

RELATIVISTISCHE QUANTENMECHANIK III: RELATIVISTISCHE LÖSUNGEN

LÖSUNGEN DER DIRAC-GLEICHUNG IN FREIEM RAUM

Wir suchen nun nach Lösungen der freien Dirac-Gleichung

(-i\partial + \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0

Für ruhende Teilchen lauten diese Lösungen, wie wir schon gesehen haben (S. 69):

\psi_{r=1,2}^{(+)}(x) = e^{-imc^2t/\hbar} u_r(mc, 0)
\psi_{r=1,2}^{(-)}(x) = e^{imc^2t/\hbar} v_r(mc, 0)
p_0 = (mc, 0)
Lösungen mit E > 0
Lösungen mit E < 0

wobei u_1(mc, 0) = (1, 0, 0, 0)^T; u_2(mc, 0) = (0, 1, 0, 0)^T
v_1(mc, 0) = (0, 0, 1, 0)^T; v_2(mc, 0) = (0, 0, 0, 1)^T

Diese Lösungen erfüllen \bar{\psi}_r^{(+)} \psi_{r'}^{(+)} = \delta_{rr'}, \bar{\psi}_r^{(-)} \psi_{r'}^{(-)} = \delta_{rr'}, \bar{\psi}_r^{(+)} \psi_{r'}^{(-)} = 0.

So wird die Normierung festgelegt.

Man muss bemerken, dass alle lineare Kombinationen von u_1 und u_2 (oder von v_1 und v_2) sind auch Lösungen der Dirac-Gleichung mit Eigenwert mc^2 (oder -mc^2). Die oben genannte Lösungen sind auch Eigenfunktionen von \Sigma^3 = (\sigma^3 0; 0 \sigma^3) (S. 81) mit Eigenwerten +1 (für r=1) und -1 (für r=2), und aus S. 85 sind die Eigenfunktionen von S^3 = \frac{\hbar}{2} \Sigma^3 (also die S^z = \pm \hbar/2 Lösungen).

Nun, suchen wir die Lösungen der Dirac-Gleichung für endlichen Impuls.

Wir machen den Ansatz:

\psi^{(+)}(x) = e^{-ipx} u_r(p)
\psi^{(-)}(x) = e^{ipx} v_r(p)

wobei \vec{p} = \gamma m \vec{v} (S. 53)
und p^0 = \frac{E(p)}{c} (S. 56)
mit E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}

* Die Spinoren $u_r(p)$, $v_r(p)$ können wir ganz einfach aus unserem Kenntnis über Spinortransformationen bekommen.

Wir bekommen die Lösungen mit endlichem Impuls aus den Lösungen in Ruhe, und zwar mit dem nützlichen Wentz-Boost. Wir müssen erstmal den Boost-Koeffizient η (S. 81) bestimmen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh \eta = \gamma \frac{v}{c} = \frac{\gamma m v}{mc} = \frac{|\vec{p}|}{mc} \\ \cosh \eta = \gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{p^0}{mc} \end{array} \right.$$

$$\text{Dann } \frac{+i\eta}{2} = \frac{+i\eta}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{pc/E}{1 + \sqrt{1 - p^2c^2/E^2}} = \frac{pc}{E + mc^2}$$

$$\frac{c\eta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\sqrt{E + mc^2}}{\sqrt{2mc^2}}$$

$$\frac{sh \eta}{2} = \frac{pc}{\sqrt{2mc^2} \sqrt{E + mc^2}}$$

Dann (aus S. 82)

$$S(\mathbb{L}_{\vec{v}}) = \frac{\sqrt{E + mc^2}}{\sqrt{2mc^2}} \mathbb{1} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{v}}{v} \frac{pc}{\sqrt{2mc^2} \sqrt{E + mc^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{E + mc^2}}{\sqrt{2mc^2}} \mathbb{1} + \frac{c\vec{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2mc^2} \sqrt{E + mc^2}}$$

$$\text{Damit } S(\mathbb{L}_{\vec{v}}) \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2mc^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{E + mc^2} \chi_r \\ \frac{c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{\sqrt{E + mc^2}} \chi_r \end{pmatrix}$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Somit bekommen wir die Spinoren $u_r(p)$, $v_r(p)$:

$$u_r(p) = \frac{1}{\sqrt{2mc^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{E+mc^2} \chi_r \\ \frac{c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{\sqrt{E+mc^2}} \chi_r \end{pmatrix}$$

$$v_r(p) = \frac{1}{\sqrt{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{\sqrt{E+mc^2}} \chi_r \\ \sqrt{E+mc^2} \chi_r \end{pmatrix}$$

Es ist ganz einfach zu sehen, dass:

$$\bar{u}_r(p) u_s(p) = \delta_{rs} \quad \left\| \quad \bar{u}_r(p) u_s(p) = 0 \right.$$

$$\bar{v}_r(p) v_s(p) = -\delta_{rs} \quad \left\| \quad \bar{v}_r(p) u_s(p) = 0 \right.$$

* DIRAC-GLEICHUNG FÜR DAS COULOMB-POTENTIAL. WASSERSTOFFATOM

* Auf S. 68 haben wir die Dirac-Gleichung mit Vektor- und Skalarpotential geschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = [c \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}) + \beta mc^2 + q\phi] \psi(\vec{x}, t)$$

Nun nehmen wir $\vec{A} = 0$, und $q\phi = \frac{-Ze^2}{r} \rightarrow$ Coulomb-Potential
 $= V(r)$

Sei $\psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\vec{x})$, dann:

zeitunabhängige
Dirac-Gleichung

$$E\psi(\vec{x}) = (c \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla}) + \beta mc^2 + V(r)) \psi(\vec{x})$$

* Da $V(r)$ ein Zentralpotential ist, es ist eine gute Idee (wie in QM-I), diese Gleichung in Kugelkoordinaten zu schreiben.

Aber vorher suchen wir einige Symmetrieeigenschaften des Hamilton-Operator.

* Aus S. (85) holen wir den Gesamtdrehimpuls eingeführt:

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}$$

Der Operator \vec{J} kommutiert mit dem Hamilton-Operator der Dirac-Gleichung (da $V = V(r)$ ein Zentralpotential ist). Folglich gibt es gemeinsame Eigenzustände um H, J^2 und J_z .

Im Gegenteil H kommutiert nicht mit L_z, Σ_z und L^2 .

Außerdem kommutiert \vec{J} mit $L^2, S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1}$, und $\vec{L} \cdot \vec{S}$, weil diese unter Drehungen invariant (also Skalar) sind.

* Suchen wir erstmal die 2-Komponentigen Pauli-Spinoren, die wir aus QM-I schon kennen. In diesem 2-dimensionalen Raum

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

Erstmal, in dem Basis um Eigenzustände um L^2, L_z, S^2, S_z holen wir:

$$|l, m_l; s, m_s\rangle = |l, m_l, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

In Ortsdarstellung: $|l, m_l; \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle \rightarrow \begin{cases} Y_{l, m_l}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y_{l, m_l}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

* Wir wollen nun die gemeinsame Eigenzustände um J^2, J_z, L^2, S^2 . Da $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, dann j kann

nur 2 mögliche Werte annehmen $j = l \pm 1/2$. Ausserdem

$m_j = m_l + m_s$. Die mögliche Eigenzustände sind also

$$f_{j, m_j}^{(+)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l, m_j-1/2}^{(\theta, \phi)} \\ \sqrt{\frac{l-m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l, m_j+1/2}^{(\theta, \phi)} \end{pmatrix} \quad \text{zu } j = l + 1/2$$

$$f_{j, m_j}^{(-)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l-m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l, m_j-1/2}^{(\theta, \phi)} \\ -\sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l, m_j+1/2}^{(\theta, \phi)} \end{pmatrix} \quad \text{zu } j = l - 1/2 \quad (\text{nur für } l > 0)$$

und die Vorfaktoren (die Wurzeln) sind Lebesgue-Gurdau-Koeffizienten.

* Diese Eigenzustände erfüllen (um nun an $t=1$)

$$\begin{aligned}
 J^2 \psi_{j,m_j}^{(\pm)} &= j(j+1) \psi_{j,m_j}^{(\pm)} & j &= 1/2, 3/2, \dots \\
 L^2 \psi_{j,m_j}^{(\pm)} &= l(l+1) \psi_{j,m_j}^{(\pm)} & l &= j \mp 1/2 \\
 J_z \psi_{j,m_j}^{(\pm)} &= m_j \psi_{j,m_j}^{(\pm)} & m_j &= -j, \dots, j
 \end{aligned}$$

→ Diese $\psi_{j,m_j}^{(\pm)}$ spielen eine ähnliche Rolle wie die Kugelflächenfunktionen in $QM-I$

* Außerdem, da $2\vec{L} \cdot \vec{S} = J^2 - L^2 - S^2 \rightarrow j(j+1) - l(l+1) - 3/4$

Dann $2\vec{L} \cdot \vec{S} \psi_{j,m_j}^{(\pm)} = \begin{cases} l \\ -l-1 \end{cases} \psi_{j,m_j}^{(\pm)} = \begin{cases} -1 + (j+1/2) \\ -1 - (j+1/2) \end{cases} \psi_{j,m_j}^{(\pm)} ; j = l \pm 1/2$

Daher führen wir nun

$$K = 1 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \Rightarrow K \psi_{j,m_j}^{(\pm)} = \pm (j+1/2) \psi_{j,m_j}^{(\pm)} \equiv K \psi_{j,m_j}^{(\pm)}$$

* Also, für jede $j = 1/2, 3/2, \dots$ gibt es zwei Pauli-Spinoren $\psi_{j,m_j}^{(+)}$ und $\psi_{j,m_j}^{(-)}$. Die sind eigentlich miteinander verknüpft:

$$\psi_{j,m_j}^{(+)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{r} \psi_{j,m_j}^{(-)} \quad (\text{beweis es!})$$

* Wir können die beide Pauli-Spinoren in einer Kompakten Form schreiben:

$$\psi_{j,m_j}^l \equiv \begin{cases} \psi_{j,m_j}^{(+)} & l = j - 1/2 \\ \psi_{j,m_j}^{(-)} & l = j + 1/2 \end{cases}$$

Da $Y_{lm}(-\vec{x}) = (-1)^l Y_{lm}(\vec{x}) \rightarrow \psi_{j,m_j}^l(-\vec{x}) = (-1)^l \psi_{j,m_j}^l(\vec{x})$

* Der Dirac-Kamilton-Operator $H = c \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla}) + \beta mc^2 + V(r)$ ist auch invariant gegen Raumspiegelungen, also gesehen über (S. 86)

$$\mathcal{P} = \beta \mathcal{P}^{(0)}$$

* Das ist klar weil

$$\beta P^{(0)} [-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 + V(r)] \psi(\vec{x})$$

$$= \beta [-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot (-\vec{\nabla}) + \beta mc^2 + V(r)] \psi(-\vec{x}) \quad \leftarrow \beta \vec{\alpha} = -\vec{\alpha} \beta$$

$$= [-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot (+\vec{\nabla}) + \beta mc^2 + V(r)] \beta P^{(0)} \psi(\vec{x})$$

Also $(\beta P^{(0)}, H) = 0$

Da $(\beta P^{(0)})^2 = 1 \rightarrow \beta P^{(0)}$ hat nur Eigenwerte ± 1 (also gerade ungerade)

* Man kann dann gerade und ungerade Eigenzustände von H finden.

* Wir suchen nun nach Lösungen der Dirac-Gleichung, also nach 4-Spinoren, die wir aus Pauli-Spinoren zusammensetzen werden. Wir nutzen den Lösungsansatz:

[Wir haben also Radial- und Winkel-Anteil wie in QM-I]

$$\psi_{j,m_j}^{\pm} = \begin{bmatrix} i \frac{G_{ej}(r)}{r} \phi_{j,m_j}^{(+)} \\ \frac{F_{ej}(r)}{r} \phi_{j,m_j}^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \frac{G_{ej}(r)}{r} \phi_{j,m_j}^{\pm} \\ \frac{F_{ej}(r)}{r} (\vec{\sigma} \cdot \hat{x}) \phi_{j,m_j}^{\pm} \end{bmatrix} \quad (\text{es gibt die Parität})$$

Quellen wir die Parität:

$$\beta P^{(0)} \psi_{j,m_j}^{\pm}(\vec{x}) = \beta \psi_{j,m_j}^{\pm}(-\vec{x}) = \beta \begin{bmatrix} i \frac{G_{ej}(r)}{r} (-1)^{\pm} \phi_{j,m_j}^{\pm} \\ i \frac{F_{ej}(r)}{r} (\vec{\sigma} \cdot \hat{x}) (-1)^{\pm+1} \phi_{j,m_j}^{\pm} \end{bmatrix} = (-1)^{\pm} \psi_{j,m_j}^{\pm}(\vec{x})$$

Der Dirac-Klamitter-Operator H wird als Matrix so geschrieben:

$$H = \begin{pmatrix} m - Z\alpha/r & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m - Z\alpha/r \end{pmatrix} ; \quad \left[\text{Benennung: hier } c=1, \text{ und } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \rightarrow \text{Feinstrukturkonstante } (=1/137) \right]$$

* Wir suchen nach Lösungen der Gleichung $H \psi = E \psi$

* Wir werden folgendes brauchen:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\sigma} \cdot \hat{x})(\vec{\sigma} \cdot \hat{x}) &= 1 \\
 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) [f(r) \ell_{j m_j}^e] &= \vec{p} \cdot \nabla / r = -i \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{x}}{r} \right) = -i \left(\frac{2}{r} - \nabla \cdot \frac{\vec{x}}{r^3} \right) = \frac{-2i}{r} \\
 &= (\vec{\sigma} \cdot \hat{x})(\vec{\sigma} \cdot \hat{x})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) f(r) \ell_{j m_j}^e = (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\
 &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{r} (\vec{x} \cdot \vec{p} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L}) f(r) \ell_{j m_j}^e = \frac{1}{r} (\vec{x} \cdot \vec{p} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L})
 \end{aligned}$$

$$= -i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{r} \left\{ r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + [1 \mp (j + \frac{1}{2})] f(r) \right\} \ell_{j m_j}^e$$

↑
j = l ± 1/2

Dann

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \hat{x}) f(r) \ell_{j m_j}^e = \frac{-i}{r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \pm (j + \frac{1}{2}) \right\} f(r) \ell_{j m_j}^e \quad \text{für } j = l \pm \frac{1}{2}$$

* Wir können nun die gesamte Winkelanteil der Gleichung eliminieren, und wir bekommen gekoppelte Gleichungen für $G_{ej}(r)$ und $F_{ej}(r)$

(Bemerkung: Das ist natürlich fast identisch wie für die Lösung der Schrödinger-Gleichung in DM-I für Zentralpotentiale.)

$$\begin{aligned}
 (E - m + \frac{Z\alpha}{r}) G_{ej}(r) &= -\frac{dF_{ej}(r)}{dr} \mp (j + \frac{1}{2}) \frac{F_{ej}(r)}{r} \\
 (E + m + \frac{Z\alpha}{r}) F_{ej}(r) &= \frac{dG_{ej}(r)}{dr} \mp (j + \frac{1}{2}) \frac{G_{ej}(r)}{r}
 \end{aligned}$$

$j = l \pm \frac{1}{2}$

* Sei $\alpha_1 \equiv m + E$; $\alpha_2 \equiv m - E$; $\sigma \equiv \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$; $\gamma \equiv Z\alpha$
 $\rho \equiv r\sigma$; $k \equiv \pm(j + \frac{1}{2})$

[Bemerkung: Für Bindungszustände $E < m$, und daher $\alpha_2 > 0$.]

Dann:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho} \right) F - \left(\frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} \right) G &= 0 \\
 \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{k}{\rho} \right) G - \left(\frac{\alpha_1}{\sigma} + \frac{\gamma}{\rho} \right) F &= 0
 \end{aligned}$$

(wenn man an mir vergessen die ℓ_j subindexes)

* Sei $F(\rho) = e^{-\rho} f(\rho)$
 $G(\rho) = e^{-\rho} g(\rho)$ } dann:

$$\left. \begin{aligned} f' - f + \frac{kf}{\rho} - \left(\frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\gamma}{\rho}\right)g &= 0 \\ g' - g - \frac{kg}{\rho} - \left(\frac{\alpha_1}{\sigma} + \frac{\gamma}{\rho}\right)f &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dimensionlose
Radialgleichungen

* Wir wollen nun dies Gleichungssystem mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes lösen:

$$\begin{aligned} f &= \rho^s (b_0 + b_1 \rho + \dots) \\ g &= \rho^s (a_0 + a_1 \rho + \dots) \end{aligned} \quad \text{wobei } \begin{cases} a_0 \neq 0 \\ b_0 \neq 0 \end{cases}$$

Wir setzen den Ansatz ein, und vergleichen wir die Koeffizienten von $\rho^{s+\nu-1}$ mit $\nu > 0$:

$$\left. \begin{aligned} (s+\nu+k)b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma a_\nu - \frac{\alpha_2}{\sigma} a_{\nu-1} &= 0 \\ (s+\nu-k)a_\nu - a_{\nu-1} - \gamma b_\nu - \frac{\alpha_1}{\sigma} b_{\nu-1} &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

Für $\nu=0$:

$$\begin{cases} (s+k)b_0 + \gamma a_0 = 0 \\ (s-k)a_0 - \gamma b_0 = 0 \end{cases}$$

Das hat nur eine nicht-triviale Lösung (also eine Lösung verschieden als $(a_0=0, b_0=0)$) wenn $\begin{vmatrix} s+k & \gamma \\ -\gamma & s-k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (s^2 - k^2) + \gamma^2 = 0$

$$\Rightarrow s = \pm (k^2 - \gamma^2)^{1/2}$$

Wir nehmen $s > 0$ (sonst ρ^s würde in $\rho=0$ divergieren) also

$$s = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$$

* Aus dem Gleichungssystem (*):

$$\left. \begin{aligned} \sigma(s+k)b_\nu - \sigma b_{\nu-1} + \gamma \sigma a_\nu - \alpha_2 a_{\nu-1} &= 0 \\ -\alpha_2 \gamma b_\nu - \left(\frac{\alpha_2 \alpha_1}{\sigma}\right) b_{\nu+1} + \alpha_2 (s+\nu-k) a_\nu - \alpha_2 a_{\nu-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ wir subtrahieren:}$$

$$\boxed{[\sigma(s+k) + \alpha_2 \gamma] b_\nu + [\gamma - \alpha_2 (s+\nu-k)] a_\nu = 0} \quad (**)$$

Für große ν : $\sigma \nu b_\nu - \alpha_2 \nu a_\nu = 0 \Rightarrow b_\nu = \frac{\alpha_2}{\sigma} a_\nu$

$\Rightarrow \nu b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma a_\nu - \frac{\alpha_2}{\sigma} a_{\nu-1} = 0$

$\Rightarrow \nu b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma \frac{\sigma}{\alpha_2} b_\nu - b_{\nu-1} = 0 \rightarrow b_\nu = \frac{2}{\nu} b_{\nu-1}$

und genauso: $a_\nu = \frac{2}{\nu} a_{\nu-1}$

Dann $\sum a_\nu \rho^\nu \sim \sum b_\nu \rho^\nu \sim \sum \frac{(2\rho)^\nu}{\nu!} \sim e^{2\rho}$

Dann würden $F(\rho)$ und $G(\rho)$ für große ρ als e^ρ divergieren, und das kann nicht sein. D.h. dass die Reihe muss irgendwann gebrochen werden. Diese Bedingung wird uns die möglichen Energien ergeben.

* Wir nehmen also an, dass die ersten verschwindenden Koeffizienten $a_{N+1} = b_{N+1} = 0$ sind. Aus der Rekursionsrelationen (*) von S. 97:

$\alpha_2 a_N = -\sigma b_N \quad N = 0, 1, 2, \dots$
 \hookrightarrow Radiale Quantenzahl

Aus der Rekursion (***) von S. 97:

$b_N [\sigma(s+N+k) + \alpha_2 \gamma + \sigma(s+N-k) - \frac{\sigma^2}{\alpha_2} \gamma] = 0$

Da wir wollen $b_N \neq 0$ dann

$2\sigma(s+N) = \gamma(\alpha_1 - \alpha_2) = 2E\gamma$

Da $\gamma = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = \sqrt{m^2 c^4 - E^2}$ (wir führen nur c und \hbar ~~noch mal ein~~ ^{wieder})

$2(m^2 c^4 - E^2)^{1/2} (s+N) = 2E\gamma$

Also $E = mc^2 \left[1 + \frac{\gamma^2}{(s+N)^2} \right]^{-1/2} \rightarrow$ ENERGIE NIVEAUS

* Für $N=0 \rightarrow \alpha_2 a_0 = -\sigma b_0 \rightarrow \frac{b_0}{a_0} = -\frac{\alpha_2}{\sigma} < 0$

aber aus S. 97: $\frac{b_0}{a_0} = \frac{-\gamma}{s+k}$

da $S = \sqrt{k^2 \hbar^2} < |k|$, wenn $k < 0 \rightarrow \frac{b_0}{a_0}$ wäre > 0 . Dann, für

$N=0 \rightarrow k > 0$

* Für $N > 0$ sind alle $k > 0$ und $k < 0$ möglich (ganzzahlig)

Man definiert die Hauptquantenzahl:

$n = N + |k| = N + j + 1/2$

Dann sind die Energieebenen:

$E_{n,j} = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}$

* Bemerkung: Da $E_{n,j}$ hängt von $|k|$ ab, dann $k > 0$ und $k < 0$ ergeben dieselbe Energie. Daher sind die Energieebenen (außer die mit $N=0$) doppel entartet.

* Bei Entwicklung nach $(Z\alpha)$ findet man das nicht-relativistische Resultat wieder

$E_{n,j} = mc^2 \left\{ 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{(Z\alpha)^4}{2n^3} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) + O((Z\alpha)^6) \right\}$

Ruheenergie nichtrelativistische Resultat hebt Entartung in j auf \Rightarrow FEINSTRUKTUR (!!)

[Bemerkung: Eine Diskussion über die Feinstruktur in QM-I findet ihr in meinem Skript von QM-I, S. 177.]

* Ich erinnere euch (aus QM-I), dass die Feinstruktur (also die j -Abhängigkeit der Energie) erscheint aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung ($H_{SB} \propto \vec{L} \cdot \vec{S}$). Sie ist also ein relativistischer Effekt!

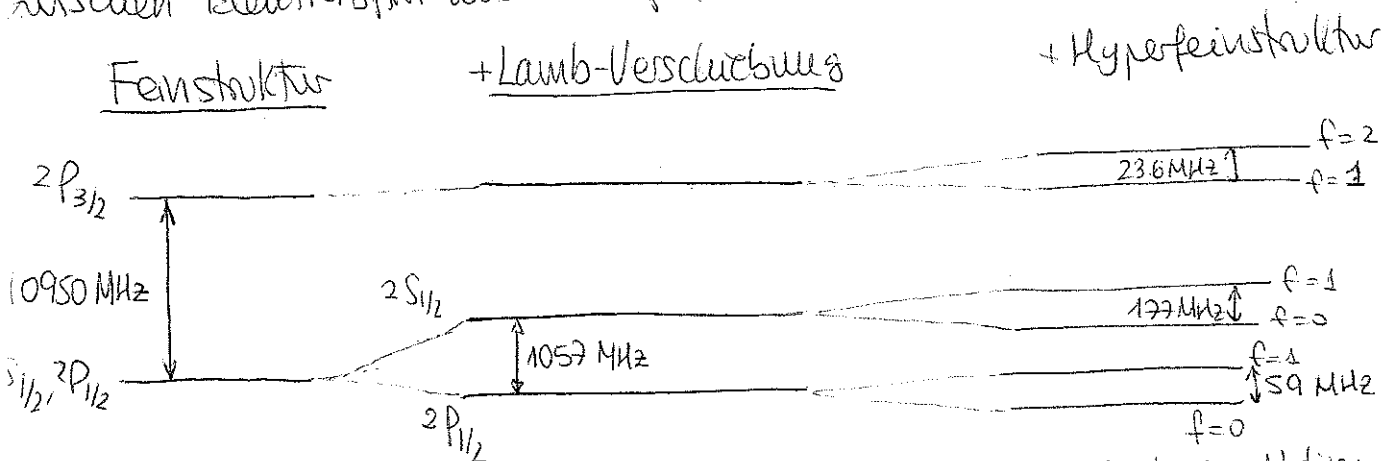
* Quellen mir nur die Energieebenen E_{nj} des relativistischen Wasserstoffatoms

$$\begin{aligned}
 n=3 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa=3}{\kappa=-2} {}^3D_{5/2} \\ \frac{\kappa=2}{\kappa=-1} {}^3P_{3/2} \\ \frac{\kappa=1}{\kappa=-1} {}^3S_{1/2} \\ \frac{\kappa=-1}{\kappa=-1} {}^3P_{1/2} \end{array} \right. \\
 n=2 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa=2}{\kappa=-1} {}^2P_{3/2} \\ \frac{\kappa=1}{\kappa=-1} {}^2S_{1/2} \\ \frac{\kappa=-1}{\kappa=-1} {}^2P_{1/2} \end{array} \right. \begin{array}{l} \leftarrow \sqrt{1 - \frac{1}{4}(2\alpha)^2} \\ \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - (2\alpha)^2}} \end{array} \\
 n=1 & \left\{ \frac{\kappa=1}{\kappa=-1} {}^1S_{1/2} \right. \rightarrow \frac{E}{mc^2} = \sqrt{1 - (2\alpha)^2}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir folgen hier die Standardnotation \sum_j^n mit $X = \{l=0, P(l=1), D(l=2), \dots\}$

* Wir sehen, dass die Niveaus $\{^2S_{1/2}, ^2P_{1/2}\}$, $\{^3S_{1/2}, ^3P_{1/2}\}$, $\{^3P_{3/2}, ^3D_{3/2}\}$ entartet sind. Wie schon erwähnt, E_{nj} hängt nur von kl ab, und deswegen für $N \neq 0$ (also für $n \neq j + 1/2$) hat man doppel Entartung. In Gegenteil, für $n = j + 1/2$ ($^1S_{1/2}, ^2P_{3/2}, ^3D_{5/2}, \dots$) hat man keine Entartung.

Bemerkung: Darüberhinaus sind weitere kleinere Aufspaltungen aufgrund der Lamb-Verschiebung (das lässt sich nur mit Hilfe der Quantenelektrodynamik (QED) verstehen) und der Hyperfinestruktur (die aus der Kopplung zwischen Elektronspin und Kernspin stammt). z.B. für $n=2$ (H-Atom):



wobei $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ ($\vec{I} = \text{Kernspin}$), und f ist zu F^2 assoziiert. (siehe meine Notizen - OIT S. 183)

* WELLENPAKETE UND ZITTERBEWEGUNG

* Bisher haben wir nur stationäre Zustände untersucht. Nun wollen wir allgemeine Lösungen der zeitabhängigen Dirac-Gleichung studieren. Das werden wir genau wie in QM-I machen, also mit Superpositionen von stationären Zuständen für freie Teilchen (s. 90-92). Wir werden also Wellenpakete bauen und untersuchen.

* Zuerst werden wir nur Zustände mit positiver Energie superponieren:

$$\psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{r=1,2} b(p,r) u_r(p) e^{-ipx} \quad \left(\begin{array}{l} \text{hier } t=c=1 \\ E = \sqrt{p^2 + m^2} \end{array} \right)$$

wobei $u_r(p)$ die freien Spinoren positiver Energie sind (s. 91), und $b(p,r)$ komplexe Amplituden sind. Der Faktor $\frac{m}{(2\pi)^3 E}$ kommt wegen einer Normierungsbedingung, die wir später diskutieren werden.

(Bemerkung $\frac{d^3p}{E}$ ist Lorentz-invariant)

* Die zugehörige Dichte ist (s. 63)

$$j^{(+)\ 0}(t, \vec{x}) = \psi^{(+)\dagger}(t, \vec{x}) \psi^{(+)}(t, \vec{x})$$

Wir integrieren die Dichte über den gesamten Raum:

$$\int d^3x j^{(+)\ 0}(t, \vec{x}) = \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{EE'} \sum_{r,r'} b^*(p,r) b(p',r') u_r^\dagger(p) u_{r'}(p')$$

$\times e^{i(E-E')t} e^{-i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}}$

$$\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$\leftarrow u_r^\dagger(p) u_{r'}(p) = \bar{u}_r(p) \gamma^0 u_{r'}(p) = \frac{E}{m} \delta_{rr'}$$

$$= \sum_r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} |b(p,r)|^2 = 1$$

(Beweis es aus der Ergebnis von S. 92!)

Es wird im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsdichte auf 1 normiert. Quell mal, dass die zeitabhängigkeit wegfällt \Rightarrow die totale Dichte ist zeitunabhängig. Aus dieser Gleichung ist die Normierung der Amplituden $b(p,r)$ festgelegt.

* Quellen wir nun den Gesamtstrom:

$$\vec{J}^{(+)} = \int d^3x \vec{J}^{(+)}(t, \vec{x}) \stackrel{S. 63}{=} \int d^3x \psi^{(+)\dagger}(t, \vec{x}) \vec{\alpha} \psi^{+}(t, \vec{x})$$

$$= \int d^3x \iint \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{EE'} \sum_{r, r'} b^*(p, r) b(p', r')$$

$$\times u_r^\dagger(p) \vec{\alpha} u_{r'}(p') e^{i(E-E')t} e^{-i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r, r'} \frac{m^2}{E^2} b^*(p, r) b(p, r') u_r^\dagger(p) \vec{\alpha} u_{r'}(p)$$

* Bemerkung: Wir benutzen nun die sogen. Gordon-Identität, die besagt, daß für 2 Lösungen der freien Dirac-Gleichung zu positiver Energie, $u_r(p)$ und $u_{r'}(q)$ gilt:

$$\bar{u}_r(p) \gamma^\mu u_{r'}(q) = \frac{1}{2m} \bar{u}_r(p) [(\not{p} + \not{q})^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p - q)_\nu] u_{r'}(q)$$

Wir werden das hier nicht beweisen. Versuch es!

* Aus der Gordon-Identität:

$$u_r^\dagger(p) \vec{\alpha} u_{r'}(p) = \bar{u}_r^\dagger(p) \vec{\gamma} u_{r'}(p) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\vec{p}}{m} \underbrace{\bar{u}_r(p) u_{r'}(p)}_{\delta_{rr'}}$$

Dann:

$$\vec{J}^{(+)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{m^2}{E^2} |b(p, r)|^2 \frac{\vec{p}}{m}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{m}{E} |b(p, r)|^2 \frac{\vec{p}}{E} = \left\langle \frac{\vec{p}}{E} \right\rangle \leftarrow \text{Mittelwert.}$$

Andererseits ist die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets

$$\vec{v}_g = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \frac{\vec{p}}{E}$$

Daher $\vec{J}^{(+)} = \langle \vec{v}_g \rangle \leftarrow$ das ist so auch in QM-I. Also, bitter keine Überraschung.

* Bisher haben wir nur Zustände positiver Energie betrachtet, Aber, wenn wir das gesamte Problem untersuchen wollen, dann sollten auch Zustände negativer Energie auftauchen. Hier werden wir doch Überraschungen treffen!

* Nehmen wir als unserer Anfangsspinor (für $t=0$) die Gauß-Funktion:

$$\psi(0, \vec{x}) = \frac{1}{(2nd^2)^{3/4}} e^{i\vec{p}_0 \cdot \vec{x}} e^{-x^2/4d^2} \omega$$

wobei $\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ also zum $t=0$ kommen nur Anteile ^{mit} positiver Energie vor.

* Gucken wir nun was passiert für $t > 0$. Der allgemeinste Spinor kann durch eine Superposition ^{Spinoren mit} positiver und negativer Energien dargestellt werden:

$$\psi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_r \left[b(p, t) u_r(p) e^{-ipx} + d^*(p, t) v_r(p) e^{ipx} \right]$$

Wie für die zeitentwicklung um Wellenpakete in QM-I brauchen wir nur die Anfangskoeffizienten $b(p, t)$ und $d^*(p, t)$. Für so was machen wir erstmal die Fourier-Transformation des Anfangsspinors:

$$\int d^3x e^{i\vec{p}_0 \cdot \vec{x}} e^{-x^2/4d^2} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} = (4nd^2)^{3/2} e^{-(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 d^2}$$

Dann

$$\psi(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ (8nd^2)^{3/4} e^{-(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 d^2} \omega \right\} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

Andererseits:

$$\psi(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_r \left[b(p, t) u_r(p) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + d^*(p, t) v_r(p) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{m}{E} \sum_r \left[b(p, t) u_r(p) + d^*(\tilde{p}, t) v_r(\tilde{p}) \right] \right\} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

\downarrow
 $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$

Dann:

$$(8\pi d^2)^{3/4} e^{-(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 d^2} w = \frac{m}{E} \sum_r [b(p,r) u_r(p) + d^*(\vec{p},r) v_r(\vec{p})]$$

Wir multiplizieren mit $u_r^\dagger(p)$

$$(8\pi d^2)^{3/4} e^{-(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 d^2} u_r^\dagger(p) w = \frac{m}{E} \sum_s (b(p,s) \underbrace{u_s^\dagger(p) u_r(p)}_{\frac{3}{4} \delta_{rs}} + d^*(\vec{p},s) \underbrace{u_r^\dagger(p) v_s(\vec{p})}_0)$$

$$= b(p,r)$$

Dann:

$$b(p,r) = (8\pi d^2)^{3/4} e^{-(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 d^2} u_r^\dagger(p) w$$

und genauso (man multipliziert mit $v_r^\dagger(\vec{p})$):

$$d^*(p,r) = (8\pi d^2)^{3/4} e^{-(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 d^2} v_r^\dagger(\vec{p}) w$$

* Ein allgemeines Wellenpaket enthält also Komponenten positiver und negativer Energie. Wir werden nun die physikalischen Konsequenzen dieser Wellenpakete studieren.

* Studieren wir den Fall $\vec{p}_0 = 0$ (nicht laufendes Wellenpaket).

Da $w = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$, und aus S. 92 haben wir dass ($c=1$):

$$\left. \begin{aligned} b(p,r) &\propto \sqrt{E+m} \\ d^*(p,r) &\propto \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{\sqrt{E+m}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^*(p,r)}{b(p,r)} \propto \frac{|\vec{p}|}{E+m}$$

* Wenn die Ausdehnung des Pakets groß ist: $d \gg 1/m$, dann ist $|\vec{p}| \approx 1/d \ll m$, und daher $d^*(p,r) \ll b(p,r)$. In diesem Fall können wir die negative-Energiekomponenten vernachlässigen.

[Bemerkung: Wenn wir \hbar und c noch mal einsetzen, dann $\frac{1}{m} \rightarrow \frac{\hbar}{mc}$ \rightarrow also die Compton-Länge (S. 88)]

* Fall das Teilchen stärker als die Compton-Wellenlänge lokalisiert
wellen, $d \ll 1/m$, dann spielen die Lösungen mit negativer Energie doch
eine wichtige Rolle, weil $|\vec{p}| \sim d^{-1} \gg m \rightarrow d^*(p,r)/b(p,r) \sim 1$.

* Die Normierung

$$\int d^3x \psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_r \left(|b(p,r)|^2 + |d(p,r)|^2 \right) = 1$$

ist aufgrund der Kontinuitätsgleichung ^(S.64) unabhängig von der Zeit

* Quellen von der Gesamtstrom für den Spinor

* Bemerkung: Hier benutzen wir (ohne Beweis) die Gordon-Identität
von S.102 und ebenfalls die ähnliche Identität

$$\bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^\mu \psi_{r'}(q) = \frac{1}{2m} \bar{u}_r(\vec{p}) \left[(\vec{p}-q)^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (\vec{p}+q)_\nu \right] \psi_{r'}(q)$$

$$J^i(t) = \int d^3x \psi^\dagger(t, \vec{x}) \alpha^i \psi(t, \vec{x})$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \left\{ \frac{p^i}{E} \sum_r \left[|b(p,r)|^2 + |d(p,r)|^2 \right] + i \sum_{r,r'} \left[b^*(\vec{p},r) d^*(p,r') e^{2iEt} \bar{u}_r(\vec{p}) \sigma^{i0} u_{r'}(p) - b(\vec{p},r) d(p,r') e^{-2iEt} \bar{u}_{r'}(p) \sigma^{i0} u_r(\vec{p}) \right] \right\}$$

zeitunabhängig

zeitabhängig (!!)

→ Dieser Term enthält Oszillationen mit Frequenzen, die größer als $\frac{2mc^2}{h} \approx 1.6 \times 10^{21} \text{ Hz}$ für ein Elektron sind.

Man bezeichnet diese oszillierende Bewegung als Zitterbewegung (auch in der englischen Literatur!)

* Quellen von der Amplitude der Zitterbewegung

Wir werden erstmal den Mittelwert von \vec{x} bestimmen:

$$\langle \vec{x} \rangle = \int d^3x \psi^\dagger(t, \vec{x}) \vec{x} \psi(t, \vec{x})$$

$$= \int d^3x \psi^\dagger(0, \vec{x}) e^{iHt} \vec{x} e^{-iHt} \psi(0, \vec{x})$$

Dann:

$$\frac{d\langle \vec{x} \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger(0, \vec{x}) e^{iHt} \vec{x} e^{-iHt} \psi(0, \vec{x})$$

$$= \int d^3x \psi^\dagger(0, \vec{x}) e^{iHt} (iH\vec{x} - i\vec{x}H) e^{-iHt} \psi(0, \vec{x})$$

$$= \int d^3x \psi^\dagger(t, \vec{x}) i[H, \vec{x}] \psi(t, \vec{x}) \quad \begin{matrix} H = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \\ i[H, \vec{x}] = \vec{\alpha} \end{matrix}$$

$$= \int d^3x \psi^\dagger(t, \vec{x}) \vec{\alpha} \psi(t, \vec{x}) \equiv \vec{J}(t)$$

Dann

$$\langle x^i \rangle_t = \langle x^i \rangle_{t=0} + \int_0^t dt' J^i(t')$$

$$= \langle x^i \rangle_{t=0} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m p^i}{E^2} \sum_r [|b(p, r)|^2 + |d(p, r)|^2] t$$

$$+ \sum_{r, r'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{2E^2} [b^*(\tilde{p}, r) d^*(p, r') e^{2iEt} \bar{u}_r(\tilde{p}) \sigma^{i0} u_{r'}(p) + b(\tilde{p}, r) d(p, r') e^{-2iEt} \bar{v}_{r'}(p) \sigma^{i0} u_r(\tilde{p})]$$

* Der Mittelwert von x^i enthält also Oszillationen mit der Amplitude $\sim 1/E \sim 1/m \rightarrow \frac{h}{mc} \equiv \frac{\text{Compton-Wellenlänge}}{(3.9 \times 10^{-13} \text{ m})}$ für den Elektron.

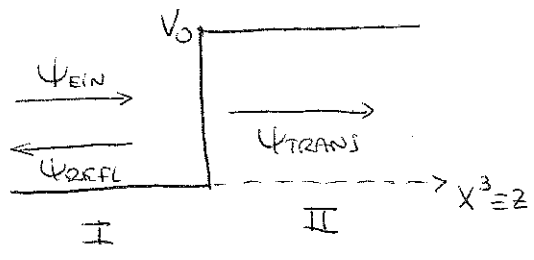
* Die Zitterbewegung kommt von der Interferenz von Komponenten mit positiver und negativer Energie.

(Bewertung: Aufgrund der extrem kleinen Amplituden, wurde die Zitterbewegung eines freien relativistischen Teilchens nie beobachtet. Interessanterweise, würde 2010 das Verhalten eines solchen Teilchens mit einem eingesparten Ion simuliert !!)

* KLEIN-PARADOXON

* Wir haben gerade gesehen, dass die relativistische Quantenmechanik zu überraschenden Effekten, wie die Zitterbewegung, führen kann. Nun wollen wir noch einen überraschenden Effekt untersuchen, das sogen. Klein-Tunneling oder Klein-Paradoxon.

* Wir untersuchen nun ein wohl bekanntes Problem von QM-I, eine von links einlaufende Welle die auf einer Potentialschwelle stößt.



* Aus QM-I wissen wir, dass wenn die Energie E der einfallenden Welle kleiner als V_0 ist, dann wird die Welle reflektiert, und dringt in den klassisch verbotenen Bereich wie e^{-qx^3} wobei $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}$ ($\hbar = 1$)

* Gucken wir uns jetzt in relativistischer Quantenmechanik. Nehmen wir als einfallende Lösung die Lösung mit Impuls k , positive Energie und Spin $= +1/2$; aus S. (92) ($\hbar = c = 1$)

$$\psi_{\text{EIN}}(x^3) = e^{ikx^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $E = \sqrt{k^2 + m^2}$

$$\vec{p} = \hbar k \vec{e}_z$$

$\hbar = 1 = c$

* Bemerkung: Aus S. (92): $u_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2}mc^2} \begin{pmatrix} \sqrt{E+mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \downarrow \frac{1}{\sqrt{2}m} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir vergessen hier die Normierungskonstanten.

* Die reflektierte Lösung ist der Form:

$$\psi_{\text{REFL}}(x^3) = a e^{-ikx^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} + b e^{-ikx^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{pmatrix}$$

reflektierte Welle mit dem selben Spin

reflektierte Welle mit entgegengesetztem Spin (wir werden sofort sehen dass eigentlich $b=0$)

* Gucken wir nun in Gebiet II. Wir definieren den Impuls q so

$$\text{dass: } E - V_0 = \sqrt{q^2 + m^2} \rightarrow q = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}$$

Die Lösung in Gebiet II ist also der Form:

$$\psi_{\text{TRANS}}(x^3) = c e^{iqx^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ q/(E - V_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix} + d e^{iqx^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -q/(E - V_0 + m) \end{pmatrix}$$

* Nun machen wir hier wie in QM I. Wir verlangen Stetigkeit an

$x = 0$:

$$\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{EIN}}(0) + \psi_{\text{REFL}}(0) = \psi_{\text{TRANS}}(0)$$

also:

$$\left. \begin{pmatrix} 1+a \\ b \\ \frac{k}{E+m}(1-a) \\ \frac{k}{E+m}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ \frac{q}{E-V_0+m}c \\ \frac{-q}{E-V_0+m}d \end{pmatrix} \right\} \begin{aligned} 1+a &= c \\ 1-a &= \left[\frac{q}{k} \frac{E+m}{E-V_0+m} \right] c \equiv r c \\ b &= d \\ b &= - \left[\frac{q}{k} \frac{E+m}{E-V_0+m} \right] d \end{aligned}$$

* Dann $b = d = 0 \rightarrow$ der Spin wird nicht umgeklappt

* Gucken wir nun ganz genau den Ausdruck:

$$q = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}$$

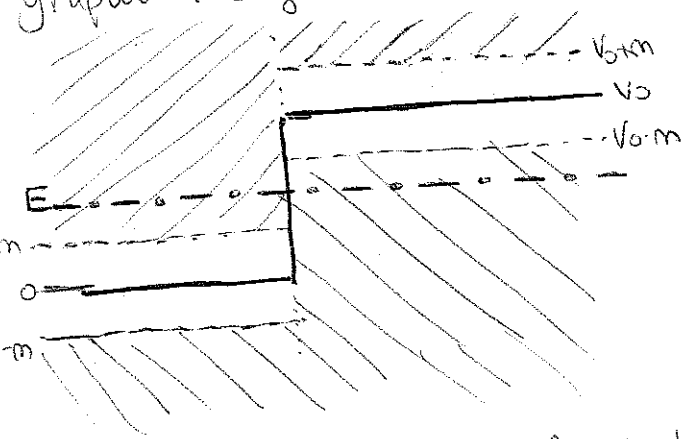
• Wenn $|E - V_0| < m$, also wenn $V_0 - m < E < V_0 + m$, dann q ist imaginär, und die Lösung fällt im Bereich II exponentiell ab. Also wie in QM I.



• Aber wenn $V_0 \geq E + m$, dann q ist reell und man erhält eine oszillierende durchgehende Welle in II (!!). Das ist das sogenannte Klein-Paradoxon.

* Wie können wir das verstehen?

- * Im Bereich I, liegen die Lösungen mit positiver Energie im Intervall $E > m$, und die mit negativer Energie im Intervall $E < -m$
- * Im Bereich II, liegen die positiv-Energie-Lösungen im Intervall $E < -m + V_0$ und die mit negativer Energie im Intervall $E > m + V_0$

Graphisch dargestellt:



wobei  → Positive Energien
 → Negative Energien

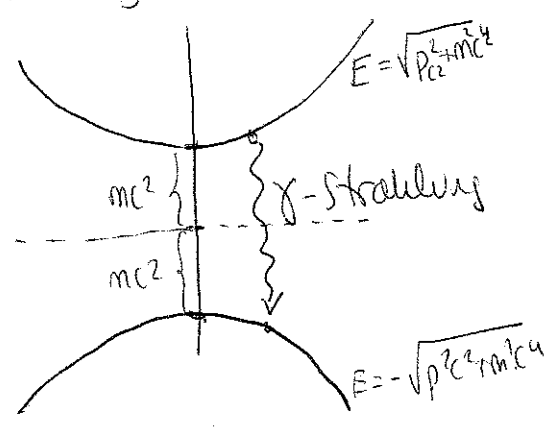
* Für $V_0 > m$ die Lösungen im Bereich II mit "negativer" Energie eigentlich positive Energie besitzen

* Wenn $V_0 > 2m$ → dann liegt die Energie der Lösungen mit "negativer" Energie im Bereich II im Energiebereich der Lösungen mit positiver Energie im Bereich I.

Es ist klar von der Abbildung dass wenn $E \leq V_0 - m \rightarrow V_0 \geq E + m$ dann hat man Transmission wegen des Übergangs in Zustände "negativer" Energie.

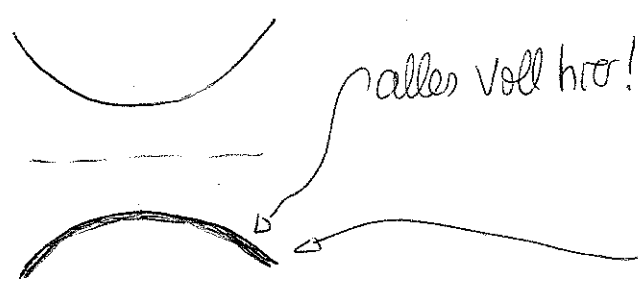
* LÖCHER - THEORIE

* Wie schon mehrmals erwähnt, ergibt die Dirac-Gleichung Lösungen mit negativer Energie; graphisch dargestellt:



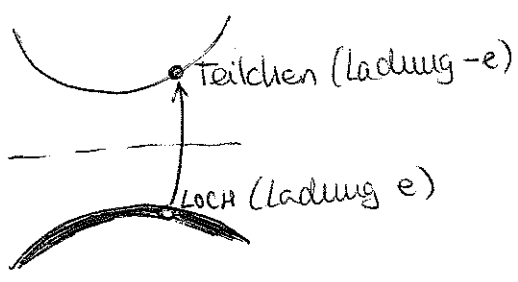
* Die Existenz dieser Zustände ist aber problematisch; z.B. wegen der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld kann es Übergänge ~~zwischen~~ ^{von} Zuständen $E > 0$ in Zustände mit $E < 0$ geben (siehe Abbildung). Atome und damit die gesamte Materie wäre also instabil (und das ist glücklicherweise nicht so!).

* Dirac schlug einen Ausweg vor. Alle Zustände negativer Energie sind besetzt. Dann können Teilchen mit $E > 0$ wegen des Pauli-Verbots nicht in die Zustände mit $E < 0$ übergehen.



* Der Vakuumzustand besteht in diesem Bild aus einem unendlichen See von Teilchen (Dirac-See) mit $E < 0$.

* Einen angeregten Zustand des Vakuums erhält man wenn ein Elektron mit $E < 0$ in einen Zustand mit $E > 0$ übergeht, und hinterläßt ein Loch mit Ladung $-(-e) = e$



* Also wenn wir ein Teilchen des Sees entfernen, dann bleibt ein Loch über, ein Loch mit $E > 0$ und positiver Ladung.

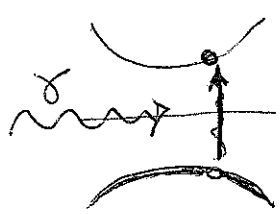
* Die Abwesenheit eines Zustandes mit $E < 0$ stellt ein Antiteilchen dar. Für das Elektron ist dies das Positron.

* Quellen wir den Spinor mit $E < 0$ (S. 92), z.B. für Spin \uparrow

$$e^{iE_p t - i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \rightarrow \begin{matrix} \text{Energie} & -E_{p'} \\ \text{Impuls} & -\vec{p}' \\ \text{Spin} & \uparrow \end{matrix}$$

Wenn dieser Zustand nicht besetzt ist \rightarrow Positron mit $\begin{cases} \text{Energie} & E_{p'} \\ \text{Impuls} & \vec{p}' \\ \text{Spin} & \downarrow \end{cases}$

* Man kann Positron-Elektron-Paaren mit γ -Strahlung erzeugen:



* Das γ -Photon mit Energie $h\nu$ und Impuls $h\vec{k}$ wird ein Paar erzeugen

* Bei der Paarerzeugung müssen wir Energie und Impuls erhalten:

• $\hbar\omega = E_{(el. mit E > 0)} - E_{(el. mit E < 0)} = E_p - (-E_{p'}) = E_{EL.} + E_{POS.}$

• $\hbar\vec{k} = \vec{p} + \vec{p}'$ und in allgemeiner die 1-Teilchen Interpretation der Dirac-Gleichung

* Die Löcher-Interpretation von Dirac hat aber mehrere Probleme:

* Welche Rolle spielt die Wechselwirkung der Teilchen in den besetzten Zustunden negativer Energie?

* Wir haben gesehen, dass nicht-relativistische Effekte wie die Zitterbewegung nur wichtig sind, wenn der Wellenpaket in einem ganz kleinen (Compton-Wellenlänge) Raumbereich lokalisiert ist. Aber das ist auch problematisch. Wenn

$$\Delta x < \frac{\hbar}{mc} \xrightarrow{\text{Unschärfe-Relation}} \Delta p > \frac{\hbar}{\Delta x} > mc$$

Dann $\Delta E \approx c \Delta p > mc^2$

Aber das, dass die Energie des einen Teilchens in dieser Situation ausreicht, um mehrere Teilchen zu erzeugen!!

* Alle diese Probleme können mit Hilfe einer Vielteilchentheorie gelöst werden. Hier kommt die Quantenfeldtheorie im Spiel. Die werden wir in dieser Vorlesungsreihe nicht behandeln.