nur räumliche Koordinaten transformieren, wie z. B. Drehungen.]

* Aus der Beziehung $\Lambda g \Lambda^T = g$ folgen zwei wichtige Eigenschaften der Lorentz-Transformationen:

(i) $\det(\Lambda g \Lambda^T) = \det(\Lambda)\det(g)\det(\Lambda^T) = (\det(\Lambda))^2 \det(g)$
$\overset{!}{=} \det(g)$

Also $\boxed{\det(\Lambda) = \pm 1}$

(ii) Wir nehmen in der Formel da oben $\lambda = \rho = 0$:

$$\Lambda^0_{\ \mu}\, g^{\mu\nu} \Lambda^0_{\ \nu} = g^{00} = 1 \rightarrow (\Lambda^0_{\ 0})^2 - \sum_k (\Lambda^0_{\ k})^2 = 1$$

und somit: $(\Lambda^0_{\ 0})^2 = 1 + \sum_k (\Lambda^0_{\ k})^2 \geq 1$

Daher $\boxed{\Lambda^0_{\ 0} \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0_{\ 0} \leq -1}$

* Transformationen mit $\det(\Lambda) = 1$ und $\Lambda^0_{\ 0} \geq 1$ sind die sogen. eigentliche-orthochrone Lorentz-Transformationen. Die bauen die sogen. eingeschränkte Lorentz-gruppe. Alle andere Lorentz-Transformationen können als Produkt eines Elements der

eingeschränkten Lorentz gruppe mit einer diskreten Transformation P, T oder PT geschrieben werden, wobei

$$P \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\text{Raumspiegelung}}$$

$$T \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\text{Zeitspiegelung}}$$

$$PT \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\text{Raum-Zeit-Spiegelung}}$$

* Daher werden wir nur diese eingeschränkte Lorentz-Transformationen untersuchen. Dazu gehören:
    * Drehungen
    * Lorentz-Transformationen im engeren Sinn (S. 53)

* LORENTZ-INVARIANZ DER DIRAC-GLEICHUNG

* Die Dirac-gleichung soll in allen Inertialsysteme dieselbe Form haben. D.h. wenn wir zwei Inertialsysteme S und S' betrachten solch dass

Bemerkung: ∂_μ transformiert sich wie ein 4-Vektor $\partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} \partial_\nu$

$$x' = \Lambda x$$

wenn in $S \longrightarrow \left(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$

dann in $S' \longrightarrow \left(-i\gamma^\mu \partial'_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0$, wobei $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial (x')^\mu}$

* Damit sowohl ψ wie auch ψ' der linearen Dirac-gleichung genügen können, muß der funktionelle Zusammenhang linear sein:

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x')$$

oder in Komponenten $\psi'_\alpha(x') = \sum_\beta S_{\alpha\beta}(\Lambda)\,\psi_\beta(\Lambda^{-1}x')$

* Die Lorentztransformation wirkt also auf die Raum-Zeit-Koordinaten, und die Matrix $S_{\alpha\beta}$ wirkt auf die Spinor-Komponenten. Die Matrix S ist also eine 4 x 4 Matrix, die wir nun bestimmen werden.

(Bemerkung: ab sofort nehmen wir $\hbar = c = 1$, um die Notation zu vereinfachen.)

* Um S zu bestimmen, müssen wir die Dirac-gleichung im gestrichenen und ungestrichenen Koordinatensystem ineinander überführen.

Also im ungestrichenen Koordinatensystem

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0$$

Da $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$ und $S^{-1}\psi'(x') = \psi(x)$

dann:

$$(-i\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu + m) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

Wir multiplizieren von links mal S:

$$-i S \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu S^{-1} \partial'_\nu \psi'(x') + m\psi'(x') = 0$$

Wenn die Dirac-gleichung form-invariant sein muss:

$$-i\gamma^\nu \partial'_\nu \psi'(x') + m\psi'(x') = 0$$

Daher $S\Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu S^{-1} = \gamma^\nu$

$$\boxed{S(\Lambda)^{-1}\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu}$$

* Wenn eine solche Transformation existiert (und das werden wir sofort sehen), dann ist die Dirac-gleichung Lorentz-invariant, wie wir auf S. 62 verlangt hatten.

* ALLGEMEINE FORM DER SPINORTRANSFORMATION

* Die Lorentz-Gruppe ist eine Lie-Gruppe, genauso wie z.B. die Drehungen der SU(2) Gruppe für Spin-1/2 Teilchen. Elemente einer Lie-Gruppe sind der Form:

$$e^{-i\varphi \sum_i n_i J_i}$$

wobei J_i sind die Erzeugern der Gruppe, welche die zur Lie-Gruppe zugehörige Lie-Algebra aufspannen.

[Bemerkung: Aus der QM-I vertraut sind zum Beispiel die Drehungen von spin-1/2 Spinoren:

$$e^{-i\varphi \vec{n}(\vec{\sigma}/2)}$$

mit den Erzeugern $\sigma_i/2$, wobei $\{\sigma_i\}$ die Pauli Matrizen sind, die die charakteristische Vertauschrelationen der Lie-Algebra der Drehgruppe gehorchen:

$$[\sigma_i/2, \sigma_j/2] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k/2]$$

* Bei Lie-Gruppen genügt es deswegen, das Verhalten von infinitesimalen Transformationen in der Nähe um $\mathbb{1}$ zu untersuchen, um schon das Verhalten der ganze Gruppe zu charakterisieren (wir brauchen nur die Erzeugern)

* Wir werden also infinitesimale Lorentz-transformationen (der eingeschränkten Gruppe) untersuchen.

* Für eine Lorentz-Transformation $(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ setzen wir an

$$\Lambda^\mu{}_\nu = e^{\omega^\mu{}_\nu}$$

Eine infinitesimale Transformation um $\Delta\omega^\mu{}_\nu$ lautet also

$$\Lambda^\mu{}_\nu \simeq g^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu$$

Ich erinnere euch dass $(g^\mu{}_\nu) = \mathbb{1}$.

* Diese Transformation erfüllt die Definitionsrelation für Lorentz-Transformationen:

$$\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\, g^{\mu\nu}\, \Lambda^{\rho}{}_{\nu} = g^{\lambda\rho}$$

dann

$$g^{\lambda\rho} \cong (g^{\lambda}_{\mu} + \Delta\omega^{\lambda}{}_{\mu})\, g^{\mu\nu}\, (g^{\rho}_{\nu} + \Delta\omega^{\rho}{}_{\nu}) \simeq$$

$$\simeq \underbrace{g^{\lambda}_{\mu}\, g^{\mu\nu}\, g^{\rho}_{\nu}}_{g^{\lambda\rho}} + \underbrace{\Delta\omega^{\lambda}_{\mu}\, g^{\mu\nu}\, g^{\rho}_{\nu}}_{\delta\omega^{\lambda\rho}} + \underbrace{g^{\lambda}_{\mu}\, g^{\mu\nu}\, \Delta\omega^{\rho}_{\nu}}_{\delta\omega^{\rho\lambda}} + \mathcal{O}((\Delta\omega)^2)$$

Dann $\boxed{\Delta\omega^{\lambda\rho} = -\Delta\omega^{\rho\lambda}}$ $\longrightarrow$ $(\Delta\omega^{\lambda\rho})$ ist also antisymmetrisch, und daher gibt es nur 6 unabhängige, nicht verschwindende Elemente.

[* Bemerkung: die Matrix ist 4×4. Die Diagonalelemente sind natürlich Null. Da $\Delta\omega^{\lambda\rho} = -\Delta\omega^{\rho\lambda}$, wir brauchen nur die Elemente über oder unter der Diagonal, und die sind 6 Elemente.]

* Jedes der 6 unabhängige Elemente von $\Delta\omega^{\mu\nu}$ erzeugt eine infinitesimale Lorentz-Transformation, 3 Drehungen (assoziiert mit $\Delta\omega^{12}, \Delta\omega^{13}, \Delta\omega^{23}$) und 3 Lorentz-Transformationen im engeren Sinn (assoziiert mit $\Delta\omega^{01}, \Delta\omega^{02}, \Delta\omega^{03}$). Wir werden die später genauer untersuchen.

* Zur Bestimmung der Spinor-Transformationsmatrix S setzen wir auch diese als Exponentialfunktion $S = e^{\tau}$ an, und entwickeln für infinitesimale Transformationen in eine Potenzreihe

$$\left.\begin{aligned} S &\simeq \mathbb{1} + \Delta\tau \\ S^{-1} &\simeq \mathbb{1} - \Delta\tau \end{aligned}\right\}$$ wobei $\Delta\tau$ auch infinitesimal, also von Ordnung $\mathcal{O}(\Delta\omega)$ ist.

Wir wissen aus S. 77 dass $S^{-1}\gamma^{\nu} S = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}$, dann

$$(1-\Delta\tau)\,\gamma^\mu\,(1+\Delta\tau) = \gamma^\mu + \gamma^\mu\Delta\tau - \Delta\tau\cdot\gamma^\mu$$
$$\stackrel{!}{=} \gamma^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$$

und damit: $\quad \gamma^\mu\Delta\tau - \Delta\tau\,\gamma^\mu = \Delta\omega^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$

$$\boxed{[\gamma^\mu, \Delta\tau] = \Delta\omega^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu}$$

* Ausserdem, wenn ψ normiert ist, muss $\psi' = S\psi$ auch normiert sein, und daher S muss die Norm erhalten werden. Das verlangt $\boxed{\det S = 1}$

Dann
$$\det(S) = \det(e^{\Delta\tau}) = e^{Sp(\Delta\tau)} = 1 \longrightarrow \boxed{Sp(\Delta\tau) = 0}$$

[**Bemerkung**: Die Gleichung $[\gamma^\mu, \Delta\tau] = \Delta\omega^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$ bestimmt $\Delta\tau$ nicht eindeutig, da $\Delta\tau \to \Delta\tau + \text{konstant}\cdot 1$ auch eine Lösung wäre. Die Normierungsbedingung $Sp(\Delta\tau)=0$ ergibt die Eindeutigkeit der Lösung.]

* Die Lösung der Gleichungen ist:

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{1}{8}\Delta\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu] = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}$$

wobei $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

[**Bemerkung**: Der Beweis ist ganz einfach wenn man die Eigenschaften der γ Matrizen (S. 65) benutzt. Versuch es!]

* Wegen der Lie-Gruppe-Struktur der Lorentz-Transformationen erhalten wir aus den infinitesimalen Transformationen schließlich auch das gesuchte Transformationsverhalten von Dirac-Spinoren unter endlichen Lorentz-Transformationen:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = e^{\omega^\mu{}_\nu}$$

Dann: $\quad \psi'(x') = S\psi(x) \quad$ mit $\quad \boxed{S = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}}}$

* Suchen wir nun die Elemente $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[2\gamma_\mu\gamma_\nu - \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}\right] \overset{S.65}{=} \frac{i}{2}\left[2\gamma_\mu\gamma_\nu - 2g_{\mu\nu}\mathbb{1}\right]$$

Dann $\sigma_{0k} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_k] = i\gamma_0\gamma_k \overset{S.65}{=} i\alpha_k$

$$\sigma_{ij} = i\gamma_i\gamma_j - ig_{ij}\mathbb{1} \underset{i\neq j}{=} i\gamma^i\gamma^j =$$

$\hookrightarrow i=j$ ist unwichtig da ω antisymmetrisch ist

Standarddarstellung S. 66

$$= i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \epsilon^{ijk}\Sigma^k$$

Dann

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{0k} &= i\alpha_k \\ \sigma_{12} &= \Sigma^3 \\ \sigma_{13} &= -\Sigma^2 \\ \sigma_{23} &= \Sigma^1 \end{aligned}}$$

wobei $\boxed{\Sigma^k \equiv \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}}$

Die Σ Matrizen erfüllen dieselbe Vertauschrelationen wie die Pauli-Matrizen

* Wir werden nun die Transformationen explizit berechnen.

---

* LORENTZ-TRANSFORMATION IM ENGEREN SINN (LORENTZBOOST)

* Wie auf S. 53 betrachten wir nun einen Lorentzboost in x^1-Richtung. Wir führen hier die geeignete Notation:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \equiv \cosh\eta \\ \beta\gamma &= \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \equiv \sinh\eta \end{aligned}\right\} \tanh\eta = \beta = v/c$$

Dann $$\Lambda^\nu{}_\mu = (L_1)^\nu{}_\mu = \begin{bmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv e^{\eta \mathbb{I}}$$

wobei $$\mathbb{I}^\mu{}_\nu \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* Dann, in diesem Fall:

$$\omega^{\mu\nu} = \eta\, \mathbb{I}^{\mu\nu} = \eta\, I^{\mu}_{\ \rho}\, g^{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +\eta & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Und damit

$$\sigma_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} = (-\sigma_{10} + \sigma_{01})\,\eta = 2\sigma_{01}\,\eta = 2i\eta\,\alpha_1$$

Die Transformationsmatrix des Spinors ist also

$$S(\mathbb{L}_1) = e^{-\frac{i}{4} 2i\eta\alpha_1} = e^{\eta\alpha_1/2} \overset{\alpha_1^2 = 1\ (S.\,62)}{=}$$

$$= 1 \cosh\frac{\eta}{2} + \alpha_1 \sinh\frac{\eta}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh\eta/2 & 0 & 0 & \sinh\eta/2 \\ 0 & \cosh\frac{\eta}{2} & \sinh\eta/2 & 0 \\ 0 & \sinh\eta/2 & \cosh\eta/2 & 0 \\ \sinh\frac{\eta}{2} & 0 & 0 & \cosh\eta/2 \end{bmatrix}$$

* Für einen Lorentzboost in einer Richtung $\vec{v}$:

$$\boxed{S(\mathbb{L}_{\vec{v}}) = e^{\frac{\eta}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{v}/|\vec{v}|} = 1 \cosh\frac{\eta}{2} + \vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\sinh\frac{\eta}{2}}$$

---

* DREHUNGEN UM EINE ACHSE

* Wir betrachten nun die Drehung um z.B. die z-Achse:

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \left(R_3(\theta)\right)^{\mu}_{\ \nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\theta M_3}$$

wobei
$$(M_3)^{\mu}_{\ \nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* Dann $\omega^{\mu\nu} \equiv \theta (M_3)^{\mu\nu} = \theta (M_3)^{\mu}{}_{\rho}\, g^{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Somit $\sigma_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} = -2\theta\,\sigma_{12} = -2\theta\,\Sigma^3 = -2\theta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$

Dann

$$S = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} = e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma^3} \underset{\Sigma^3\cdot\Sigma^3 = \mathbb{1}}{=} \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\,\Sigma_3 \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Für eine beliebige Drehachse $\vec{n}$

$$\boxed{S = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}} = \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\,\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}\,\sin\frac{\theta}{2}}$$

* Wir sehen, daß sich der Dirac-Spinor unter Rotationen genauso transformiert, wie der 2-komponentige Spinor eines Spin-1/2-Teilchens in der nichtrelativistischen Quantenmechanik, aber mit Verdopplung der Komponentenzahl:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{statt} \quad \vec{\sigma}$$

---

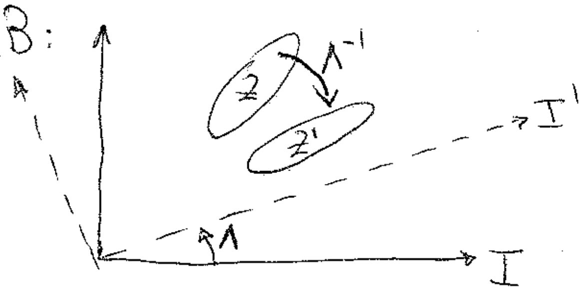
* DREHIMPULS

* Auf S. 68-73 haben wir gesehen, dass aus der Dirac-Gleichung wir die nichtrelativistische Theorie für Spin-1/2-Teilchen bekommen. Wir werden nun ein bisschen genauer die Idee von Spin untersuchen, und zwar mit Hilfe unseres neuen Kenntnisses über Lorentztransformationen.

* Bisher haben wir passive Transformationen untersucht, wo ein und derselbe Zustand von 2 verschiedenen Koordinaten-Systemen aus betrachtet wird: $\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S\psi(x)$
$= S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$

* Man kann andererseits auch den Zustand transformieren, und den dabei entstehenden Zustand Z' wie den ursprünglichen Zustand Z von ein und demselben Koordinatensystem aus betrachten
$\longrightarrow$ Das wird eine aktive Transformation genannt.

z.B.:



Der Zustand Z', der durch die Transformation Λ^{-1} entsteht, sieht im Bezugssystem I genauso wie Z von I' aus betrachtet, d.h.:

$$\boxed{\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)} \longrightarrow \text{Aktiv mit } \Lambda^{-1}$$

* Wir machen nun eine infinitesimale Transformation:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} + \dots \Rightarrow (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} - \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} + \dots$$

$$S = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}$$

Dann die aktive Transformation wird:

$$\psi'(x) \simeq \left(\mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right)\underbrace{\psi[x^{\rho} - \Delta\omega^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu}]}_{\downarrow \text{ Taylor-Entwicklung}}$$

$$\psi(x) - \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\psi(x)$$

$$\cong \left[\mathbb{1} + \Delta\omega^{\mu\nu}\left(\frac{-i}{4}\sigma_{\mu\nu} + x_{\mu}\partial_{\nu}\right)\right]\psi(x)$$

* Suchen wir nun was passiert für Drehungen

$$\Delta\omega^{ij} = -\varepsilon^{ijk}(\Delta\rho)^k$$

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{ijk}\Sigma^k$$

Dann:

$$\psi'(x) = \Big\{1 + i\Delta\rho^k \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\Sigma^k + i\varepsilon^{ijk}x^i\partial^j\right)}_{J^k}\Big\}\psi(x)$$

$$\equiv \left[1 + i(\Delta\rho^k)J^k\right]\psi(x) = \left[1 + i\vec{J}\cdot\vec{\Delta\rho}\right]\psi(x)$$

Für endliche Drehungen (hier führe ich noch mal $\hbar$ ein)

$$\psi'(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{J}}\,\psi(x)$$

Dies definiert den <u>Gesamtdrehimpuls</u>:

$$J^k = -i\hbar\,\epsilon^{ijk}x^i\partial_j + \frac{\hbar}{2}\Sigma^k$$

$$\vec{J} = (-i\hbar\,\vec{x}\times\vec{\nabla})\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Spinorraum}}}{1} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} = \underset{\substack{\swarrow\\ \text{Bahndrehimpuls}\\ (\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p})}}{\vec{L}} + \underbrace{\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}}_{\longrightarrow\ \text{Spin } \vec{S}}$$

* Wir sehen daß der Gesamtdrehimpuls eine Summe

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

ist, also die Summe aus Bahndrehimpuls ($\vec{L}$) und Spin $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$. Weil $\vec{\Sigma}$ die Pauli-Vertauschungsrelationen erfüllt, gilt also, dass <u>Dirac-Spinoren den Spin $S = 1/2$ besitzen</u>!!

* Die Dirac-gleichung beschreibt also, wie angekündigt, Spin-1/2-Teilchen in relativistisch kovarianter Weise.

* RAUMSPIEGELUNG. PARITÄT

* Suchen wir noch eine interessante Lorentz-Transformation, nämlich die Raumspiegelung (S. 76)

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x' = (t, -\vec{x})$$

(Bemerkung: Ganz klar $\Lambda^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\nu}$ (S. 52))

* Die entsprechende Spinor-Transformation erfüllt (S. 77):

$$S^{-1}\gamma^{\mu} S = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu}\gamma^{\nu} = g^{\mu\mu}\gamma^{\mu}$$

Dann ist die Spinor-Transformation (die wir in diesem Fall mit P bezeichnet)

$$S = P \equiv e^{i\varphi}\gamma^0$$

[Bemerkung: Für $\mu=0 \to (\gamma^0)^{-1}(\gamma^0)^2 = \gamma^0 = g^{00}\gamma^0$
Für $\mu = k \neq 0 \longrightarrow (\gamma^0)^{-1}\gamma^k\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k = g^{kk}\gamma^k$]

(Bemerkung: $e^{i\varphi}$ ist ein unbeobachtbarer Phasenfaktor. Typischerweise nimmt man $e^{i\varphi} = \pm 1, \pm i$ solch dass 4 Spiegelungen die Einheit $\mathbb{1}$ ergeben)

* Dann, die Spinoren transformieren sich unter einer Raumspiegelung so:

$$\psi'(x') \equiv \psi(t, \vec{x}') = \psi'(t, -\vec{x}) = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(t, \vec{x}) = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(t, -\vec{x}')$$

Die gesamte Raumspiegelungstransformation für Spinoren wird also:

$$\boxed{\mathcal{P} = e^{i\varphi}\gamma^0\mathcal{P}^{(0)}}$$

wobei $\mathcal{P}^{(0)}$ die Raumspiegelung $\vec{x} \leftrightarrow -\vec{x}$ bewirkt.

* Da $\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ d.h. dass die Ruhezustände $\psi^{(+)}_{1,2}$ mit $E>0$ und $\psi^{(-)}_{1,2}$ mit $E<0$, Eigenzustände der Parität (also der Raumspiegelung) aber mit entgegengesetzten Eigenwerte.

* D.h. dass die inneren Paritäten für Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzt sind

(Mehr über die Lösungen mit $E<0$ später)

(* Bemerkung: Wir werden später in unserer Diskussion des Wasserstoffatoms die Idee von Parität anwenden)

* ADJUNGIERTE SPINOR. SKALARPRODUKT

* Wir werden zum Schluss einige wichtige Eigenschaften und Begriffen bezügl. Spinors sehen und uns besonders die Idee von Skalarprodukt.

* Man definiert den adjungierten Spinor als

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

Also wenn $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \rightarrow \psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \rightarrow \overline{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$

* Die Idee von adjungierten Spinor ist wichtig, besonders weil $\overline{\psi}\psi$ als ein Skalar unter Lorentz-Transformationen transformiert wird, d.h.:

$$\boxed{\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x)}$$

und daher ist das die richtige Definition des Skalarprodukts von Spinors

(* Bemerkung: Skalar unter Lorentz-Transfo. heißt dass etwas eigentlich nicht transformiert wird. Dagegen z.B. etwas ist ein Vektor unter Lorentz-Transfo. wenn: $O^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu O^\nu$. Wir werden ein Beispiel später sehen)

* Wir werden nun sehen, dass der Skalarprodukt so definiert tatsächlich ein Skalar ist

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$$

$$\overline{\psi}'(x') = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x')S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \underset{(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}}{=} \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x')\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 =$$

$$= \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x')\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$$

Dann $\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x')\left[\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)\right]\psi(\Lambda^{-1}x')$

Also wenn $\boxed{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda) = \mathbb{1}}$ dann ist $\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x)$ wie wir beweisen wollten. Wir werden nur beweisen, dass das tatsächlich der Fall ist.

* Aus der Definition der Transformation S (s. 77):

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \qquad \Lambda^\mu{}_\nu \text{ reell}$$

Dann $(\Lambda^\mu_{\ \nu}\,\gamma^\nu)^\dagger = S^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(S^\dagger)^{-1}$

* Man kann beweisen, dass $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ (beweis es aus der Standard Darstellung!)

Dann:

$$\Lambda^\mu_{\ \nu}(\gamma^\nu)^\dagger = \Lambda^\mu_{\ \nu}\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0 = S^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0(S^\dagger)^{-1}$$

Wir multiplizieren rechts und links mal γ^0

$$\underbrace{\gamma^0\Lambda^\mu_{\ \nu}\gamma^0}_{\Lambda^\mu_{\ \nu}}\gamma^\nu\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}} = \gamma^0 S^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0(S^\dagger)^{-1}\gamma^0$$

Dann $\Lambda^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu = (\gamma^0 S^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu(\gamma^0(S^\dagger)^{-1}\gamma^0)$

$$\Lambda^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu = S^{-1}\gamma^\mu S$$

Wir multiplizieren mal S (links) und S^{-1} (rechts), dann

$$\gamma^\mu = (S\gamma^0 S^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu(\gamma^0(S^\dagger)^{-1}\gamma^0 S^{-1})$$
$$= (S\gamma^0 S^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu(S\gamma^0 S^\dagger\gamma^0)^{-1}$$

Dann $\boxed{S\gamma^0 S^\dagger\gamma^0 = b\,\mathbb{1}}$ ein Mehrfach der Identitätsmatrix

$$\rightarrow S\gamma^0 S^\dagger = b\gamma^0 \rightarrow (S\gamma^0 S^\dagger)^\dagger = b^*(\gamma^0)^\dagger \overset{(\gamma^0)^\dagger=\gamma^0}{\Rightarrow} S\gamma^0 S^\dagger = b^*\gamma^0$$

d.h. $b = b^* \rightarrow$ b ist reell.

* Wie schon erwähnt $\det(S) = 1$ (s. 80) dann:

$$\det(S\gamma^0 S^\dagger\gamma^0) = \det(S)^2\det(\gamma^0)^2 = 1 = \det(b\,\mathbb{1}) = b^4 \rightarrow \boxed{b = \pm 1}$$

* Außerdem: $S^\dagger S = S^\dagger\gamma^0\gamma^0 S = b\gamma^0[S^{-1}\gamma^0 S] = b\gamma^0[\Lambda^0_{\ \nu}\gamma^\nu]$

$$= b\Lambda^0_{\ 0}\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{3} b\Lambda^0_{\ k}\underbrace{\gamma^0\gamma^k}_{\alpha^k}$$

und damit $\boxed{Sp(S^\dagger S) = 4b\Lambda^0_{\ 0}}$, da $Sp(\alpha^k) = 0$ (s. 64)

· Aber $\det(S^\dagger S) = 1 \longrightarrow$ Eigenwerte von $(S^\dagger S)$ sind nicht Null

Außerdem für die Eigenvektoren und Eigenwerte gilt es:

$$(S^\dagger S)\psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda \longrightarrow \lambda \psi_\lambda^+ \psi_\lambda = \psi_\lambda^+ (S^+ S)\psi_\lambda = (S\psi_\lambda)^+ (S\psi_\lambda) > 0$$

Dann $\boxed{\lambda > 0}$ für alle Eigenwerte [Bemerkung: ganz klar $(S^\dagger S)^\dagger = S^\dagger S$, d.h. $S^\dagger S$ ist hermitesch]

Dann aufjedenfall $Sp(S^\dagger S) > 0$, und damit $\boxed{b \Lambda^0_0 > 0}$

· D.h. $\Lambda^0_0 > 0$ (und das ist so für die eingeschränkte Lorentz gruppe S. 75)

wenn dann $b = 1$, und damit

$$\boxed{S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = 1} \longrightarrow \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}$$

für die eingeschränkte Lorentz-gruppe:

· Dann

$$\overline{\psi}'(x')\psi(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x)$$

wie wir beweisen wollten. Wie schon erwähnt, das ist also die richtige definition von Skalarprodukt von 2 Spinoren

· Seien 2 Spinoren: ψ und η
Skalarprodukt $\overline{\psi} \cdot \eta$

· Also, $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ transformiert wie ein Skalar. gucken wir nun

$\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)$:

$$\overline{\psi}'(x')\gamma^\mu \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \underbrace{\gamma^0 S^+ \gamma^0 \gamma^\mu S}_{S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu} \psi(x)$$

$$= \Lambda^\mu_\nu \left[\overline{\psi}(x)\gamma^\nu \psi(x)\right]$$

Dann $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ transformiert wie ein Vektor.

ist der 4-Strom: (Bemerkung: Aus der Definition von S. 63

$j^\mu = c\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi = c\overline{\psi}\gamma^\mu \psi \longrightarrow$ also ein Vektor.)