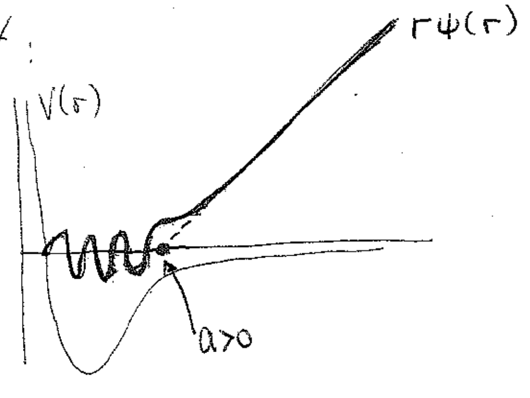
Nicht-ideales Bose-Gas: Suprafluidität

- Bisher haben wir 2. Quantisierung und Streutheorie studiert. Nun werden wir unsere neue Kenntnisse anwenden, und zwar für die Analyse eines wichtigen Problems, nämlich Suprafluidität.

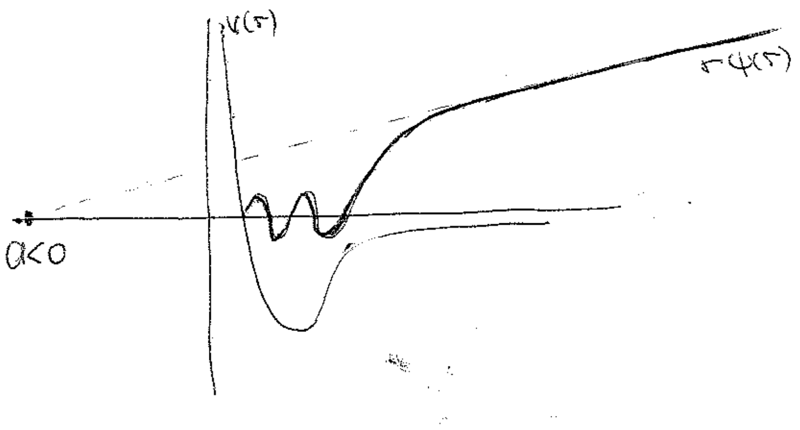
Wir werden erstmals die wichtige Idee von Pseudopotential einführen, dann werden wir den Hamilton-Operator für ein wechselwirkendes Bose-Gas schreiben, wir werden die niedrigste Anregungen dieses Gases untersuchen, und zum Schluss werden wir die Idee von Suprafluidität einführen.

* Streulänge und Pseudopotential

* Auf S. 34 haben wir die wichtige Idee von Streulänge eingeführt. Ich erinnere euch, dass für sehr niedrige Energien ($kr_0 \to 0$) nur s-Welle-Streuung ($l=0$) wichtig ist. Für $r \to \infty$ hatten wir daß $\psi_\infty(r) = \text{KONSTANTE} \times (1 - a/r)$ (S. 34), wobei a die Streulänge ist.
* Gucken wir ein bisschen genauer was die Streulänge eigentlich ist:



* Für $r \to \infty$, $r\psi_\infty(r)$ ist eine Gerade der Form $\sim r - a$. Daher, wenn wir die asymptotische Gerade prolongieren, dann wird die Gerade in $r = a$ die x-Achse schneiden.
* In diesem Beispiel ist $a > 0$, aber a kann auch negativ sein, z.B.

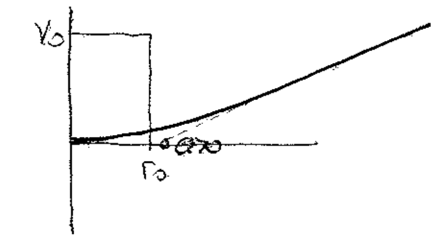


* Das Vorzeichen von a ist eigentlich wichtig.

Nehmen wir ein schwaches Potential $V(r)=\begin{cases}V_0 & r<r_0\\ 0 & r>r_0\end{cases}$

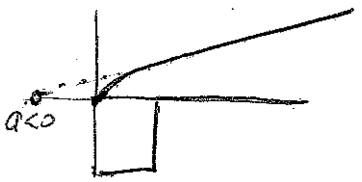
↳(ohne gebundene Zustände)

* Für $V_0>0$:



← $a>0$ → Repulsives Potential

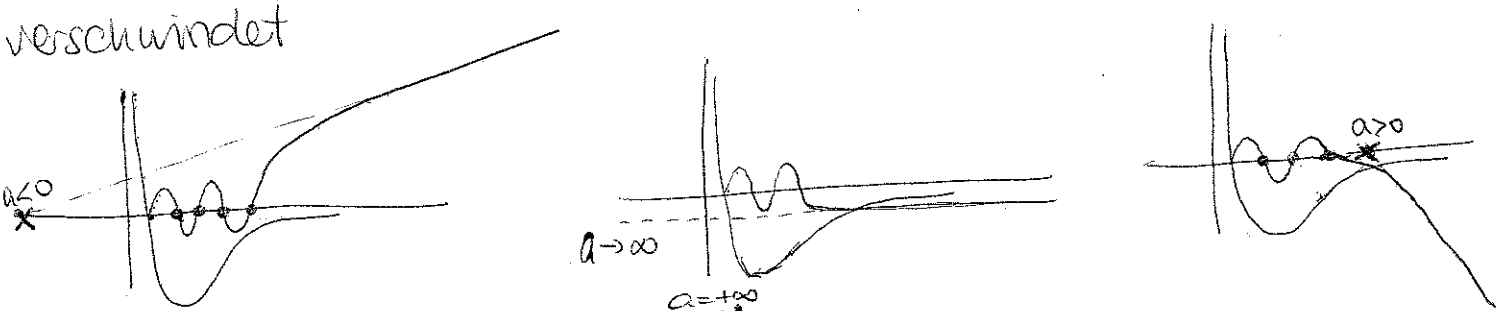
* Für $V_0<0$



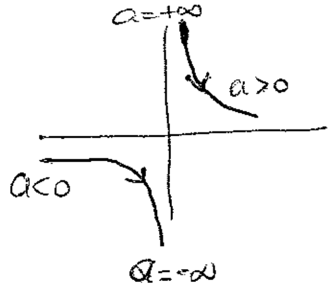
← $a<0$ → Attraktives Potential

* Wenn es gebundene Zustände ist die Sache ein bisschen komplizierter (die Anzahl von Nullstellen von $r\psi(r)$ in der Abbildungen von S. ◯ ist die Anzahl von gebundenen Zuständen des Potentials!!), aber die Idee bleibt:
  * $a>0$ → Repulsive Wechselwirkungen
  * $a<0$ → Attraktive Wechselwirkungen

[* Bemerkung: wie gesagt, die Anzahl von Nullstellen von $r\psi(r)$ gebundenen Zuständen des Potentials wieder-spiegelt die Anzahl von gebundenen Zustand. Es ist interessant zu sehen, was passiert wenn ein gebundener Zustand verschwindet



Wenn ein gebundener Zustand verschwindet ⟩



⟸ Resonanz

Streuresonanzen ergeben also Information über die gebundene Zustände des Potentials!]

* Wie gesagt, wir sind nur an der asymptotische Eigenschaften interessiert, und daher nur an der Streulänge a (wenn wir $kr_0 \to 0$ betrachten). Deswegen ist die genaue Form des Potentials $V(r)$ unwichtig, und im Prinzip alle Potentiale mit derselben "a" werden ähnliche $kr_0 \to 0$ Streuung ergeben.

Wir werden nun das echte Potential durch ein sehr einfaches Potential ersetzen.

* Sei ein Teilchen, das überall frei ist, außer an $r=0$. Wir verlangen die Randbedingung $\psi(a)=0$ (ich erinnere euch, dass $\psi_\infty(r=a)=0$ in unserer Diskussion von S. 40).

$$\text{Für } r\neq 0 \longrightarrow (\nabla^2+k^2)\psi=0 \underset{k\to 0}{\longrightarrow} \nabla^2\psi=0 \longrightarrow \psi=\chi(1-a/r)$$

Die Konstante χ wird durch

$$\chi=\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right)_{r=0}=\psi(0) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{wir nehmen an, dass}\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=0}\text{ endlich bleibt}\end{array}\right)$$

gegeben.

* Wir wollen die Funktion ψ bis zu $r=0$ bringen:

$$\nabla^2\psi=\nabla^2\left(\chi(1-a/r)\right)=-a\chi\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=4\pi a\chi\,\delta^{(3)}(\vec{r})$$

Dann $\nabla^2\psi=4\pi a\,\psi(0)\,\delta(\vec{r})$

und daher ψ erfüllt $\longrightarrow \nabla^2\psi(\vec{r})=\left(4\pi a\,\delta(\vec{r})\right)\psi(\vec{r})$

* Dann: $(\nabla^2+k^2)\psi(\vec{r})=\left[4\pi a\,\delta(\vec{r})\right]\psi(\vec{r})$

ergibt für $k\to 0$ dieselbe Wellenfunktion $\psi_\infty(\vec{r})$ wie das ursprüngliche Problem(!!).

* Wir können dann das Potential $V(\vec{r})$ durch ein sogen. Pseudopotential

$$\boxed{V(\vec{r}) \longrightarrow \frac{4\pi a\hbar^2}{m}\delta^{(3)}(\vec{r})}$$

ersetzen. Natürlich wird die Behandlung des Pseudopotentials viel einfacher als die Behandlung des gesamten Potentials $V(\vec{r})$.

[* Bemerkung: Dieses δ-artige Potential heißt auch Kontaktpotential)

* MEHRTEILCHENSYSTEME: HAMILTON-OPERATOR UND ELEMENTARE ANREGUNGEN

* Wir werden nun ein Mehrteilchensystem bei sehr niedrigen Energien (niedrigen Temperaturen) studieren. Wir werden hier nur den Fall von Bosonen untersuchen.

* Wie gesagt, wir werden das echte Wechselwirkungspotential durch ein Pseudopotential $U_0\delta(\vec{r})$ (mit $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$) ersetzen. Von Hamilton-Operator in Felddarstellung von S. 14 wird also der Hamilton-Operator der Form:

$$H = \int d^3x \left\{\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\hat{\psi}^+(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\hat{\psi}(\vec{x})\right\} + \frac{U_0}{2}\int d^3x\, \hat{\psi}^+(\vec{x})\hat{\psi}^+(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x})$$

Wir nehmen hier kein 1-Teilchen Potential

* Am besten ist für dieses Problem die Impulsdarstellung (S. 19) geeignet.

[Bemerkung: Da $\delta^{(3)}(\vec{x}) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{x}} \longrightarrow V_{\vec{q}}$ (S. 19) $= U_0$ für alle $\vec{q}$ (!!)]

Dann:

$$H = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{U_0}{2V}\sum_{\vec{q},\vec{k},\vec{k}'} a^+_{\vec{k}+\vec{q}}\, a^+_{\vec{k}'-\vec{q}}\, a_{\vec{k}'} a_{\vec{k}}$$

* In dem Grundzustand eines idealen Bose-Gases (Null Temperatur) sind alle Teilchen in $\vec{k}=0$ (Bose-Einstein-Kondensat), also $N_{\vec{k}=0} = N$ (ganze Zahl der Bosonen), $N_{\vec{k}\neq 0} = 0$.

In einem schwachwechselwirkenden Bose-System, $N_{\vec{k}\neq 0} \neq 0$ aber $N_{\vec{k}\neq 0} \ll N_{\vec{k}=0}$ ← es gibt immer noch eine makroskopische Zahl von Bosonen in $\vec{k}=0$.

Ich erinnere euch, dass
$$a_{\vec{k}} \, |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}} \, |n_{\vec{k}}-1\rangle$$
$$a^+_{\vec{k}} \, |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}+1} \, |n_{\vec{k}}+1\rangle$$

Aber, da $N_{\vec{k}=0} \gg 1 \longrightarrow$ wir können ersetzen $a_0, a_0^+ \approx \sqrt{N_0}$

* Dann:

$$H = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{U_0}{2V} a_0^+ a_0^+ a_0 a_0$$

$$+ \frac{U_0}{2V} \sum_{\vec{k}\neq 0} \left[a_0^+ a_0^+ a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} + a^+_{\vec{k}} a^+_{-\vec{k}} a_0 a_0 + 4 a_0^+ a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} a_0 \right] + \underbrace{\ldots}_{\text{höheren Ordnungen}}$$

$$\simeq \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{U_0}{2V} N_0^2 + \frac{U_0 N_0}{2V} \sum_{\vec{k}\neq 0} \left[4 a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a^+_{\vec{k}} a^+_{-\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \right]$$

$N = N_0 + \sum_{\vec{k}\neq 0} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$

$$\simeq \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{U_0}{2V} N^2 + \frac{N U_0}{2V} \sum_{\vec{k}\neq 0} \left\{ 2 a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a^+_{\vec{k}} a^+_{-\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \right\}$$

* Wir vergessen nun konstante Termen und erhalten:

$$\boxed{H = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \frac{N}{V} \sum_{\vec{k}\neq 0} \left\{ 2 a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a^+_{\vec{k}} a^+_{-\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \right\}}$$

* So ein Hamilton-Operator ist problematisch, wegen der $a^+ a^+$ oder $a\,a$ Glieder.

Wir werden nun eine lineare Transformation der Operatoren machen $a, a^+ \longrightarrow b, b^+$ solch dass am Ende $H \propto b^+ b$, d.h. wie in einem harmonischen Oszillators.

* Wir führen also neue Operatoren ein:

$$\left.\begin{aligned} a_{\vec k} &= u_{\vec k}\, b_{\vec k} + v_{\vec k}\, b^+_{-\vec k} \\ a^+_{\vec k} &= u_{\vec k}\, b^+_{\vec k} + v_{\vec k}\, b_{-\vec k} \end{aligned}\right\}$$ Bogoliubov-Transformation
$(u_{\vec k} = u_{-\vec k},\ v_{\vec k} = v_{-\vec k})$

wobei $u_{\vec k}, v_{\vec k}$ sind reelle Funktionen, und $b_{\vec k}, b^+_{\vec k}$ erfüllen die bosonische Vertauschrelationen:

$$[b_{\vec k}, b_{\vec k'}] = [b^+_{\vec k}, b^+_{\vec k'}] = 0$$

$$[b_{\vec k}, b^+_{\vec k'}] = \delta_{\vec k,\vec k'}$$

Man kann ganz einfach überprüfen, dass die Vertauschrelationen $u^2_{\vec k} - v^2_{\vec k} = 1$ verlangen. Daher können wir

$$\begin{aligned} u_k &= \mathrm{ch}\,\alpha_k \\ v_k &= \mathrm{sh}\,\alpha_k \end{aligned} \qquad \left(\mathrm{ch}^2\alpha_k - \mathrm{sh}^2\alpha_k = 1 \right)$$

schreiben.

* Sei $n = N/V$ (also die Dichte des Systems), dann:

$$H = \sum_{k\neq 0}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + U_0 n\right) a^+_k a_k + \frac{U_0 n}{2}\sum_{k\neq 0}\left(a^+_k a^+_{-k} + a_k a_{-k}\right)$$

$$= \sum_{k\neq 0}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + U_0 n\right)\left[\mathrm{ch}^2\alpha_k\, b_k b^+_k + \mathrm{sh}^2\alpha_k\, b^+_k b_{-k} + \mathrm{ch}\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k\left(b_k b_{-k} + b^+_k b^+_{-k}\right)\right]$$

$$+ \sum_{k\neq 0}\frac{U_0 n}{2}\left\{\begin{aligned} &\mathrm{ch}^2\alpha_k\, b^+_k b^+_{-k} + \mathrm{sh}^2\alpha_k\, b_{-k} b_k + \mathrm{ch}\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k\left(b^+_k b_k + b_{-k} b^+_{-k}\right) \\ &+ \mathrm{ch}^2\alpha_k\, b_k b_{-k} + \mathrm{sh}^2\alpha_k\, b^+_{-k} b_k + \mathrm{ch}\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k\left(b_k b^+_k + b^+_{-k} b_{-k}\right)\end{aligned}\right\}$$

außer Konstanten

$$= \sum_{\vec k\neq 0}\left\{\left[\frac{\hbar^2k^2}{2m} + U_0 n\right]\left(\mathrm{ch}^2\alpha_k + \mathrm{sh}^2\alpha_k\right) + U_0 n\, 2\,\mathrm{ch}\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k\right\} b^+_k b_k$$

$$+ \sum_{\vec k\neq 0}\underbrace{\left\{\mathrm{ch}\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + U_0 n\right) + \frac{U_0 n}{2}\left(\mathrm{ch}^2\alpha_k + \mathrm{sh}^2\alpha_k\right)\right\}}\left[b^+_k b^+_{-k} + b_k b_{-k}\right]$$

Da wir nur Termen der Form b^+b wollen, das hier muss verschwinden.

Daher: $\underbrace{2\,\mathrm{ch}\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k}_{\mathrm{sh}\,2\alpha_k}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n\right) = -U_0n\,\underbrace{(\mathrm{ch}^2\alpha_k+\mathrm{sh}^2\alpha_k)}_{\mathrm{ch}\,2\alpha_k}$

Also: $$\mathrm{th}\,2\alpha_k = \frac{-U_0n}{\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n}$$

Wir können nun die Beziehungen:

$$\mathrm{sh}^2\alpha = \frac{\mathrm{th}^2\alpha}{1-\mathrm{th}^2\alpha}\,,\quad \mathrm{ch}^2\alpha = 1+\mathrm{sh}^2\alpha$$

benutzen, und damit:

$$\mathrm{sh}\,2\alpha = \frac{-U_0n}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n\right)^2-U_0^2n^2}}\;;\quad \mathrm{ch}\,2\alpha = \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n\right)^2-U_0^2n^2}}$$

* Dann

$$H = \sum_{k\neq 0}\left\{\frac{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n\right)^2-U_0^2n^2}} - \frac{(U_0n)^2}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n\right)^2-U_0^2n^2}}\right\} b_k^+ b_k$$

und dann

$$\boxed{H = \sum_{k\neq 0}\varepsilon(k)\, b_k^+ b_k}$$

wobei $\varepsilon(k) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+U_0n\right)^2-(U_0n)^2}$

$$\boxed{\varepsilon(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left[\frac{\hbar^2k^2}{2m}+2U_0n\right]}}$$

<u>Bogoliubov-Spektrum</u>

* Nun haben wir das Spektrum der elementare Anregungen eines schwachwechselwirkenden Bose-Gas. Die elementare Anregungen sind mit den Operatoren b_k, b_k^+ verknüpft, also nicht mit Teilchen sondern eher mit der sogen. <u>Quasiteilchen</u> ($b \propto a$ aber auch zu a^+ (!!))

* Das Bogoliubov-Spektrum

* Das Bogoliubov-Spektrum ergibt das Dispersionsgesetz für die Anregungen $\varepsilon(k)$. Gucken wir dieses Spektrum etwas genauer.

* Sei $c_s \equiv \sqrt{\frac{U_0 n}{m}}$ [Bemerkung: $U_0 n$ ist eine Energie, dann c_s ist eine Geschwindigkeit: $U_0 n = m c_s^2$.]

* Gucken wir erstmal was passiert für kleine k's, sodass $\frac{\hbar k}{m} \ll c_s$; dann: $\varepsilon(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2c_s^2 m\right)} \approx \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{\cancel{2m}} \cdot \cancel{2} c_s^2 \cancel{m}}$

dann $\boxed{\varepsilon(k) \approx c_s (\hbar k)}$

Für kleine Impulse $(\hbar k)$ ist das Anregungsspektrum linear im Impuls. Lineare Dispersionsgesetze findet man z.B. für Photonen, ich erinnere euch dass für ein Photon: $\varepsilon(p) = pc$ ($c \equiv$ Lichtgeschwindigkeit). So ein Dispersionsgesetz findet man für Phononen in einem Krystall [Bemerkung: Ihr habt vielleicht vorher die Idee von Phononen kennengelernt. Die sind die quantisierte Anregungen der Ionen in einem Krystall in Festkörperphysik. Die Phononen erfüllen ein Dispersionsgesetz $\varepsilon(p) = p c_s$, wobei c_s die Schallgeschwindigkeit ist. Deswegen werden wir $c_s \equiv \sqrt{\frac{U_0 n}{m}}$ auch Schallgeschwindigkeit nennen, und wir werden die Dispersion $\varepsilon(k) \simeq c_s(\hbar k)$ Phonon-Teil des Spektrums nennen.]

* Für große Impulse, $\frac{\hbar k}{m} \gg c_s$, dann

$\boxed{\varepsilon(k) \simeq \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$ → also wie für ideale Teilchen. Das könnten wir erwarten haben, da wenn $\frac{\hbar k}{m} \gg c_s$ dann ist die kinetische Energie $\gg$ die Wechselwirkungs-energie, und daher für diese Anregungen ist das System so gut wie ideal.

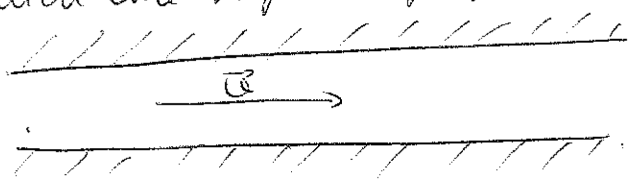
Auch für $\frac{\hbar k}{m} \gg c_s \rightarrow \tanh 2\alpha_k \simeq 0 \rightarrow \alpha_k \simeq 0 \rightarrow v_k \simeq 0,\ u_k \simeq 1$ und daher $b_k \simeq a_k$ → also die Quasiteilchenoperatoren $\simeq$ die Teilchenoperatoren (wie man für ein Idealgas erwarten hätte).

• DIE SUPRAFLUIDITÄT

* Eine Quantenflüssigkeit mit einem Energiespektrum dieses Typs besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft der sogenannten Suprafluidität, d.h. die Eigenschaft zu fließen, ohne irgendeine Zähigkeit zu zeigen.

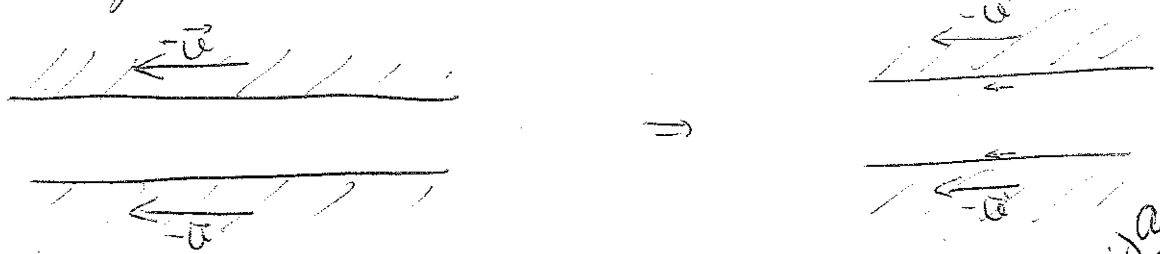
* Wir werden hier nur Null Temperatur betrachten.

· Wir betrachten eine Flüssigkeit, die mit konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch eine Kapillare fließt:



Eine vorhandene Zähigkeit würde dazu führen, daß wegen der Reibung an der Rohrwand (und innerhalb der Flüssigkeit selbst) die kinetische Energie der Flüssigkeit dissipiert würde. Natürlich würde damit der Strom langsamer.

* Betrachten wir die Strömung in dem Koordinatensystem, das sich mit der Flüssigkeit bewegt. In diesem System bewegen sich die Wände mit Geschwindigkeit $-\vec{v}$:



* Wenn es eine Zähigkeit gibt, dann müßte die Flüssigkeit anfangen sich zu bewegen. Diese Bewegung fängt nicht sofort an, sondern mit dem Auftreten von Elementaranregungen in der Flüssigkeit.

* Wir werden nun sehen, daß für $v < v_c$ (eine gewisse kritische Geschwindigkeit) energetisch ungünstig ist, eine derartige Elementaranregung zu erzeugen. Damit gibt es keine Zähigkeit, i.e. wir haben Suprafluidität.

*Nehmen wir an, daß es in der Flüssigkeit eine einzelne Elementaranregung mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $\varepsilon(\vec{p})$ gibt.

Dann, in dem Koordinaten System der Flüssigkeit ist die Energie der Flüssigkeit $E_0 = \varepsilon(\vec{p})$, und der Impuls $\vec{P}_0 = \vec{p}$

*Wir kehren nun zu dem Koordinatensystem zurück in dem die Kapillare ruht; dann wir transformieren die Energie

$$\left.\begin{aligned} E &= \varepsilon(\vec{p}) + \vec{p}\cdot\vec{v} + \frac{Mv^2}{2} \\ \vec{P} &= \vec{p} + M\vec{v} \end{aligned}\right\} \quad M \equiv \text{Masse der Flüssigkeit.}$$

* Ohne Anregung $E = \frac{Mv^2}{2} \equiv$ anfängliche kinetische Energie des Stroms

Also $\varepsilon(\vec{p}) + \vec{p}\cdot\vec{v}$ ist die Änderung der Energie, verursacht durch das Auftreten der Anregung. ($\vec{p}\cdot\vec{v}$ ist einfach der Doppler-Effekt).

* Wenn die Anregung erzeugt wird, ist weil die Energie des Systems mit Anregung abnimmt, also die Anregung wir erzeugt wenn:

$$\varepsilon(\vec{p}) + \vec{p}\cdot\vec{v} < 0$$

$\varepsilon(\vec{p}) + \vec{p}\vec{v}$ ist minimal wenn $\vec{p}$ und $\vec{v}$ antiparallel sind, also

$\vec{p}\cdot\vec{v} = -pv$.

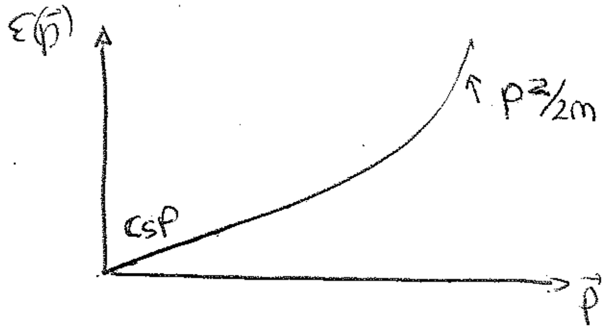
$$\varepsilon(\vec{p}) - pv < 0 \longrightarrow v > \frac{\varepsilon(\vec{p})}{p}$$

Also die erste Anregung wird erzeugt wenn

$$v > \min\left\{\frac{\varepsilon(\vec{p})}{p}\right\} = v_c \qquad \text{(LANDAU-KRITERIUM)}$$

Wenn $v_c > 0$ ist, dann für $v < v_c$ werden Anregungen nicht erzeugt $\longrightarrow$ Es gibt keine Zähigkeit $\longrightarrow$ SUPRAFLUIDITÄT

* Was ist v_c in unserem Spektrum?



* Ganz klar

$$\min\left\{\frac{\varepsilon(\vec{p})}{p}\right\} = \left(\frac{\partial \varepsilon(\vec{p})}{\partial p}\right)_{p=0} = c_s$$

* Also für den Bogoliubov Spektrum, die kritische Geschwindigkeit für Superfluidität ist die Schallgeschwindigkeit.

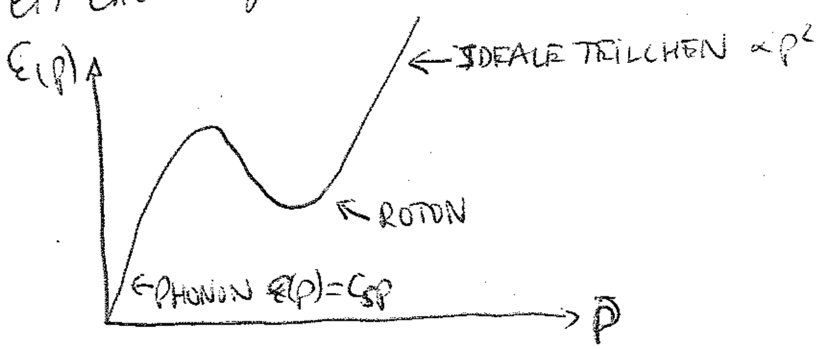
$$v_c = c_s = \sqrt{\frac{\mu}{m}} = \sqrt{\frac{U_0 n}{m}}$$

- Aufpassen: wenn $a \to 0$ (ideal gas) $\Rightarrow U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \longrightarrow 0$

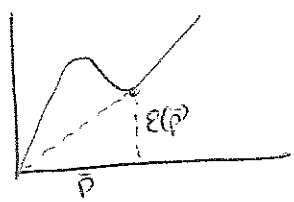
und damit $v_c = 0 \longrightarrow$ Es gibt keine Superfluidität.

* Für ein idealer gas haben wir zwar BE-Kondensation, aber keine Superfluidität.

* Der typische Beispiel von Superfluidität ist ^4He. In ^4He ist der Spektrum eigentlich ein bisschen komplizierter (weil die Stößen relativ wichtiger sind)



* Für ^4He, $v_c \neq c_s$ weil $\min\{\varepsilon(p)/p\}$ wird durch den Roton gegeben



* Aber die Idee von Superfluidität ist gleich.
* Diese Idee ist extrem wichtig!