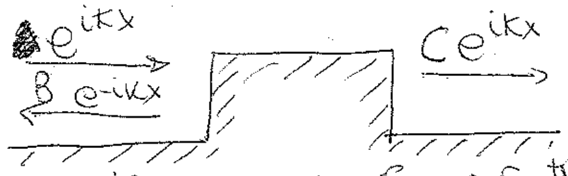
• Streutheorie

* Fast alles was wir über Kerne und elementare Teilchen kennen, wurde in Streuungsexperimente entdeckt, von Rutherfords Experimente bis zum Entdeckung der Quarks. Streutheorie spielt deswegen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik. Diese Theorie wird uns auch erlauben, die Wechselwirkungen in einem reellen vielteilchen System zu untersuchen.

* In Streuprobleme studiert man die Streuung eines Teilchens auf einem lokalisierten Potential $V(\vec{r})$; z.B. ein Elektron streut gegen ein Atom, und das Potential $V(\vec{r})$ ist das Potential, das das Atom auf den Elektron verursacht.

Mit denselben Formalismus können wir auch die Streuung zwischen 2 Teilchen im Bezugsystem des Schwerpunkts studieren.

* Streuprobleme habt Ihr schon in 1D in QM-I studiert.
Das sind die typische Stufen-Probleme der Form:



(Streuung für eine gewisse Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$)

Wir haben eine ankommende Welle (e^{ikx}) und eine gestreute Welle
$\Rightarrow$ reflektiert $\Rightarrow B e^{-ikx}$
transmittiert $\Rightarrow C e^{ikx}$

In dieser Art von Probleme war es besonders wichtig, wieviel transmittiert und reflektiert wird. Wir rechnen die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten aus der Lösung der 1D Schrödinger-gleichung ($H\psi = E\psi$) und Stetigkeitsbedingungen.

* In 1D die gestreute Welle darf nur entweder vorwärts oder rückwärts gestreut werden. Wir sind nun an 3D Probleme interessiert, wo die gestreute Wellen in alle Richtungen gehen können.

* Wie für 1D Probleme werden wir für eine gewisse Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\underbrace{\psi_k = \underset{\substack{\text{ankommende}\\ \text{Welle}}}{e^{ikz}} + \underset{\text{gestreute Welle}}{\psi_{sc}(r,\theta,\phi)}}$$

(wir wählen z.B. die +z Richtung aus)

das ist die Wellenfunktion weit ausserhalb des Potentials $V(r)$

* Wir werden annehmen, dass $rV(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, d.h. das Potential ist lokalisiert genug (__Bemerkung__: das ist z.B. nicht so für Coulomb-Potentiale)

Wenn das so ist, für groß ~~gegenug~~ r wird die Schrödinger gleichung ~~für~~ die gestreute Welle der Form:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_{sc} = 0$$

Die Lösungen dieser gleichung haben:

* Eine Winkel-Abhängigkeit $\longrightarrow Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ Kugelflächenfunktionen
* Eine Radiale Abhängigkeit: $A_\ell j_\ell(kr) + B_\ell n_\ell(kr)$

wobei j_ℓ und n_ℓ sind die sphärische Besselfunktionen 1. und 2. Art.

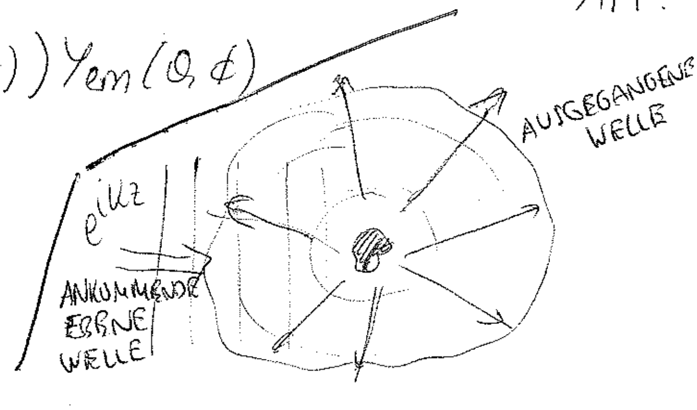
Dann

$$\psi_{sc} \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{\ell,m} \left(A_\ell j_\ell(kr) + B_\ell n_\ell(kr)\right) Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

Da

$$j_\ell(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr}$$

$$n_\ell(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{-\cos(kr - \ell\pi/2)}{kr}$$



und da ψ_{sc} eine ausgehende Welle sein muss, dann $A_\ell/B_\ell = -i$,

und damit $A_\ell j_\ell(kr) + B_\ell n_\ell(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{e^{ikr}}{kr}(-i)^\ell(-B_\ell)$

Also

$$\psi_{sc} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{e^{ikr}}{kr}\sum_{\ell,m}(-i)^\ell(-B_\ell)Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{e^{ikr}}{r}f(\theta,\phi)$$

Die B_ℓ Koeffizienten (und damit $f(\theta,\phi)$) hängen vom Potential $V(r)$ ab (da ist wo die wichtige Information "kodiert" ist).

* Dann haben wir

$$\boxed{\psi_K \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r}}$$

Die $f(\theta,\phi)$ ist die sogen. Streuamplitude

* Wie schon erwähnt alle die Information die wir wollen ist in der Streuamplitude.

* Wir sind an der Normierung eigentlich nicht so interessiert. Was ist wichtig ist eigentlich, wieviele der ankommenden Teilchen in Richtung θ, ϕ (innerhalb eines kleinen Raumwinkels $d\Omega$) gestreut werden.

* Für so was ist die Idee von Strom sehr wichtig. Ich erinnere euch an der Definition von Stromdichte:

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

* Wenn $r\to\infty$ $\psi_K \sim e^{ikz}$ wegen des $1/r$-Faktors, und damit können wir die ankommende Strom definieren

$$|\vec{J}_{inc}| = \left|\frac{\hbar}{2mi}\left(e^{-ikz}\,\vec{\nabla}e^{ikz} - e^{ikz}\,\vec{\nabla}e^{-ikz}\right)\right| = \frac{\hbar k}{m}$$

* gucken wir was passiert in alle andere Richtungen $((\theta,\phi)\neq(0,0))$, in dem Fall nur ψ_{sc} spielt eine Rolle

$$\vec{J}_{sc} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_{sc}^*\vec{\nabla}\psi_{sc} - \psi_{sc}\vec{\nabla}\psi_{sc}^*\right) = $$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \underbrace{\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}}_{\text{wenn } r\to\infty \text{ die Verschwinden}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = ik\frac{e^{ikr}}{r} + \mathcal{O}(1/r^2)$$

$$\simeq \frac{\vec{e}_r}{r^2}\,|f(\theta,\phi)|^2\,\frac{\hbar k}{m}$$

Das ist der ausgegangene Strom pro Flächeneinheit ~~pro~~ Zeiteinheit

$d\vec{F} = r^2 d\Omega\,\vec{e}_r \Rightarrow$ Damit fließt die Wahrscheinlichkeit durch der Fläche mit Rate:

$$R(d\Omega) = |f(\theta,\phi)|^2\,\frac{\hbar k}{m}\,d\Omega$$

$$= |\vec{J}_{inc}|\,\underbrace{|f(\theta,\phi)|^2 d\Omega}_{\substack{\text{das ist eine Fläche}\\ d\sigma(\theta,\phi)}}$$

* Die ausgegangene Stromdichte entspricht die ankommende Stromdichte durch eine senkrechte Fläche $d\sigma(\theta,\phi)$

$$d\sigma(\theta,\phi) = \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int |f(\theta,\phi)|^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi) = |f(\theta,\phi)|^2}$$

→ Differenzieller Wirkungsquerschnitt

* Die Streuamplitude ergibt also die Information wie viele Teilchen werden in eine Richtung gestreut. Also eine Messung der Fraktion der Teilchen in einer Richtung ergibt eine wichtige Information über das Potential.

* Wir wollen nun die Streuamplitude näher untersuchen. Wie für 1D Probleme, sollen wir die entsprechende Schrödinger gleichung für eine gewisse Energie $E = \hbar^2 k^2/2m$ lösen:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_k = \frac{2m}{\hbar^2}\psi_k$$

Wir suchen nach Lösungen der Form:

$$\psi_k = e^{i\vec{k}_i\vec{r}} + \psi_{sc} \qquad (\text{z.B. } \vec{k}_i = k\vec{e}_z \text{ wie vorher})$$

wobei $\psi_{sc} \xrightarrow[r\to\infty]{} f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$

(* Bemerkung: Die Idee ist ähnlich wie für die Lösung der Poisson-gleichung $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$ in der Elektrostatik.)

* Am besten löst man diese Probleme mit Hilfe der Green'sche Funktion. Die Green'sche Funktion $G^0(\vec{r},\vec{r}')$ erfüllt die Gleichung:

$$(\nabla^2 + k^2)\, G^0(\vec{r},\vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Wenn wir $G^0(\vec{r},\vec{r}')$ kennen, dann lautet die allgemeine formelle Lösung der Schrödinger Gleichung:

$$\psi_k(\vec{r}) = \psi^0(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\int G^0(\vec{r},\vec{r}')\, V(\vec{r}')\, \psi_k(\vec{r}')\, d^3r'$$

wobei $\psi^\circ(\vec{r})$ eine beliebige Lösung der homogenen gleichung ist:

$$(\nabla^2+k^2)\psi^\circ = 0$$

* Natürlich die formelle Lösung für $\psi_k(\vec{r})$ ist in der Tat keine echte Lösung, da $\psi_k(\vec{r})$ von $\psi_k(\vec{r})$ abhängt. Wir haben eigentlich die Differentialgleichung in eine <u>Integralgleichung</u> umgewandelt. Diese Form ist besser, weil so können wir ganz einfach eine Entwicklung von ψ_k in Potenzen von V (Störungstheorie).

In nullter Ordnung in $V \rightarrow \psi_k(\vec{r}) = \psi^\circ(\vec{r})$

Dann $\psi^\circ(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_i\vec{r}}$ ← ankommende Welle, da für $V=0$ es keine gestreute Welle gibt

* Dann:

$$\psi_k = e^{i\vec{k}_i\vec{r}} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}\int G^\circ(\vec{r},\vec{r}')V(\vec{r}')\psi_k(\vec{r}')d^3r'}_{\text{das sollte die Rolle der ausgegangenen gestreuten Welle spielen}}$$

* Wir werden nun $G^\circ(\vec{r},\vec{r}')$ bestimmen. Wie schon erwähnt, die G° Funktion erfüllt:

$$(\nabla^2+k^2)G^\circ(\vec{r},\vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$G^\circ(\vec{r},\vec{r}')$ ist also die gestreute Welle erzeugt von einer punktartigen Quelle in $\vec{r}'$. Es ist also notwendig, dass $G^\circ(\vec{r},\vec{r}')$ asymptotisch rausgegangend ist. Das wird uns erlauben, G° eindeutig zu bestimmen. Das ist wichtig, weil im Prinzip $G'^\circ = G^\circ + \eta^\circ$ mit $(\nabla^2+k^2)\eta^\circ = 0$ auch eine Lösung der gleichung ist.

* Suchen wir wie das geht. Da (∇^2+k^2) und $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$ translationell invariant sind, dann sollte G° auch translationell invariant sein

$$G^\circ(\vec{r},\vec{r}') = G^\circ(\vec{r}-\vec{r}')$$

(G° hängt also nur von $\vec{r}-\vec{r}'$ ab, und nicht von $\vec{r}$ und $\vec{r}'$)

Wir wollen also die gleichung $(\nabla^2+k^2)G^\circ(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})$ lösen.

* Aus dem selben Gründen wir suchen nach rotationell invarianten Lösungen, also $G^0(\vec{r}) = G^0(r)$

Sei $G^0(r) = \frac{U(r)}{r}$, dann $(\nabla^2+k^2)G^0(r) = \delta^{(3)}(r) \Rightarrow \frac{d^2U}{dr^2} + k^2 U = 0$

und daher: $U(r) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr} \Longrightarrow G(r) = \underbrace{A\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{rausgegangen}} + \underbrace{B\frac{e^{-ikr}}{r}}_{\text{reingegangen}}$

* Wir wollen nur rausgegange Lösungen, also:

$$G^0(r) = A\frac{e^{ikr}}{r}$$

Wir müssen nun A bestimmen:

$$(\nabla^2+k^2)G^0(r) = A\left[\nabla^2\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) + k^2\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

$$= A\left\{ e^{ikr}\underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)}_{-4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})} + \underbrace{\frac{1}{r}\nabla^2\left(e^{ikr}\right)}_{\substack{-\cancel{\frac{k^2}{r}e^{ikr}} \\ \cancel{+2i\frac{k}{r^2}e^{ikr}}}} + \underbrace{2\vec{\nabla}\left(e^{ikr}\right)\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)}_{\cancel{-2i\frac{k}{r^2}e^{ikr}}} + \cancel{k^2\frac{e^{ikr}}{r}}\right\}$$

$$\overset{r\to 0}{=} -4\pi A\,\delta^{(3)}(\vec{r})$$

Da $(\nabla^2+k^2)G^0(r) = \delta^{(3)}(\vec{r}) \longrightarrow A = -1/4\pi$

Also $G^0(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$

* Wie schon erwähnt, wir können im Prinzip eine Lösung $\eta^0(\vec{r})$ der homogenen Gleichung $(\nabla^2+k^2)\eta^0(\vec{r}) = 0$ dazu addieren. Aber wir müssen aufpassen, da die gesamte Welle muss ausgehen.

Die Lösung η^0 sieht im allgemeinen so aus:

$$\eta^0(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm}\, j_l(kr)\, Y_{lm}(\theta,\phi)$$

↳ Nur sphärische Bessel-Funktionen 1. Art, da die $\eta_l(kr)$ nicht regulär in ~~r~~ 0 sind.

* Für $r \to \infty$

$$j_\ell(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr} = \frac{e^{i(kr-\ell\pi/2)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{2ikr}$$

und hier hätten wir auch reinfgegangene Welle.

* Wir können also keine extra Funktion η_0 dazu addieren.

* Wir haben also die Funktion G^0 eindeutig bestimmt:

$$G^0(\vec{r},\vec{r}\,') = G^0(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

damit:

$$\psi_k = e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} \underbrace{- \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} V(\vec{r}\,')\psi_k(\vec{r}\,')\,d^3r'}_{\text{gestreute Welle} \to \psi_{sc}}$$

* Wir wollen ψ_{sc} in der Form $f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$ schreiben.

Wir betrachten $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$. Wir können also Taylor-entwickeln:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^{1/2} = r\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$\simeq r\left(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)$$

$$k|\vec{r}-\vec{r}\,'| \simeq kr - \underbrace{k\vec{e}_r}_{\vec{k}_f}\cdot\vec{r}\,'$$

$\vec{k}_f \equiv$ Wellenvektor des gestreuten Teilchens

Dann

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{e^{ikr}e^{-\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'}}{r}$$

und damit

$$\boxed{\psi_k \overset{r\to\infty}{=} e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'} V(\vec{r}\,')\psi_k(\vec{r}\,')\,d^3r'}$$

* Nun ist die gestreute Welle der Form $\frac{e^{ikr}}{r} \times$ ETWAS.
Natürlich, wir haben noch nicht $f(\theta,\phi)$ gefunden, da ψ_k immer noch von ψ_k abhängig ist.

• In 1. Ordnung in V:

$$\psi_k \cong e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}'}d^3r'$$

und damit

$$\boxed{f(\theta,\phi) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r}')e^{i(\vec{k}_i-\vec{k}_f)\vec{r}'}d^3r'}$$

→ Das ist die sogen. <u>Born'sche Näherung</u> (oder 1. Born'sche Näherung)

• Sei $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ → Impulsübergang

Dann in der 1. Born'schen Näherung $f(\theta,\phi) \propto \tilde{V}(\vec{q})$, wobei $\tilde{V}(\vec{q})$ die <u>Fourier-Transformation des Potentials</u> $V(\vec{r})$ ist.

* Wir können die Gleichung auf S. 27 iterieren, und dann bekommen wir eine Entwicklung in Potenzen von V (<u>Born'sche Reihe</u>)

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r'\, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')\left\{e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}'} - \frac{e^{ikr'}}{r'}\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r''\, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}''}V(\vec{r}'')\psi_k(\vec{r}'')\right\}$$

bis zum 2. Ordnung

$$\underset{\downarrow}{=} e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r}')e^{-i(\vec{k}_f-\vec{k}_i)\cdot\vec{r}'}d^3r'$$

$$+ \frac{e^{ikr}}{r}\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r'\, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')\cdot\frac{e^{ikr'}}{r'}\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r''\, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}''}V(\vec{r}'')\psi_k(\vec{r}'')$$

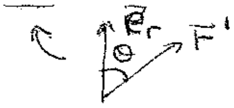
und somit erhalten wir eine verbesserte Näherung für $f(\theta,\phi)$.

* Die Born'sche Näherung ergibt natürlich eine einfache Lösung des Problems. Wir müssen aber bestimmen wenn die ~~Born~~ Born'sche Näherung eigentlich <u>gültig</u> ist. Quellen wir das.

*In der Born'sche Näherung ersetzen wir $\psi_k = e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}'} + \psi_{sc} \to e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}'}$ in dem Integral an der rechten Seite. Daher ist diese Näherung nur gut wenn $|\psi_{sc}| \ll |e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}|$ für $|\vec{r}'| \leq r_0$ (r_0 ist die Bereichsgröße des Potentials, also $V(\vec{r}') \simeq 0$ für $r > r_0$). Wir erwarten ψ_{sc} am größten für $r \to 0$, wir machen also den Vergleich in $r = 0$:

$$\frac{|\psi_{sc}(0)|}{|e^{i\vec{k}\vec{r}(0)}|} = |\psi_{sc}(0)| = \left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ikr'}}{r'} V(\vec{r}')\, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}'}\, d^3r'\right| =$$

sei $V(\vec{r}) = V(r)$

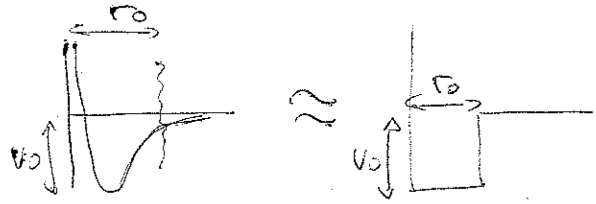


$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int dr' \frac{e^{ikr'}}{r'} V(r')\, r'^2 \underbrace{\int d\theta \sin\theta \int d\phi\, e^{-ikr'\cos\theta}}_{\frac{4\pi}{kr'}\sin kr'}\right| =$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2 k}\left|\int e^{ikr'} \sin kr'\, V(r')\, dr'\right| \longrightarrow \text{wir wollen das} \ll 1$$

* Für niedrigen Energien $kr' \to 0 \Rightarrow e^{ikr'} \to 1$ und $\sin kr' \to kr'$ und damit wird die Bedingung:

$$\frac{2m}{\hbar^2}\left|\int r' V(r')\, dr'\right| \ll 1$$



$$\wr \downarrow$$

$$\frac{m V_0 r_0^2}{\hbar^2} \ll 1 \longrightarrow \boxed{V_0 \ll \frac{\hbar^2}{m r_0^2}}$$

* Das hat <u>eine interessante physikalische Bedeutung</u>. Ein Teilchen in einem Potentialkasten (Breite r_0) hat ein Impuls $\sim \hbar/r_0$ (Heisenberg-Unschärfsrelation), und daher eine kinetische Energie $\sim \hbar^2/m r_0^2$.

D.h. dass die Born'sche Näherung für niedrige Energien ok ist, wenn ~~die Potentialstärke~~ <u>das Potential viel schwächer als die typische kinetische Energie ist</u>.
d.h. das Potential flach genug ist, sodass es kein gebundener Zustand erlaubt.

* Eigentlich ist die Born'sche Näherung für höheren Energien sogar besser. Prüfen wir das.

Sei $kr_0 >> 1 \Rightarrow e^{ikr'} \sin kr' = \frac{e^{2ikr'}-1}{2i}$

Da $kr_0 >> 1 \Rightarrow e^{2ikr'}$ oszilliert sehr schnell innerhalb der Bereichgröße des Potentials, und daher wird vernachlässigt ($e^{2ikr'} \simeq 0$ im Durchschnitt)

Daher:

$$\frac{|\psi_{sc}(0)|}{|e^{ikr}(0)|} \simeq \frac{2m}{\hbar^2 k}\left|\int \frac{(-1)}{2i} V(r')dr'\right| = \frac{m}{\hbar^2 k}\left|\int V(r')dr'\right| \ll 1$$

$$\overset{\sim}{\Longrightarrow} \frac{m V_0 r_0}{\hbar^2 k} \ll 1 \Longrightarrow \frac{m V_0 r_0^2}{\hbar^2} \ll kr_0 \Longrightarrow \boxed{\frac{V_0}{(\hbar/mr_0^2)} \ll kr_0}$$

Da $kr_0 >> 1$, diese Bedingung ist natürlich viel lockerer als die Bedingung $\left(\frac{V_0}{\hbar/mr_0^2} \ll 1\right)$ für niedrigen Energien.

---

* Wir werden von nun an nur Zentralpotentialen $V(\vec{r}) = V(r)$ untersuchen. Dann in 1. Born'schen Näherung:

wir wählen die z'-Richtung entlang $\vec{q}$ aus

$$f(\theta,\phi) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\int dr' r'^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' \, V(r') e^{-iqr'\cos\theta'}$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\int \frac{\sin qr'}{q} V(r') r' dr'$$

D.h. $f(\theta,\phi)$ is nur eine Funktion von q (und nicht von $\vec{q}$)

Aber $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i \longrightarrow |\vec{q}|^2 = |\vec{k}_f|^2 + |\vec{k}_i|^2 - 2\vec{k}_f \cdot \vec{k}_i = 2k^2(1-\cos\theta)$

$$\Longrightarrow \boxed{q = 2k \sin\theta/2}$$

D.h. $f(\theta,\phi) = f(\theta)$ → Die Streuamplitude ist also ϕ-unabhängig. Das war eigentlich zu erwarten. Die ankommende Welle e^{ikz} ändert sich natürlich nicht mit Drehungen um z (also ist ϕ-unabhängig). Das Potential is Kugel-Symmetrisch, also auch ϕ-unabhängig. Dann $f(\theta,\phi)$ ist auch ϕ-unabh.

* Die Streuamplitude ist also eine Funktion von θ und von k.
Alle Funktionen von θ können mit Hilfe von Legendre-Polynomen ausgedrückt werden. Wir können also entwickeln:

$$\boxed{f(\theta,k) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, a_l(k)\, P_l(\cos\theta)}$$

$\left[P_l(\cos\theta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} Y_{l0}(\theta) \right]$
$l \equiv$ Drehimpuls

[Bemerkung: Wir haben $f(\theta,k)$ als eine sogen. Legendre-Reihe ausgedrückt. Die Legendre-Polynome bauen einen vollständigen Satz. Sie erfüllen
$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$ ← Orthonormalitätsbedingung].

* Die Koeffizienten $a_l(k)$ der Legendre-Reihe sind natürlich k-abhängig. $a_l(k)$ ist die sogen. Amplitude der l-ten partiellen Welle.

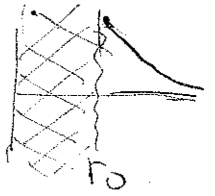
* Suchen wir ein bisschen genauer, was $a_l(k)$ eigentlich bedeutet. Nehmen wir die ankommende Welle $e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta}$. Diese Funktion ist auch eine Funktion von θ und kann deswegen als eine Legendre-Reihe ausgedrückt werden:

$$\boxed{e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1)\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)}$$

* Wir betrachten hier ein Zentralpotential $V(r)$. Zentralpotentiale erhalten den Drehimpuls. Das ist extrem wichtig, weil d.h. daß die verschiedene Drehimpulskomponente (l) unabhängig voneinander gestreut werden. Die Amplitude $a_l(k)$ misst die Streuung der l-ten Komponente.

* Die Entwicklung in partiellen Wellen ist besonders interessant, weil für niedrigen Energien nur wenige niedrige Drehimpulse l eine Rolle spielen. Warum? Hier spielt eine wichtige Rolle die Idee von zentrifugaler Barriere.

$$V_Z^{(l)}(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2}\, l(l+1) \implies$$



Erreichen die Teilchen den Bereich $r<r_0$, wo das Streuungspotential ist? Wenn das nicht so ist, dann spielen diese Teilchen keine Rolle in dem Streuungsproblem.

* Also hier die Frage (grob gesagt) ist:

$$\text{Ist} \quad V_2^{(\ell)}(r_0) > \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \longrightarrow$$ wenn das so ist, dann wird die Zentrifugale Barriere die Streuung an das Potential verhindern.

Also $\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\ell(\ell+1) > \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \longrightarrow \ell(\ell+1) > k^2 r_0^2$

grob gesagt nur $\ell \leq \ell_{max}$ spielen eine Rolle in der Streuung, wobei $\boxed{\ell_{max} \simeq k r_0}$

(* Bemerkung: für ultra-niedrige Energien $kr_0 \to 0$ nur $\ell = 0$ spielt eine bedeutende Rolle. Wir werden das später sehen.)

---

* Wir wollen nun die Streuamplitude $a_\ell(k)$ bestimmen. Gucken wir wie das geht

* gucken wir die Funktion e^{ikz}, erstmals ohne Potential. Dann gibt es keine Streuung und:

Wir benutzen hier: $j_\ell(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr}$

$$e^{ikz} \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) \frac{\sin(kr-\ell\pi/2)}{kr} P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell(2\ell+1)\left[\frac{e^{i(kr-\ell\pi/2)}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{r}\right] P_\ell(\cos\theta)$$

$$\overset{i=e^{i\pi/2}}{=} \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left[\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

rausgegangene Welle — einkommende Welle

* gucken wir nun was passiert wenn das Potential ist da. Für $r \to \infty$, werden die radialle Funktionen wie die ohne Potential aber vielleicht nun mit einer Phasenverschiebung $\delta_\ell(k)$ wegen des Potentials

$$\psi_k(\vec r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell(k)\left[\frac{e^{i(kr-\ell\pi/2+\delta_\ell)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2+\delta_\ell)}}{r}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell\, e^{-i(\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell)}\left[\frac{e^{ikr}}{r}(e^{2i\delta_\ell}-1) + \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

* Wir verlangen: ~ rausgegange Welle

$$\psi_k(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + \psi_{sc}$$

Wenn man die Ausdrücke um e^{ikz} und $\psi_k(\vec{r})$ für $r\to\infty$ vergleicht, sieht man sofort, dass man braucht:

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2ik} e^{i\left(\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell\right)}$$

Somit:

$$\psi_k(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + \underbrace{\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{\left(e^{2i\delta_\ell}-1\right)}{2ik} P_\ell(\cos\theta)\right]}_{f(\theta,k)} \frac{e^{ikr}}{r}$$

Also $\boxed{a_\ell(k) = \frac{e^{2i\delta_\ell}-1}{2ik}} \longrightarrow a_\ell(k) = e^{i\delta_\ell} \frac{\sin\delta_\ell}{k}$

und damit $f(\theta,k) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)$

* Dann der Wirkungsquerschnitt ist:

$$\sigma = \int |f|^2 d\Omega = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell,\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) e^{i\delta_\ell} e^{-i\delta_{\ell'}} \sin\delta_\ell \sin\delta_{\ell'} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta)}_{\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,\ell'}}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell+1) \sin^2\delta_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_\ell$$

Also $\boxed{\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell} \longrightarrow$ Wirkungsquerschnitt für die ℓ-te partielle Welle

---

* Gucken wir was passiert für sehr niedrige Energien $\left(\begin{matrix} E \to 0 \\ kr_0 \ll 1 \end{matrix}\right)$.

Die radialle Gleichung für $r\to\infty$ für $R(r) = \frac{u(r)}{r}$ ist der Form $\frac{d^2u}{dr^2} = 0 \to u(r)$ ist also der Form $u(r) = C(r-a)$ wobei C und a Konstanten sind.

Wie schon erwähnt (S. 32), wenn $kr_0 \ll 1$ nur $\ell=0$ spielt eine Rolle. Aber für $\ell=0$ wir wissen dass die Lösung

So aussieht

$$\psi_k \xrightarrow[r\to\infty]{} \text{konstant} \times \frac{\sin(kr+\delta_0)}{r}$$

Da für $E \to 0 \Rightarrow \psi_k \longrightarrow \frac{c}{k}(r-a)$, dann $\delta_0(k) = -ka$, solch daß

$$\frac{1}{r}\sin(k(r-a)) \underset{k\to 0}{\simeq} k\,\frac{1}{r}(r-a)$$

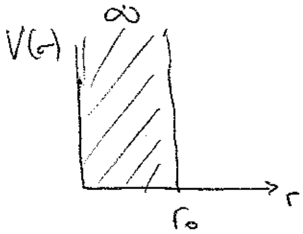
Dann $\boxed{\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2(ka) \underset{k\to 0}{\simeq} 4\pi a^2}$ → Die Konstante a ist die sogen. Streulänge

* Diese Konstante spielt eine sehr wichtige Rolle in der Physik der sehr tiefen Energien.

---

* Suchen wir nun ein Beispiel

Sei $V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r<r_0 \\ 0 & \text{für } r>r_0 \end{cases}$



Wir wollen die Phasenverschiebungen $\delta_l(k)$

* Suchen wir erstmal die Wellenfunktion für $r>r_0$. Da haben wir die Lösung der radialen Schrödinger gleichung in freien Raum $(V=0)$:

$$R_l(r) = A_l\, j_l(kr) + B_l\, n_l(kr)$$

[* Bemerkung: Wie immer $j_l(kr)$, $n_l(kr)$ sind die sphärische Bessel-Funktionen 1. und 2. Art. Hier behalten wir auch die $n_l(kr)$ Funktion. Diese Funktion ist in $r=0$ nicht regulär (sie divergiert), aber hier sind wir an dem Bereich $r>r_0$ interessiert.]

* Für $r \leq r_0 \Rightarrow V = \infty$ und daher $R_l(r) = 0$

Wegen Stetigkeit $\Longrightarrow 0 = R_l(r_0) = A_l\, j_l(kr_0) + B_l\, n_l(kr_0)$

und daher $\frac{B_l}{A_l} = \frac{-j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)}$

* Andererseits, für $r \to \infty$:

$$R_l(r) \underset{r\to\infty}{=} \frac{A_l}{kr}\sin(kr - l\pi/2) - \frac{B_l}{kr}\cos(kr - l\pi/2)$$

Nun machen wir folgendes: $\left.\begin{aligned} A_l &= [A_l^2 + B_l^2]^{1/2}\cos\delta_l \\ B_l &= -[A_l^2+B_l^2]^{1/2}\sin\delta_l \end{aligned}\right\}$ wobei $\tan\delta_l = -\frac{B_l}{A_l}$

* Dann $R_\ell(r) \underset{r\to\infty}{=} \frac{(A_\ell^2+B_\ell^2)^{1/2}}{kr} \sin\left[kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right]$

Wir haben also die Phasenverschiebungen identifiziert:

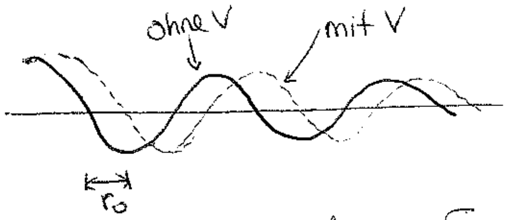
$$\boxed{\delta_\ell = \operatorname{atan}\left[\frac{-B_\ell}{A_\ell}\right] = \operatorname{atan}\left[\frac{j_\ell(kr_0)}{n_\ell(kr_0)}\right]}$$

* Gucken wir $\ell=0$ [<u>Bemerkung</u>: $\ell=0$ - Streuung heißt in der Literatur <u>S-Welle</u>-Streuung.]

Dann $\delta_0 = \operatorname{atan}\left[\frac{j_0(kr_0)}{n_0(kr_0)}\right] = \operatorname{atan}\left[\frac{\frac{\sin(kr_0)}{kr_0}}{\frac{-\cos(kr_0)}{kr_0}}\right] = \operatorname{atan}\left[-\tan(kr_0)\right]$

$\Longrightarrow \delta_0 = -kr_0 \Longrightarrow$ und damit $\boxed{a = r_0}$

↳ Das war eigentlich zu erwarten. Das unendliche Potential verschiebt die Sinus-Funktion



* Gucken wir was passiert für sehr niedrigen Energien:

$j_\ell(kr_0) \underset{k\to 0}{\simeq} \frac{(kr_0)^\ell}{(2\ell+1)!!}$ [<u>Bemerkung</u>: $(2\ell+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2\ell+1)$, $(2\ell)!! = 2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2\ell)$]

$n_\ell(kr_0) \underset{k\to 0}{\simeq} -(kr_0)^{-(\ell+1)}(2\ell-1)!!$

und damit $\frac{j_\ell(kr_0)}{n_\ell(kr_0)} \xrightarrow[k\to 0]{} \frac{-1}{(2\ell+1)!!}\,\frac{(kr_0)^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!}$

Dann: $\tan\delta_\ell \underset{k\to 0}{\simeq} \delta_\ell \propto (kr_0)^{2\ell+1}$

Das entspricht was wir schon erwähnt haben. Wenn $k\to 0$, die Rolle alle $\ell\neq 0$ ist vernachlässigbar.

[<u>Bemerkung</u>: In der Literatur, Streuung mit $\ell = 1, 2, 3\ldots$ heißt p-, d-, f-, … -Welle Streuung]

* Die Bestimmung der Phasenverschiebung ist leider fast immer zu kompliziert um eine analytische Lösung zu finden. Man muss die numerisch bestimmen, aber die Idee ist immer gleich. Man bestimmt die Lösung in $r \to \infty$, und für klein r, und man passt die beide Lösungen zusammen (Stetigkeit).

* Wenn die Born'sche Näherung (S. 28) gültig ist, dann können wir die Phasenverschiebungen relativ einfach ausrechnen.

In der Born'sche Näherung:

$$f(\theta) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \, V(r') \, e^{-i(\vec{k}_f - \vec{k}_i)\cdot \vec{r}\,'}$$

$\vec{k}_i \to$ Richtung z

$\vec{r}\,' \to$ Richtung (θ', φ')

$\vec{k}_f \to$ Richtung (θ, φ)

Dann

$$e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}\,'} = e^{ikr'\cos\theta'} = \sum_\ell i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr') P_\ell(\cos\theta')$$

$$e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'} = \sum_\ell (-i)^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr') P_\ell(\cos\gamma)$$

wobei γ der Winkel zwischen $\vec{k}_f$ und $\vec{r}\,'$ ist. Man benutzt hier den Additionssatz der Kugelflächenfunktionen:

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

und damit

$$e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'} = \sum_{\ell, m} 4\pi (-i)^\ell j_\ell(kr') Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Dann:

$$f(\theta) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \, V(r') \left[\sum_{\ell'} i^{\ell'} (2\ell'+1) j_{\ell'}(kr') P_{\ell'}(\cos\theta')\right] \left[\sum_{\ell, m} 4\pi (-i)^\ell j_\ell(kr') Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)\right]$$

Man benutzt hier die Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen (z.B. alle $m \neq 0$ ergeben Null); damit:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \int_0^\infty r^2 dr \, V(r) \left(j_\ell(kr)\right)^2$$

• Aber wir wissen daß

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_\ell (2\ell+1)\, e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell \, P_\ell(\cos\theta)$$

Für klein δ_ℓ's (eigentlich die Born'sche Näherung ist nur gültig für kleine Phasenverschiebungen)

$$f(\theta) \simeq \frac{1}{k} \sum_\ell (2\ell+1)\, \delta_\ell \, P_\ell(\cos\theta)$$

und damit

$$\boxed{\delta_\ell(k) \simeq -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 dr\, V(r) \left[j_\ell(kr)\right]^2}$$

---

* Zweiteilchen-Streuung

• Bisher haben wir nur die Streuungs eines Teilchens mit Masse m auf einem Potential $V(\vec{r})$.

• Wie schon erwähnt, können wir das gleiche Formalismus für die Streuung zwischen 2 Teilchen benutzen. Wie wir aus der klassischen Mechanik schon kennen, wir können ganz einfach ein 2-Teilchen-Problem in ein 1-Teilchen-Problem umwandeln.

$$\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\} \begin{cases} \longrightarrow \text{Schwerpunkt } \vec{R}_{CM} \\ \longrightarrow \text{Relative Koordinate } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

• Die 2-Teilchen erfahren ein Wechselswirkungspotential $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r})$
Dann können wir die 2-Teilchen Wellenfunktion zerlegen:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{CM}(\vec{R}_{CM})\, \psi(\vec{r})$$

Wir betrachten das Problem im Bezugssystem des Schwerpunktes, und daher werden wir die Dynamik des Schwerpunktes vergessen.
Die Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ erfüllt die Schrödinger-gleichung

eines Teilchens mit Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ (reduzierte Masse)
und Koordinate $\vec{r}$ in einem Potential $V(\vec{r})$

$$E\psi(\vec{r}) = \left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r})$$

und natürlich das Problem ist genauso wie vorher, d.h.

$$\psi(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

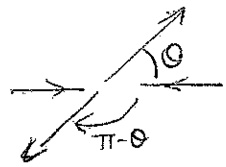
* Es gibt aber ein Unterschied wenn die 2 Teilchen identisch sind.
Wir betrachten erstmal spinlose Bosonen. Wie wir schon wissen, muss die Wellenfunktion des Systems symmetrisch $\vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{r}_2$ bleiben. Die Schwerpunktkoordinate $\vec{R}_{cm} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)$ ist natürlich invariant, aber $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ändert das Vorzeichen $\vec{r} \Leftrightarrow -\vec{r}$. Die Funktion $\psi(\vec{r})$ muss also erfüllen $\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$. Daher:

$$\psi_{SYM}(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \left(e^{ikz} + e^{-ikz}\right) + \left[f(\theta,\phi) + f(\pi-\theta,\phi+\pi)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

[Bemerkung: $\vec{r} \Leftrightarrow -\vec{r} \Rightarrow (\theta,\phi) \Longleftrightarrow (\pi-\theta,\phi+\pi)$
$\qquad z \Longleftrightarrow -z$]

Die Streuamplitude ist also:

$$\boxed{f_{SYM}(\theta,\phi) = f(\theta,\phi) + f(\pi-\theta,\phi+\pi)}$$



Daher

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi) + f(\pi-\theta,\phi+\pi)|^2 = |f(\theta,\phi)|^2 + |f(\pi-\theta,\phi+\pi)|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\{f(\theta,\phi)f^*(\pi-\theta,\phi+\pi)\}}_{\text{Interferenzterm !!}}$$

(Bemerkung: Wenn man σ rechnet muß man nur über 2π Radians und nicht über die gesamte 4π Radians integrieren. Sonst addiert man 2 mal!!)

* Gucken wir was für Konsequenzen hat das für die partielle Wellenzerlegung:

$$f(\theta,k) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,a_l(k)\,P_l(\cos\theta)$$

S. 31

* Dann
$$f_{SYM}(\theta,k) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) \, [\underbrace{P_l(\cos\theta) + P_l[\cos(\pi-\theta)]}_{P_l(\cos\theta) + P_l[-\cos\theta]}]$$

Die Legendre-Polynome erfüllen: $P_l(-\cos\theta) = (-1)^l P_l(\cos\theta)$, d.h. $l=0,2,\ldots$ (s-Welle, d-Welle, ...) sind gerade, un $l=1,3\ldots$ (p-Welle, f-Welle...) sind ungerade. Damit:
$$f_{SYM}(\theta,k) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) \, [1+(-1)^l] \, P_l(\cos\theta)$$
Dann, für identische Bosonen gibt es nur Streuung in geraden Wellen, also $l=0,2,4\ldots$

* Suchen wir was passiert für identische Fermionen. Wir betrachten dass die 2 Fermionen denselben Spin haben (z.B. 2 Elektronen ↑). Dann ist die Spinwellenfunktion natürlich symmetrisch, aber die gesamte Wellenfunktion muss antisymmetrisch bleiben. Dann
$$\psi_{ASYM}(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} (e^{ikz} - e^{-ikz}) + [f(\theta,\phi) - f(\pi-\theta,\phi+\pi)] \frac{e^{ikr}}{r}$$

Also
$$f_{ASYM}(\theta,\phi) = f(\theta,\phi) - f(\pi-\theta,\phi+\pi)$$

Daher
$$f_{ASYM}(\theta,k) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) \, [1-(-1)^l] \, P_l(\cos\theta)$$

D.h. dass für identische Fermionen mit denselben Spin nur Streuung in ungeraden Wellen ($l=1,3,\ldots$) gibt. Das hat ziemlich wichtige Folgen für niedrigen Energien: wenn $kr_0 \to 0$ sind <u>identische Fermionen mit demselben Spin so gut wie ideal</u>, d.h. nicht wechselwirkend!! (<u>Bemerkung</u>: die erste nicht verschwindende Streuung findet in p-Welle statt, aber ziemlich schwach).