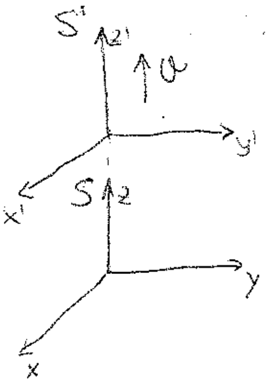
• SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

• Am Anfang dieser Vorlesungsreihe haben wir die Idee von Inertialsysteme und Galilei-Transformation (S. 11) diskutiert. Damals haben wir die Existenz eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit angenommen.

* In der Vergangenheit dachte man, dass dieser absoluten Raum von einem so genannten Weltäther gegeben war. Dieser war unveränderlich und unbeweglich, und setzte den Bewegung materieller Körper keinen Widerstand entgegen. Wir werden sofort sehen, dass diese Idee als falsch sich bewiesen hat.

* Erstmal sollten wir ein Paar Punkte ~~über~~ unserer Diskussion der Galilei-Transformation (S. 11) auffrischen:
  * Inertialsysteme: Bezugsystem, in dem das Newton'sche Trägheitsgesetz $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ ohne Mitwirkung von Scheinkräfte (S. 13) gilt.
  * Sei S ein Inertialsystem. Sei S' ein Bezugsystem, der sich relativ zu S geradlinig gleichförmig bewegt (zur $t=0$, $S=S'$). Dann ist S' auch ein Inertialsystem.

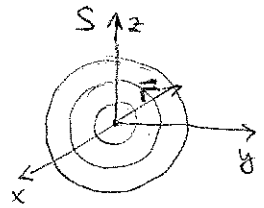


* Wir nehmen die konstante Geschwindigkeit v parallel zur z-Achse.
* Dann lautet die Galilei-Transformation $S \Leftrightarrow S'$ (aus S. 12):

$$x = x'$$
$$y = y'$$
$$z = z' + vt$$
$$t = t'$$

* Diese Transformation sieht (für unseren alltäglichen Erfahrungen) sehr intuitiv. Sie ist aber problematisch, besonders wenn man die Licht betrachtet.

* Zum Beispiel. Nehmen wir eine Lichtquelle im Ursprung von S.



Die sendet ~~K~~Kugelwellen (S. 185) im Vakuum, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen (c). Für den Ortsvektor $\vec{r}$ eines bestimmten Punktes auf der Wellenfront gilt (in S-System)

$$\dot{\vec{r}} = c\,\vec{e}_r \qquad \vec{e}_r = \vec{r}/r$$

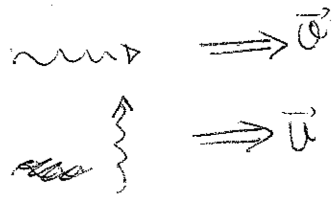
* Aus der Galilei-Transformation wird die Lichtgeschwindigkeit so transformiert

$$\dot{\vec{r}}' = c\,\vec{e}_r - \vec{v}$$

Ganz klar $|\dot{\vec{r}}'| \neq c$ $\longrightarrow$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum fürs System-S' wäre also nicht c.

* Außerdem entspricht $\dot{\vec{r}}'$ keine Kugelwelle mehr. Damit könnten wir einen absoluten Raum definiere. ~~E~~Es wäre gerade jenes Bezugssystem in dem $\dot{\vec{r}} = c\,\vec{e}_r$ beobachtet würde.

* Wenn das richtig wäre dann könnten wir folgendes machen. Wir messen die Lichtgeschwindigkeit in einem Experiment auf der Erde und zwar:



* In Richtung der Bewegung der Erde ①
* Senkrecht zu der Bewegung der Erde ②

Wenn die Galilei-Transformation (und damit die Idee des absoluten Raumes) richtig wäre, dann wäre die Messung Richtungabhängig.

* Das war genau die Idee des Michelson-Morley-Experiments. Wir weden hier nicht die Einzelheiten des Experiments (die wurden durch die Interferenz von Licht (S. 181) ~~[illegible]~~ durchgeführt).

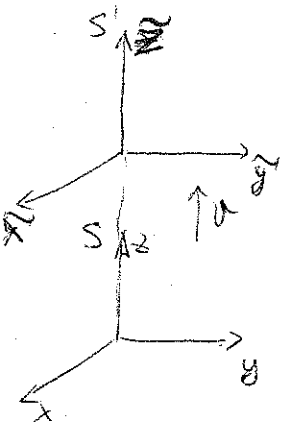
* Wichtig ist es aber, dass diese Experimente zeigten, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen gleich und unabhängig von der relativen gleichförmig geradlinigen Bewegung des Beobachters, des übertragenden Mediums und der Lichtquelle ist.

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist eine Konstante !! (für alle inertiale Systeme)	$\Longrightarrow$	Also die Galilei-Transformation ist nicht korrekt!

* Man braucht also eine neue Art von Transformation, aber für niedrige Geschwindigkeiten ($v \ll c$) sollten wir unsere alltägliche Erfahrung (also die Galilei-Transformation) zurückbekommen.
* Diese neue Transformation hat Folgen, die für uns manchmals schwer zu verstehen sind. Das ist ganz klar, kein Zufall, da wir nur an Geschwindigkeiten $v \ll c$ gewohnt sind. Diese neue Physik ist die SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE (!!)

---

* Lorentz-Transformation
* Wir werden nun diese neue Transformation einführen. Wie vorher betrachten wir 2 Inertialsysteme S und S', wobei wir S als ruhend und S' als bewegt annehmen. Zur Zeit $t=0$ $S=S'$



* Zur Zeit $t=0$ sendet eine Lichtquelle im Ursprung von S ein Signal aus. Das ergibt in S eine sich mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitende Kugelwelle ($\vec{r} = c\,\vec{e}_r$), also:

$$c^2t^2 = x^2+y^2+z^2$$

* Wir werden nun zwei wichtige Postulaten einführen

Einsteins Postulate:

* Alle physikalischen Gesetze und Resultate aller Experimente sind in allen gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegten System gleich (Äquivalenzpostulat)
* Die Lichtgeschwindigkeit hat im Vakuum zu allen Zeiten und an allen Orten den Konstanten Wert c und ist insbesondere von der Bewegung der Lichtquelle unabhängig.

Das 1. Postulat kennen wir schon aus der Galilei-Transformation (S. 12). Das 2. Postulat ist neu!

* Aus diesem 2. Postulat, in S' hat man auch

$$c^2 \tilde{t}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \quad \text{(Ich benutze nun die Schreibweise } \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t} \text{ fürs System } S'\text{)}$$

~~[illegible]~~

* Von nun an werde ich die folgende Schreibweise benutzen

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 \equiv ct \\ x^1 \equiv x \\ x^2 \equiv y \\ x^3 \equiv z \end{array}\right\} \text{ in } S \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}^0 \equiv c\tilde{t} \\ \tilde{x}^1 \equiv \tilde{x} \\ \tilde{x}^2 \equiv \tilde{y} \\ \tilde{x}^3 \equiv \tilde{z} \end{array}\right\} \text{ in } S'$$

* Das Resultat des Michelson-Morley-Experiments lässt sich als eine Invarianzbedingung formulieren:

$$(x^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x^\mu)^2 = (\tilde{x}^0)^2 - \sum_{\mu=1} (\tilde{x}^\mu)^2$$

* Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten in S und S' muss linear sein

$$\tilde{x}^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

(Bemerkung: Sonst eine gleichförmige Bewegung in S wäre keine gleichförmige Bewegung in S', was dem ~~Ä~~quivalenzpostulat widersprechen würde.)

* Die Matrix $L_{\mu\lambda}$ ist die so genannte Transformationsmatrix
* Da v in z-Richtung geht, werden $\tilde{x}^1 = x^1$ und $\tilde{x}^2 = x^2$

Die Komponenten $\tilde{x}^0$ und $\tilde{x}^3$ sind von x^1 und x^2 unabhängig, da kein Punkt der x^1-x^2-Ebene ausgezeichnet ist.

Also $$\tilde{x}^0 = L_{00}x^0 + L_{03}x^3$$
$$\tilde{x}^3 = L_{30}x^0 + L_{33}x^3$$

* Die Invarianzbedingung lautet nun $(x^0)^2 - (x^3)^2 = (\tilde{x}^0)^2 - (\tilde{x}^3)^2$

$$= [L_{00}x^0 + L_{03}x^3]^2 - [L_{30}x^0 + L_{33}x^3]^2$$
$$= (L_{00}^2 - L_{30}^2)(x^0)^2 - (L_{33}^2 - L_{03}^2)(x^3)^2 + 2(L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33})x^0x^3$$

Also $$\left\{\begin{array}{l} L_{00}^2 - L_{30}^2 = 1 \\ L_{33}^2 - L_{03}^2 = 1 \\ L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33} = 0 \end{array}\right\}$$

Diese Gleichungen werden durch den folgenden Ansatz gelöst:

$$L_{00} = L_{33} = \cosh\chi$$
$$L_{30} = L_{03} = -\sinh\chi$$

(Das "–" in $L_{30} = L_{03}$ ist so, weil später für $v \ll c$ wir die Galilei-Transformation zurück bekommen müssen)

(Bemerkung: wir benutzen hier, dass $\cosh^2\chi - \sinh^2\chi = 1$)

* Wir müssen χ noch bestimmen. Betrachten wir die Bewegung des Ursprungs des Bezugssystems S' $(\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2 = \tilde{x}^3 = 0)$

Also $0=\tilde{x}^3 = L_{30}\,x^0 + L_{33}\,x^3 = -\sinh\chi\; x^0 + \cosh\chi\; x^3$

$$= -\sinh\chi\,(ct) + \cosh\chi\; z \longrightarrow \tanh\chi = \frac{z}{ct}$$

Von S ausgesehen gilt für den Ursprung von S' $\Rightarrow z = vt$

Also $\tanh\chi = \dfrac{v}{c}$

Aus der Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen bekommen wir

$$\cosh\chi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\sinh\chi = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

* Wir benutzen von nun an die Notation

$$\beta = v/c$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Dann $L_{00} = L_{33} = \gamma$
$L_{30} = L_{03} = -\beta\gamma$

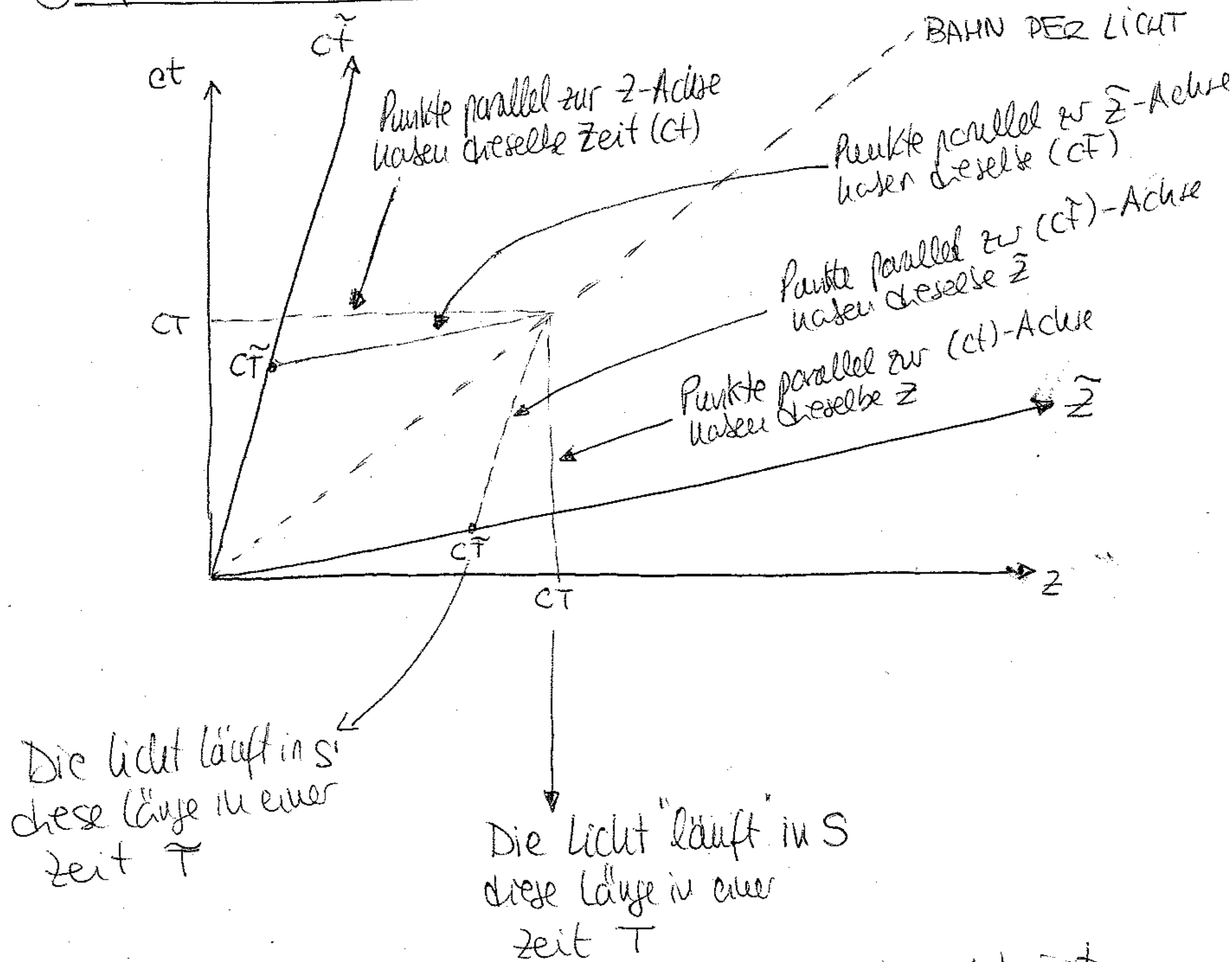
Damit

$$\boxed{\begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}$$

oder anders geschrieben:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{t} &= \gamma\,(t - \beta z/c) \\ \tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= \gamma\,(z - \beta ct) \end{aligned}} \Longrightarrow \underline{\text{LORENTZ-TRANSFORMATION}}$$

* Graphische Darstellung der Lorentz-Transformation



* Lass uns sehen, dass die Abbildung korrekt ist.
  * Die Gerade mit $\tilde{z}=0$ (Die ($c\tilde{t}$)-Achse) ist
    $$0=\tilde{z}=\gamma(z-\beta ct) \longrightarrow \boxed{(ct)=\frac{1}{\beta}z} \longrightarrow \underline{c\tilde{t}\text{-Achse}}$$
  * Die Gerade mit $c\tilde{t}=0$ (die $\tilde{z}$-Achse) ist
    $$0=c\tilde{t}=\gamma\,[ct-\beta z] \longrightarrow \boxed{(ct)=\beta z} \longrightarrow \tilde{z}\text{-Achse}$$

Da $\beta = v/c < 1$, dann die Achse sind wie in der Abbildung da oben.

* Diese Raum-Zeit-Diagramme heißen auch
  <u>Minkowski-Diagramme</u>

* Diese Transformation ersetzt nun die Galilei-Transformation. Besonders wichtig ist es hier, dass die Zeit auch mittransformiert wird.

* Was passiert für $v \ll c$?

Dann $\beta \ll 1$

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Dann
$$\left.\begin{aligned} \tilde{t} &\approx t \\ \tilde{z} &\approx z - vt \end{aligned}\right\}$$ Wir bekommen (als erwünscht) die Galilei-Transformation zurück!

* Was passiert für $v > c$?

$$\tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[t - \frac{v}{c^2} z\right] \longrightarrow$$ für $v > c$ $\tilde{z}$ wird imaginär

Das kann nicht sein, also c ist offensichtlich die maximale Relativgeschwindigkeit.

* Die Inversmatrix $L^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Das könnten wir erwarten, da sich S von S' aus gesehen mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt, und damit $\beta \rightarrow -\beta$ und $\gamma \rightarrow \gamma$.

* Nun haben wir die erwünschte Transformation. Nun werden wir die (aus unserer Sicht) komische Folgen dieser Transformation untersuchen.

* **Gleichzeitigkeit**

* In der Lorentz-Transformation wird die Zeit mittransformiert. Das hat wichtige Folgen für die Definition der Gleichzeitigkeit. Jeder Inertialsystem hat sein eigenes Gleichzeitigkeitskriterium. <u>Die absolute Zeit gibt es nicht!</u>

* Wenn alle Zeitmessungen in demselben Inertialsystem durchgeführt würden, dann gäbe es kein Problem. Wir könnten die Uhren an verschiedenen Orten durch ein Lichtsignal synchronisieren.

- A schick ein Signal zu B wo die Licht reflektiert wird. Die Zeit $t_{A\to B\to A} = 2t_{A\to B} = 2t_{B\to A}$ wird in der A-Uhr gemessen und die Zeit wird in B-Uhr
- Umgekehrt. $B \to A \to B$ gemessen. Da für die Licht $B \to A \to B$ und $A \to B \to A$ mit derselben Geschwindigkeit gemacht, werden mit derselben Geschwindigkeit gemacht, dann beide Uhren messen dieselbe Zeit und können damit synchronisiert werden.

* Die Sache sieht problematischer wenn man Uhren betrachtet, die sich in verschiedenen, relativ zueinander bewegten Inertialsystemen befinden. Das ist so, weil die ~~Zeit in~~ Gleichzeitigkeit ist unterschiedlich in S und in S'!

In S synchronisieren wir 2 Ereignisse in z_1 und z_2

* In S synchronisieren wir 2 Ereignisse
Also $\boxed{t_1 = t_2}$

* <u>Was passiert in S'?</u>

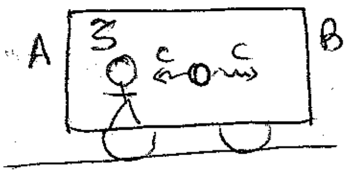
$$\tilde{t}_1 = \frac{t_1 - (v/c^2) z_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\tilde{t}_2 = \frac{t_2 - (v/c^2) z_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) z_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Also $$\boxed{\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2 = \frac{\left(\frac{v}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} (z_2 - z_1) \neq 0}$$ (!!)

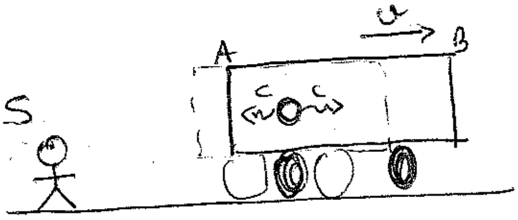
* Graphische Darstellung der Relativität der Gleichzeitigkeit

* Sagen wir dass wir auf einem Zug stehen. (nun sind wir $\tilde{S}$)



Eine Lichtquelle ist auf der Mitte des Zuges. Ganz klar die Licht erreicht beide Wände gleichzeitig.

* Nun sind wir draußen, auf dem Gleis (nun sind wir S)

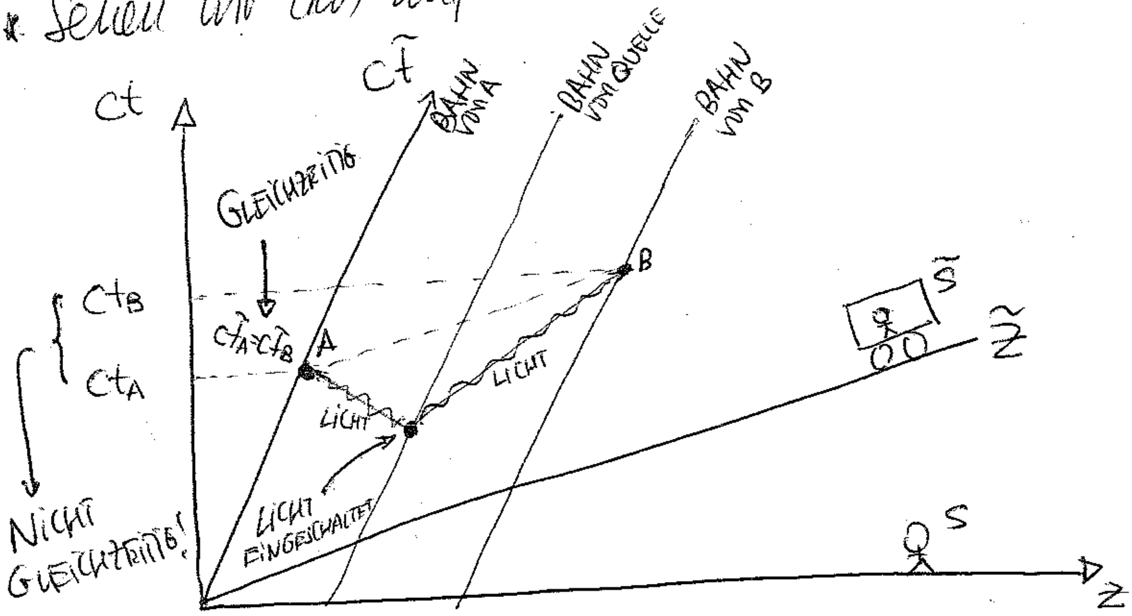


* Aus dem 2. Postulat ist die Lichtgeschwindigkeit (auch für S !!) immer noch c.

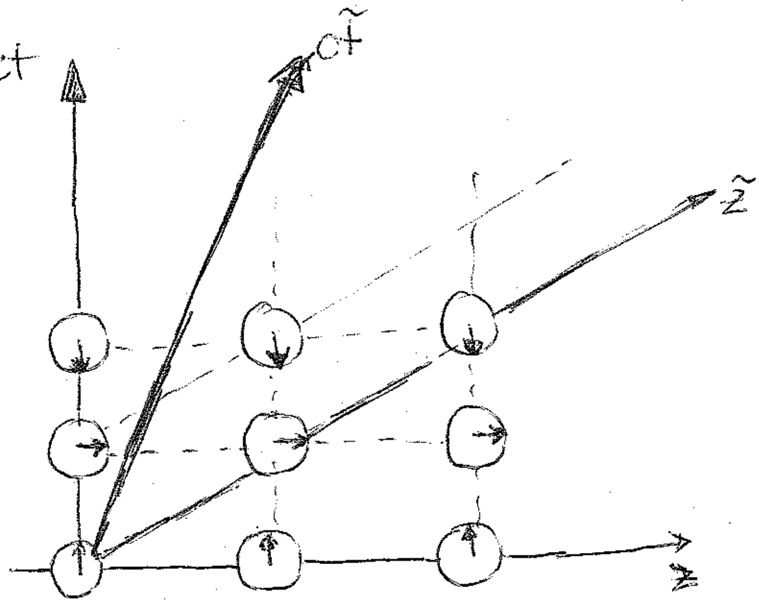
* Als Folge wir (als S) sehen wir dass
  * Der Ereignis A ≡ "Kontakt mit Wand A" passiert vor dem Ereignis B ≡ "Kontakt mit Wand B".

Also die Gleichzeitigkeit ist relativ.

* Sehen wir das auf einem (ct)-z - Bild:

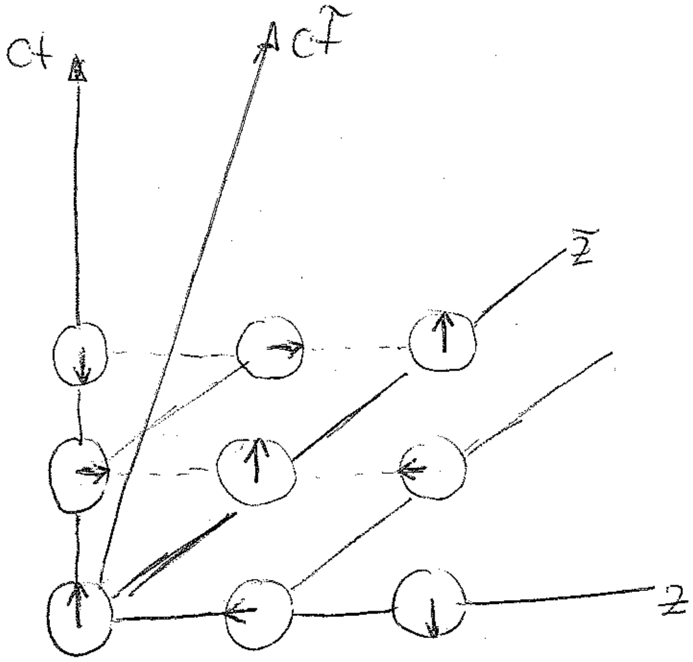


* Die Relativität der Gleichzeitigkeit führt zu mehreren komischen Folgen. Eine erste Folge, aber das sollte schon mehr oder weniger klar sein, ist, dass synkronisierte Uhren in einem Bezugssystem als nicht-synkronisiert in einem anderen Bezugssystem aussehen.



* Die Uhren sind synkronisiert für S aber nicht für S'

Natürlich alles ist relativ...



* Die Uhren sind nur synkronisiert für S' aber nicht für S!

* Also in S passieren die Ereignisse gleichzeitig
aber nicht für die Uhr in S' (!!)

Das ist komisch natürlich (aber noch mal, wir haben keine sehr entwickelte Intuition für $v \sim c$)

* Man kann sich sogar überlegen ob man die Kausalität verletzen könnte, d.h. ob man die Reihenfolge Ursache → Folge umkippen kann. Das wäre ein riesiges Problem natürlich.

Gucken wir es.

Die 2 Ereignisse finden in z_1 und z_2 statt.

* Sei in S, $t_2 > t_1$.
* Dann $t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(z_2 - z_1)\right)$

Die 2 Ereignisse sind kausal miteinander verknüpft, so erfolgt der Informationsvorgang, der Ursache und Wirkung verbindet, mit endlicher Geschwindigkeit $v \leq c$.

$$\text{Dann} \quad t_2 - t_1 = \frac{z_2 - z_1}{v} \geqslant \frac{z_2 - z_1}{c} \longrightarrow t_2' - t_1' \geqslant 0$$

und damit Ursache und Wirkung lassen sich nicht vertauschen.

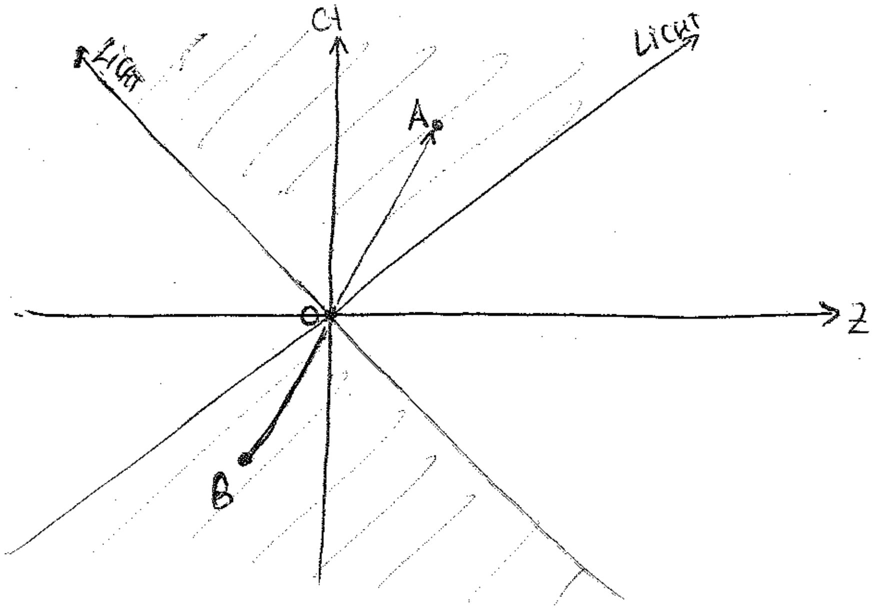
(Bemerkung: Der Informationsvorgang geht durch z.B. eine ~~[illegible]~~ Wellenpaket-signal (S. 184). Die Geschwindigkeit der Informationsübertragung ist die Gruppengeschwindigkeit des Pakets (S. 184).)

* Die Kausalität ist also gerettet. Sonst hätten wir ein großes Problem gehabt!

* <u>Lichtkegel</u>

* Verknüpft mit der Idee der Kausalität führen wir die Idee von Lichtkegel.

In einem Minkowski-Diagram



Ein Punkt A auf dem Raum-Zeit-Diagramm ist mit O kausal verknüpft wenn ein Signal von O A mit einer Geschwindigkeit $v \leq c$ erreichen kann.

Ganz klar das passiert nur wenn A innerhalb des gestrichenen Bereiches liegt.

Der Punkt A liegt ganz klar in der <u>Zukunft</u> von O, (also A kann eine Folge von O sein).

Genauso ein Punkt B (sieh Abbildung) ist auch mit O kausal verknüpft, aber diesmal in der <u>Vergangenheit</u> (also B kann die Ursache von O sein).

* Die Lichtbahnen bauen also einen so genannten <u>Lichtkegel</u>. Innerhalb des Kegels (gestrichener Bereich) liegt die Kausalitätzone.

* Zeitdilatation

* Eine andere komische Folge der Relativität der Gleichzeitigkeit ist die sogen. Zeitdilatation

* Im Bezugssystem haben wir eine Uhr am Ort z. Die Uhr tickt mit einer Periode Δt, also wenn die Uhr ~~zur~~ Zeit t_1 tickt, tickt sie noch mal später zur Zeit $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Das war für S. Was passiert im Bezugssystem S'?

$$\left.\begin{aligned} t_1 &\longrightarrow t_1' = \gamma \left[t_1 - \frac{vz}{c^2}\right] \\ t_2 &\longrightarrow t_2' = \gamma \left[t_2 - \frac{vz}{c^2}\right] \end{aligned}\right\} \Delta t' = t_1' - t_2' = \gamma \Delta t$$

Also für S', hat die Uhr eine Periode $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta t$.

* Also eine Person im Bezugssystem S' sieht dass die Uhr von S ~~geht~~ nach. *Das ist die so genannte* *Zeitdilatation*.

* Versuchen wir nun diese Idee noch besser zu verstehen. Nehmen wir 2 Uhren. Um zu untersuchen, ob diese Uhren gehen nach zueinander, macht man folgendes

① Man synkronisierte die 2 Uhren
⟹ Also, die zeigen dasgleiche wenn wir zur gleichen Zeit gucken.

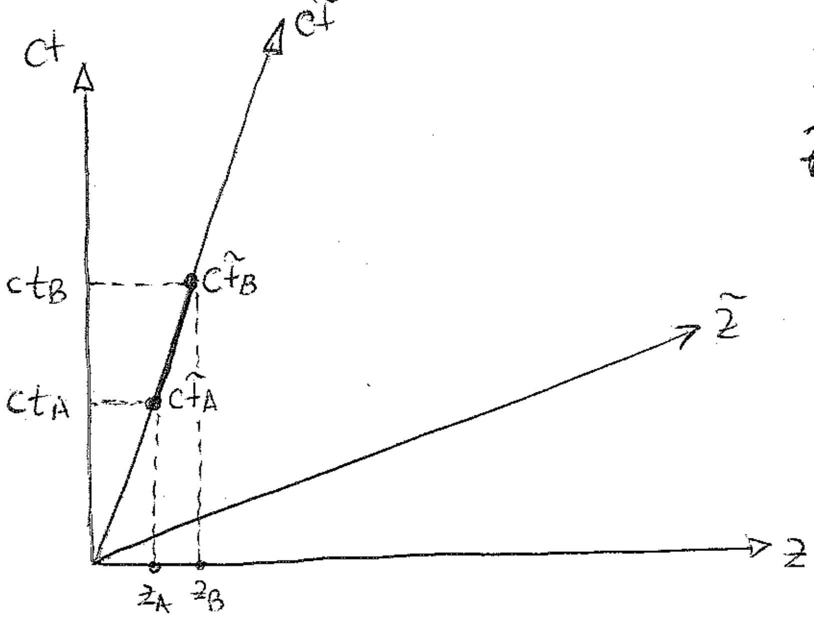
} (Das ist einfach zur Zeit $t = 0 = \tilde{t}$)

② Man wartet ab, und vergleicht die Displays der beiden Uhren noch mal zur gleichen Zeit

} Hier kommen die Probleme...

Natürlich redet man alltäglich nie über "zur gleichen Zeit". Es ist zu selbstverständlich für uns, aber hier ist das entscheidend!

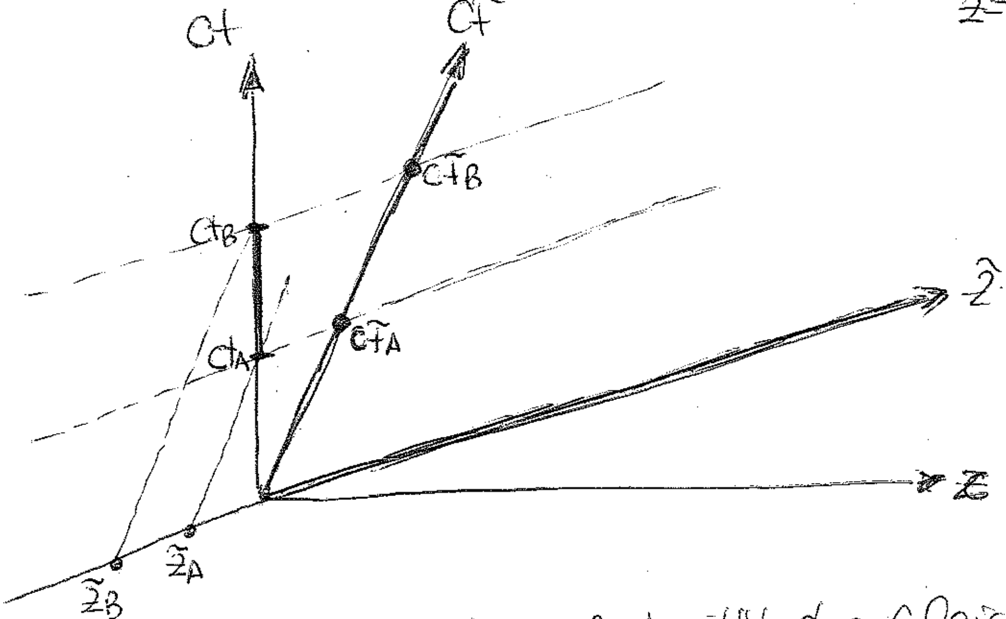
* Gucken wir erstmals die Uhr in S'!
Diese Uhr bleibt fest in $\tilde{z}=0$ (also sie ist die Uhr am Ursprung von S')
Was sieht dann ein Beobachter in S?



$$\tilde{z}=0 \Rightarrow \gamma(z-\beta ct) \Rightarrow z=\beta ct$$
$$\tilde{t}=\gamma(t-\beta z/c)=\gamma(1-\beta^2)t$$
$$\to t=\gamma\tilde{t}$$
$$\to t_B-t_A=\gamma(\tilde{t}_B-\tilde{t}_A)$$
$$\Delta t=\gamma\Delta\tilde{t} > \Delta\tilde{t}$$

Der Beobachter in S sieht, dass die Zeit langsamer in S' vergeht.

* Aber noch mal alles ist relativ...
Gucken wir nun die Uhr in S.
Diese Uhr bleibt fest in $z=0$ (also sie ist die Uhr im Ursprung von S)
Was sieht dann ein Beobachter in S'?



$$z=0 \to \tilde{t}=\gamma t$$
$$\tilde{t}_B-\tilde{t}_A=\gamma(t_B-t_A)$$
$$\Delta\tilde{t}=\gamma\Delta t > \Delta t$$

Der Beobachter in S' sieht, dass die Zeit langsamer in S vergeht!

* Also, als Folge der Relativität der Gleichzeitigkeit, meine eigene Uhr geht (für mich) immer schneller als ~~[illegible]~~ alle anderen Uhren in relativer Bewegung mit mir! Das ist die Zeitdilatation!!

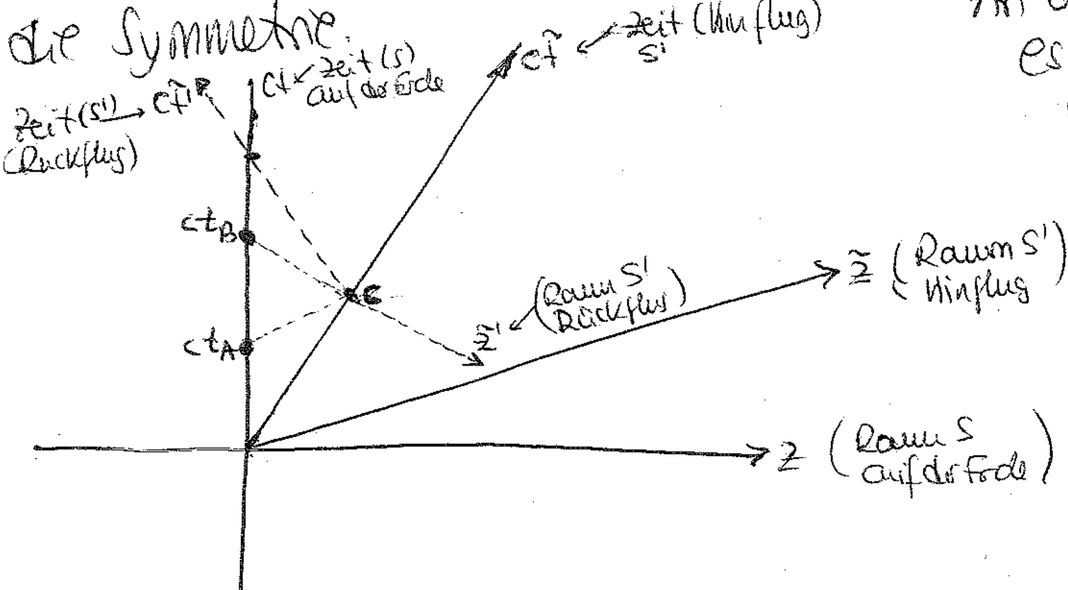
* Zwillingsparadoxon

* Die Zeitdilatation ist komisch, und führt zu scheinbare Paradoxen. Das bekannteste Paradoxon ist das sogen. Zwillingsparadoxon.

* Sagen wir, dass einer von zwei Zwillingen mit ~~Nahezu~~ Lichtgeschwindigkeit zu einem fernen Stern fliegt, und kehrt anschließend mit derselben Geschwindigkeit zurück. Nach unserer Betrachtungen der Zeitdilatation schließt jeder Zwilling, dass für der andere die Zeit langsamer vergeht (und damit der Bruder ist jünger).

* Die Frage ist natürlich, was passiert wenn der Raumschiff zurück kehrt? Der Antwort lautet... Der Bruder auf der Erde ist älter! Die Frage nun ist natürlich, wie ist das möglich? Wo haben wir die Symmetrie gebrochen? Soll nicht alles relativ sein?

* Der entscheidende Punkt ist, dass der Bruder auf dem Raumschiff fliegt mit konstanter Geschwindigkeit raus, aber in einer Punkt muss er zurückkehren, und das bricht natürlich die Symmetrie.



An der Umkehrpunkt gibt es eine Änderung der Definition der Gleichzeitigkeit.

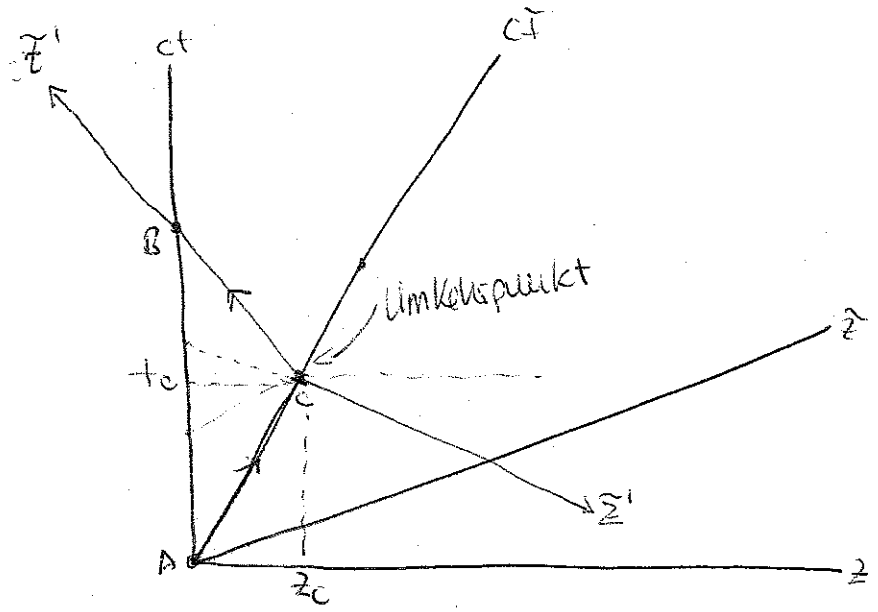
Hinflug: C ist gleichzeitig mit ct_A

Rückflug: C ist gleichzeitig mit ct_B

↓

Dieser Zeitsprung erklärt das Paradoxon!

* Dieser Zeitsprung wurde schon 1971 beobachtet (Atomuhren auf Flugzeuge!)



Der Bruder auf dem Schiff ist um Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ jünger als der Bruder auf der Erde.
Gucken wir das

$$\tilde{t} = \gamma\left[t - \beta z/c\right]$$
$$\tilde{z} = \gamma(z - \beta c t)$$

* <u>HINFLUG</u>: Der Raumschiff fliegt bis $z = z_c$

Zeit auf der Erde $\longrightarrow t_c \longrightarrow z_c/v \Rightarrow t_c = z_c/v \longrightarrow z_c = v t_c$

$$\tilde{t}_c = \gamma(t_c - \beta z_c/c) = \gamma\left[1-\beta^2\right]t_c = \frac{1}{\gamma}t_c$$
$$\tilde{z}_c = \gamma(z_c - \beta c t_c)$$

Der Raumschiff fliegt von $z = z_c$ bis $z = 0$ $\left(\begin{matrix}\text{geschwind.}\\ -v\end{matrix}\right)$

* <u>Rückflug</u>:

$$\tilde{t}' = \gamma(t + \beta z/c)$$
$$\tilde{z}' = \gamma(z + \beta c t)$$

$$C \longrightarrow \left.\begin{matrix}\tilde{t}'_c = \gamma(t_c + \beta z_c/c) = \gamma(1+\beta^2)t_c \\ \tilde{z}'_c = \gamma(z_c + \beta c t_c)\end{matrix}\right\} \quad \tilde{t}'_B - \tilde{t}'_c = \gamma(1-\beta^2)t_c$$

$$B \longrightarrow \tilde{t}'_B = \gamma(2t_c) = 2\gamma t_c$$
$$\tilde{z}'_B = \gamma\beta c\, 2t_c$$

TOTAL ZEIT auf der Erde $\longrightarrow 2t_c$

TOTAL ZEIT auf dem Schiff $\longrightarrow \tilde{t}_c + (\tilde{t}'_B - \tilde{t}'_c) = \frac{1}{\gamma}t_c + \frac{1}{\gamma}t_c = \frac{2}{\gamma}t_c =$

$$= 2\sqrt{1-v^2/c^2}\, t_c < t_c$$

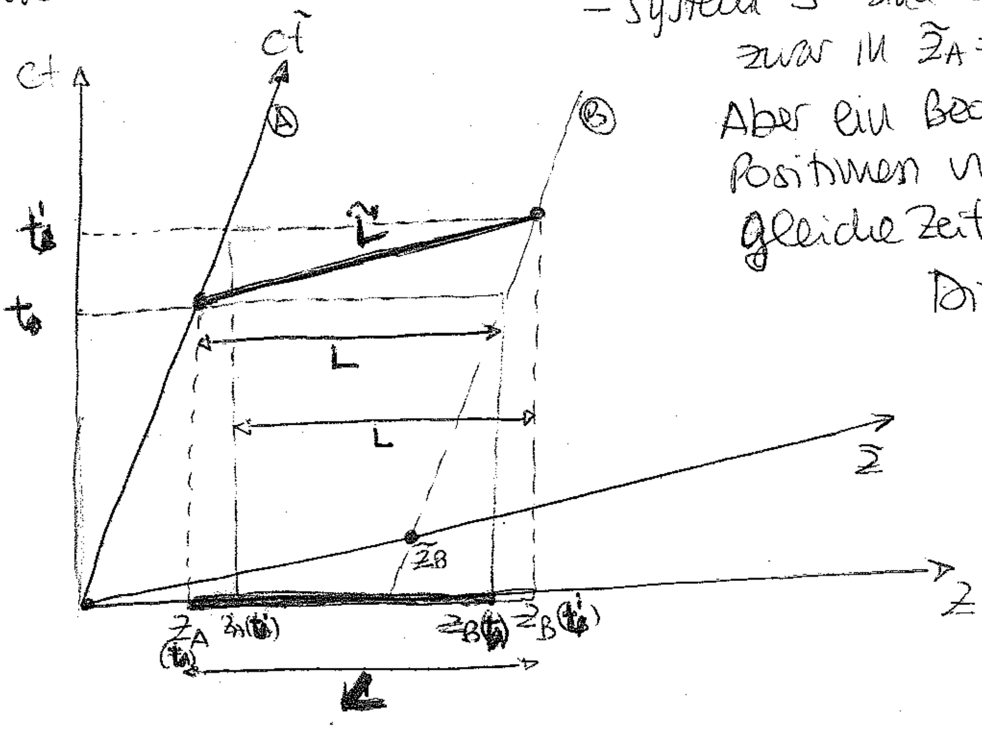
• Längenkontraktion

* Sehen wir nun noch eine komische Folge der Relativität der Gleichzeitigkeit.

* Was heißt, wenn wir sagen das z.B. eine Stange eine gewisse Länge hat. Das heißt, dass wir die 2 Endpunkte messen (und zwar ~~zur~~ zur gleichen Zeit) und die Länge ist die Differenz. Normalerweise (für unseren Alltag) brauchen wir nicht diese "zur gleichen Zeit". Aber hier, noch mal, ist die Gleichzeitigkeit entscheidend!

* Machen wir folgendes. Ein Beobachter (S') in einem Zug mißt die Länge des Zuges. Unserer Beobachter in S' mißt eine Länge $\tilde{L}$. Ein Beobachter steht auf dem Gleis. Welche Länge L mißt der Beobachter? Noch mal, das heißt:
  * S' mißt die Länge $\tilde{L}$ für seine Gleichzeitigkeit.
  * S mißt die Länge L für seine Gleichzeitigkeit.

Nennen wir A und B die 2 Wände des Zuges. Im Bezugs-system S' sind die Wände fest, und zwar in $\tilde{z}_A = 0$, $\tilde{z}_B$.



Aber ein Beobachter S mißt die Positionen von A und B für seine gleiche Zeit, also er mißt $z_A^{(1)}$ und $z_B^{(1)}$.

Diese Länge L ist deutlich kürzer als L'.

⇓

Längenkontraktion

* Gucken wir genauer mit der Lorentz-Transformation

$$\tilde{t} = \gamma(t - \beta z/c) \longrightarrow t = \gamma(\tilde{t} + \beta \tilde{z}/c)$$
$$\tilde{z} = \gamma(z - \beta c t) \longrightarrow z = \gamma(\tilde{z} + \beta c \tilde{t})$$

S macht die Messungen zur gleichen Zeit t (sagen wir $t=0$).

Also $0 = \gamma(\tilde{t} + \beta \tilde{z}/c) \longrightarrow \tilde{t} = -\beta \tilde{z}/c$

$$z = \gamma(\tilde{z} - \beta^2 \tilde{z}) = \gamma(1-\beta^2)\tilde{z} = \sqrt{1-v^2/c^2}\,\tilde{z}$$

Also $(z_B - z_A) = \sqrt{1-v^2/c^2}\,(\tilde{z}_A - \tilde{z}_B)$

$$\boxed{L = \sqrt{1-v^2/c^2}\,\tilde{L} < \tilde{L}} \longrightarrow$$ Längenkontraktion (auch genannt Lorentz-Kontraktion)

* Natürlich alles ist noch mal relativ...

Sagen wir, dass S eine Strecke mißt (die Strecke ist in Ruhe in S). S mißt eine Länge L. Noch mal A und B sind die Endpunkte der Strecke. S' macht die Messung zur gleichen Zeit $\tilde{t}$ (sagen wir $\tilde{t}=0$).

Also $0 = \gamma(t - \beta z/c) \longrightarrow t = \beta z/c$

$$\tilde{z} = \gamma(z - \beta c t) = \gamma(1-\beta^2) z = \sqrt{1-v^2/c^2}\, z$$

Also $(\tilde{z}_B - \tilde{z}_A) = \sqrt{1-v^2/c^2}\,(z_B - z_A)$

$$\boxed{\tilde{L} = \sqrt{1-v^2/c^2}\, L < L}$$ → Nun beobachtet S' eine Längenkontraktion!

* Also Objekte in Bewegung sehen kürzer, als wenn wir die Messungen in Ruhe machen.

(nur in der Richtung der Bewegung!!)

* Das Garagen-Paradoxon

* Die Lorentz-Kontraktion verursacht ebenfalls scheinbare Paradoxen. Vielleich die bekannteste dieser Paradoxen ist das so genannte Garagen-Paradoxon ("Pole-Barn paradox" auf Englisch).

* Nehmen wir eine Garage (S) und ein Auto (S').
Im Ruhesystem der Garage (S) hat die Garage eine Länge L_G, und im Ruhesystem des Autos (S') hat das Auto eine Länge $\tilde{L}_A$.
Sei $\tilde{L}_A > L_G$ (Also die Länge in Ruhe des Autos ist länger als die Länge in Ruhe der Garage). Das Auto bewegt sich mit Geschwind. v im Bezugssystem der Garage.

* Nun fürs System S $\longrightarrow$ Das Auto hat eine scheinbare Länge $L_A = \sqrt{1-v^2/c^2}\,\tilde{L}_A < \tilde{L}_A$

Sei $L_A < L_G$ $\longrightarrow$ Für jemand im Bezugssystem der Garage (im S) es sieht so aus, dass das Auto rein in der Garage paßt!

* Nun fürs System S' $\longrightarrow$ Die Garage hat eine scheinbare Länge $\tilde{L}_G = \sqrt{1-v^2/c^2}\,L_G < L_G$

Da $\tilde{L}_A$ sowieso größer als L_G war, dann $\tilde{L}_A > \tilde{L}_G$ $\longrightarrow$ das Auto paßt also auf keinen Fall da rein!!

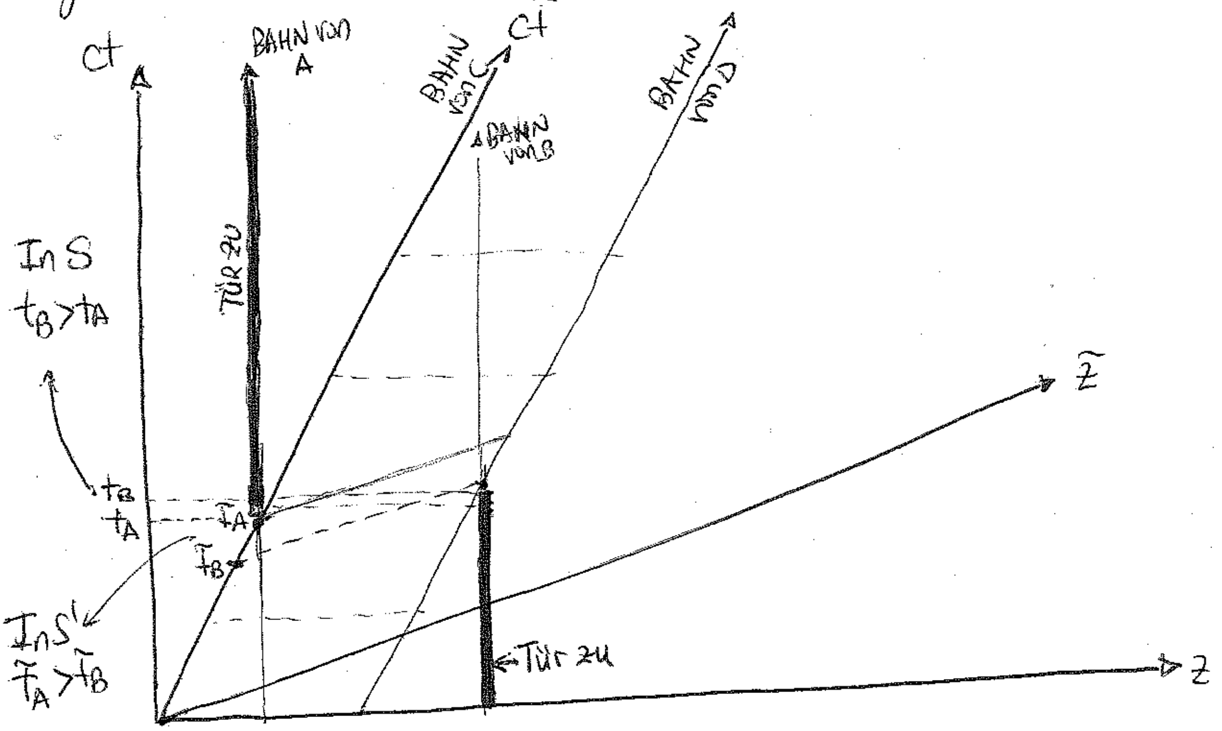
* Das ist das so genannte Garage-Paradoxon!

* Das Problem liegt wie immer an der Definition von Gleichzeitigkeit. Um das ~~zu~~ sehen, machen wir das folgende Gedankenexperiment. Die Garage hat 2 Türen, die vordere Tür (A) und die hintere Tür (B). ~~Wenn das Auto der vordere~~ ~~Teil des Autos B~~ B bleibt geschlossen, bis der vordere Teil (C) des Autos B erreicht, dann wir die Tür B geöffnet (wir wollen

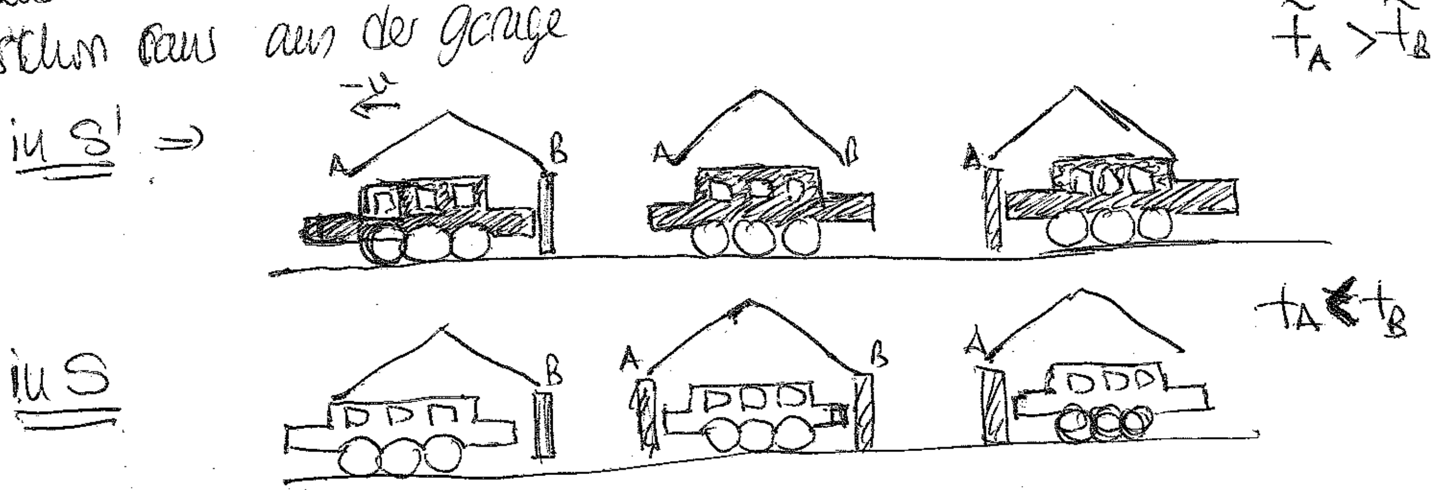
nicht, dass das Auto gegen die Wand B stößt, weil sonst hätten wir, dass das Auto bremsen würde, und damit wären die Bezugssysteme nicht Inertialsysteme).

Wenn der hintere Teil (D) des Autos A erreicht, dann wird die Tür A geschlossen.

* Zeichnen wir das auf einem Raum-zeit-Abbildung



Also es gibt keine Paradoxon. Im Bezugsystem (S') des Autos, wenn der vordere Teil B erreicht ($\tilde{t}_B$) ist die Tür A immer noch offen, und wenn der hintere Teil A erreicht ($\tilde{t}_A > \tilde{t}_B$) ist ein Teil des Autos schon raus aus der Garage



* Sagen wir, dass die Länge der Garage (L) ist genau $L = \gamma \tilde{L}$ ($\tilde{L}$ = Länge des Autos).

Der Beobachter im System S (die Garage) schließt die Türen ~~echt~~ (für ihn) wichtig! nur sehr kurz (zu zeigen dass er das machen kann) das Auto rein ist. Dann öffnet er sofort beide Türen (sonst, wie gesagt hätten wir ein Stoß, und das wollen wir nicht).

* Was sieht der Beobachter im Auto (S') ?

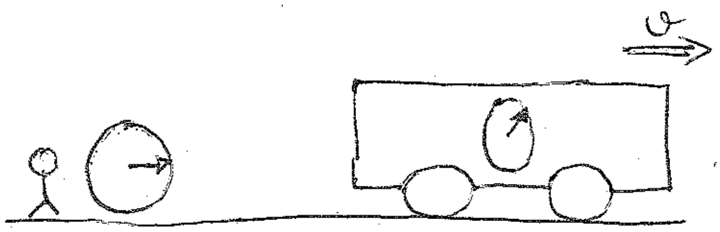
$$\left.\begin{aligned} \tilde{t}_B &= \gamma(t - \beta z_B/c) \\ \tilde{t}_A &= \gamma(t - \beta z_A/c) \end{aligned}\right\} \tilde{t}_B - \tilde{t}_A = -\frac{\gamma\beta}{c}(z_B - z_A) = -\frac{\gamma\beta}{c} L$$

$\longrightarrow$ Also $\tilde{t}_A - \tilde{t}_B > 0 \longrightarrow \boxed{\tilde{t}_A > \tilde{t}_B}$

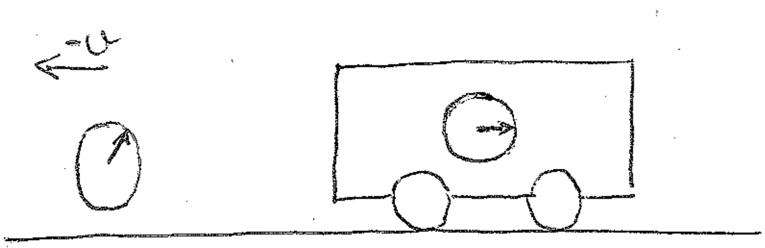
Es gibt kein Paradoxon!

* Zusammengefaßt, im Vergleich zu mir, Ich sehe dass für alle andere Systeme in relative Bewegung mit mir:

  * Die Zeit geht langsamer
  * Die Länge (in Richtung der Bewegung) ist kurzer



Natürlich wenn ich in der Bahn bin...



* Alles ist eine Frage der Perspektive.

Diese sind die <u>komische Folgen</u> der Relativität der Gleichzeitigkeit!

* Jedes Beobachter definiert bezogen auf sein System eine <u>Eigenzeit</u> ($\Delta\tau$). In einem bewegten System hat man $\Delta\tilde{\tau} = \gamma \Delta\tau$.

* Die Eigenzeit spielt eine wichtige Rolle in unserer Diskussion der relativistischen Mechanik. Die Eigenzeit ist Lorentz-invariant.

Wenn die Uhr in Ruhe ist dann zeigt die Eigenzeit.

* Transformation ~~Addition~~ der Geschwindigkeiten

* Mit der Lorentz-Transformation (S. 211) können wir zwischen $(x, y, z, t) \xrightarrow{\text{und}} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$ transformieren.

* Wir werden nun sehen, wie man die Geschwindigkeiten transformieren. Das geht ganz einfach.

Die Geschwindikeit in S ist $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

Also in S' $\longrightarrow \tilde{\vec{u}} = (\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z) = \left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}}, \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}}\right)$

$$\tilde{x} = x \longrightarrow d\tilde{x} = dx$$
$$\tilde{y} = y \longrightarrow d\tilde{y} = dy$$
$$\tilde{z} = \gamma(z - \beta c t) \longrightarrow d\tilde{z} = \gamma(dz - \beta c\, dt)$$
$$\tilde{t} = \gamma(t - \beta z/c) \longrightarrow d\tilde{t} = \gamma(dt - \beta/c\, dz)$$

* Also

$$\tilde{u}_x = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c} dz)} = \frac{u_x}{\gamma\left[1 - \frac{\beta}{c} u_z\right]}$$

$$\tilde{u}_y = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta/c\, dz)} = \frac{u_y}{\gamma\left[1 - \frac{\beta}{c} u_z\right]}$$

$$\tilde{u}_z = \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} = \frac{dz - \beta c\, dt}{dt - \beta/c\, dz} = \frac{u_z - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} u_z}$$

Also

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{u}_x &= \sqrt{1 - v^2/c^2}\left[\frac{u_x}{1 - u_z v/c^2}\right] \\ \tilde{u}_y &= \sqrt{1 - v^2/c^2}\left[\frac{u_y}{1 - u_z v/c^2}\right] \\ \tilde{u}_z &= \frac{u_z - v}{1 - u_z v/c^2} \end{aligned}}$$

Transformation der Geschwindigkeiten

Aufpassen: die $\tilde{u}_{x,y}$ Geschwind. werden auch transformiert, und zwar, weil die Zeit mittransformiert wird.

* Aus dem 2. Postulat (S. 209) muss es sein, dass wenn $u_x^2+u_y^2+u_z^2=c^2$, dann $\tilde{u}_x^2+\tilde{u}_y^2+\tilde{u}_z^2=c^2$
Also, die Lichtgeschwindigkeit ist gleich für S und S'.

$$\tilde{u}_x^2+\tilde{u}_y^2+\tilde{u}_z^2=\frac{(1-v^2/c^2)}{(1-u_z v/c^2)^2}\left[u_x^2+u_y^2\right]+\frac{(u_z-v)^2}{(1-u_z v/c^2)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-u_z v/c^2)^2}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(u_x^2+u_y^2)+u_z^2+v^2-2u_z v\right]$$

$$=\frac{1}{(1-u_z v/c^2)^2}\left[c^2-\frac{v^2}{c^2}(\cancel{c^2}-u_z^2)+\cancel{v^2}-2u_z v\right]$$

$$=\frac{c^2}{(1-u_z v/c^2)^2}\left[1+\frac{v^2u_z^2}{c^4}-2\frac{u_z v}{c^2}\right]=c^2$$

<u>wie es sein muss</u>

* Was passiert wenn $v \ll c$

Dann $\left\{\begin{array}{l}\tilde{u}_x \cong u_x\\ \tilde{u}_y \cong u_y\\ \tilde{u}_z \cong u_z-v\end{array}\right\} \longrightarrow$ Wir bekommen die Galilei-Transformation (S. 12) zurück.

* DER MINKOWSKI-RAUM

* In unserer Diskussion der Lorentz-Transformation haben wir die Raum-zeit-Vektoren $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \equiv (ct, \vec{r})$.
Diese Vektoren beschreiben ein Ereignis (in einer gewissen Zeit t, und in einem gewissen Ort $\vec{r}$), und die bauen einen 4-dimensionalen Raum, den so genannten Minkowski-Raum.

* Die Minkowski-Diagramme sind eigentlich eine 2D Abbildung dieses 4-dimensionalen Raumes.

* Das Längequadrat eines Vektors im Minkowski-Raum ist der Form

$$\boxed{s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

Damit ist die Invarianzbedingung (S. 209) der Form

$$\boxed{s^2 = \tilde{s}^2}$$

* Wie definiert man normalerweise (also für den gewöhnlichen 3D Raumes) das Längequadrat eines Vektors?
ganz einfach. Sei ein 3D-Vector $\vec{b}$, dann die Längequadrat des Vektors ist

$$\vec{b}^T \cdot \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (b_x, b_y, b_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$
$$= b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$$

Also die Längequadrat ist $\vec{b}^T \cdot \hat{\mathbb{1}} \cdot \vec{b}$

Wir schreiben diese $\mathbb{1}$ nicht, weil das ist unsere alltägliche METRIK, die so genannte Euklidische Metrik.

* Für einen allgemeinen Vektorraum ergibt die Metrik das Rezept für die Berechnung des Längequadrats:

$$\text{Längequadrat} \longrightarrow \vec{B}^T \cdot \underbrace{\hat{g}}_{\text{Metrik}} \cdot \vec{B}$$

* Für den Fall des Minkowski-Raumes

$$S^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

$$= (x^0, x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \vec{R}^T \cdot \hat{g} \cdot \vec{R}$$

Damit führen wir hier die so genannte <u>Minkowski-Metrik</u> ein:

$$\hat{g} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Die Lorentztransformation kann in einer Matrix-Darstellung geschrieben werden:

$$\tilde{\vec{R}} = \hat{L} \cdot \vec{R} \quad \text{wobei} \quad \hat{L} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Per Definitionem erhalten diese Transformationen das Längequadrat im Minkowski-Raum und die können eigentlich als Drehungen im Minkowski-Raum verstanden werden.

* Jedes System von Zahlen $\vec{B} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ \vec{b} \end{pmatrix}$ das sich bei einer Lorentz-Transformation in derselben Weise transformiert wie der Ereignisvektor $\vec{R}$ wird ein <u>Vierer-Vektor</u> (<u>4-Vektor</u>) genannt. Und das Längequadrat des 4-Vektors ist $\vec{B}^T \cdot \hat{g} \cdot \vec{B}$

Minkowski-Metrik.

* Die Definition von Metrik erlaubt uns eine Definition des Skalaren Produkten von 2 4-Vektoren:

$$(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A}^T \cdot \hat{g} \cdot \vec{B}$$

* Es ist einfach zu sehen dass

$$\underbrace{\hat{L}^T \hat{g} \hat{L}}_{\text{Lorentz-Transformation der Metrik}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{g}$$

Also die Metrik bleibt nach einer Lorentz-Transformation erhaltet. Damit erhaltet die Lorentz-Transformation nicht nur das Längequadrats eines 4-Vektors (das war sowieso per Definitionem), sondern ebenfalls das Skalarprodukt von 2 4-Vektoren:

$$(\tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{B}}) = (\vec{A}, \vec{B}) \quad \left(\underline{\text{Beweis}}: \ (\tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{B}}) = (\hat{L}\vec{A}, \hat{L}\cdot\vec{B}) = (\hat{L}\cdot\vec{A})^T \hat{g} (\hat{L}\cdot\vec{B}) = \vec{A}^T \cdot \hat{L}^T \hat{g} \hat{L} \cdot \vec{B} = \vec{A}^T \cdot \hat{g} \cdot \vec{B} = (\vec{A}, \vec{B}) \right)$$

---

* <u>Kontravariante und Kovariante Form der 4-Vektoren</u>

* Bisher haben wir die 4-Vektoren in der so genannten <u>Kontravarianten Form</u> geschrieben

$$\vec{b}^T \Rightarrow (b^0, b^1, b^2, b^3)$$

* Man könnte die Metrik des Raumes (die Minkowski-Metrik $\hat{g}$) direkt in der Definition des 4-Vektors aufnehmen.

Dann spricht man von <u>Kovariante Form</u> des 4-Vektors

$$\vec{b}^T \Rightarrow (b_0, b_1, b_2, b_3) = (-b^0, b^1, b^2, b^3)$$

Also $b_j = \sum_k g_{jk} b^k$

(<u>Bemerkung</u>: man schreibt subindices für die Kovariante Form und superindices für die Kontravariante Form)

$$\text{Dann } (\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A}^T \vec{g} \cdot \vec{B} = \sum_j (\vec{A}^T)_j (\vec{g} \cdot \vec{B})_j = \sum_j a^j \Big(\sum_k g_{jk} b^k\Big)$$

$$= \sum_j a^j b_j \quad ; \text{Auch } \boxed{(\vec{A}, \vec{B}) = \sum_j a_j b^j}$$

* Beispiele von 4-Vektoren sind

$$\partial_j \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \longleftarrow \text{Kontravariant}$$

$$\partial^j \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \equiv \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \longleftarrow \text{Kovariant}$$

$$\text{Also} \quad \partial_j \partial^j = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \Box \longleftarrow \text{d'Alembert Operator}$$

(S. 170)

* Also man kann $\Box$ als ein Skalarprodukt von 2 4-Vektoren, und deswegen $\Box$ bleibt erhaltet nach eine Lorentz-Transformation.

Also $\Box$ ist <u>Lorentz-Invariant</u>.

[* <u>Bemerkung</u> $\partial_j A^j = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A_0$

Ich erinnere euch an dem Lorentz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0$.

Also $A^j \equiv \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$, Ergibt die Eichung in der Form $\partial_j A^j = 0$]

* KOVARIANTE FORM DER ELEKTRODYNAMIK

* Wir werden nun sehen, dass wir die Maxwell gleichungen derart zusammengefasst sein könnten, dass sie forminvariant gegen Lorentztransformationen sind (man spricht von eine Kovariante Form der Elektrodynamik).

* Wir werden unsere Diskussion mit der Kontinuitätsgleichung (S. 146) anfangen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial(ct)}(c\rho)$$

Sei der kontravariante Vektor (<u>4-Stromdichte</u>)

$$\vec{J}^k \equiv (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \vec{j})$$

Da (S. 231) $\partial_j \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$, dann

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}(c\rho) + \vec{\nabla}\vec{j} = \partial_k \vec{J}^k = 0$$

(das ist ein Skalarprodukt in Minkowski-Raum, also Lorentzinvariant)

* Die 4-Stromdichte enthält alle Quellen des EM-Feldes (also alle Ladungsdichten und Stromdichten). Ganz klar ist sie divergenzfrei im Minkowski-Raum ($\partial_k J^k = 0$). (also Quellenfrei, S. 152)

* Ich erinnere euch nun an den Gleichung der S. 170, also die Maxwell-gleichungen für $\vec{A}$ und φ in der Lorentz-Eichung:

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0$$

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

$$\Box\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho = -\mu_0 c(c\rho)$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

* Sei $\vec{A}^k \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv \left(\frac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$
$\searrow$ 4-POTENTIAL

Also $\Box \vec{A}^k = -\mu_0 \vec{J}^k \longrightarrow$ 4-Wellengleichung

Dieser Form ist kovariant (also Lorentzinvariant)

* Die Lorentz-Eichung ~~bei~~ der Form:
$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \partial_k \vec{A}^k \longrightarrow$ Also ein Skalar Produkt also auch Lorentz-invariant.

* Wir können nun $\vec{E}$ und $\vec{B}$ rechnen.

• $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ (S. 168)

Also $E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}A_x \Longrightarrow \frac{-\cancel{E_x}}{c} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{c}\right) + \frac{\partial A_x}{c\,\partial t}$

$\Longrightarrow +\frac{E_x}{c} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{c}\right) = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0$

Genauso $E_y/c = \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0$
$E_z/c = \partial^0 A^3 - \partial^2 A^3$

• $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \longrightarrow B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2$

$\Longrightarrow B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1$

$\searrow B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1$.

* Wir führen nun den sogen. Feldstärke-Tensor

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Dann

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

* Wir werden nun mit Hilfe dieses Tensors die Maxwell-gleichung in einer sehr kompakte und kovariante Form schreiben.

* Das EM-Feld ist in kovarianter Schreibweise nicht mehr nach $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ zu interpretieren. Es handelt sich vielmehr um ein Feld mit untrennbaren Komponenten (beschrieben durch ein Tensor $F^{\mu\nu}$)

* quellen wir erst die inhomogene Maxwell-gleichungen (im Vakuum)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{E}}{c}\right) = \mu_0(\rho c)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_x}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_z}{c}\right) = \mu_0(\rho c)$$

$$\Longrightarrow -\partial_1 F^{10} - \partial_2 F^{20} - \partial_3 F^{30} = \mu_0 j^0$$

Also $\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha 0} = -\mu_0 j^0}$

(Wir benutzen hier die Einstein'sche Schreibweise $\partial_\alpha F^{\alpha 0} \equiv \sum_\alpha \partial_\alpha F^{\alpha 0}$)

* Außerdem:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{c\,\partial t}\left(\frac{\vec{E}}{c}\right) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_x}{c}\right) = \mu_0 j_x$$

$$\partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} - \partial_0 F^{01} = \mu_0 j^1$$

Da $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ $\longrightarrow$ $\partial_\alpha F^{\alpha 1} = -\mu_0 j^1$

Im Allgemeinen: $\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = -\mu_0 j^\mu}$

Diese Form ist auch Lorentzinvariant!

* Nun kommen die homogene Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = \partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{E}}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(E_z/c) - \frac{\partial}{\partial z}(E_y/c) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} B_x =$$

$$= -\partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{02} - \partial_0 F^{23} = 0 \rightarrow \partial_0 F^{23} + \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} = 0$$

und genauso für die andere. Also

$\boxed{\partial_\alpha F^{\beta\gamma} + \partial_\beta F^{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F^{\alpha\beta} = 0}$ Für alle $\alpha \neq \beta \neq \gamma$

Auch Lorentz-invariant!

* Also die Maxwell-Gleichungen im Vakuum werden in einer sehr kompakter und kovarianter Form geschrieben

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = -\mu_0 j^\mu \\ &\partial_\alpha F^{\beta\gamma} + \partial_\beta F^{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \end{aligned}}$$

* Wir haben die Maxwell-Gleichungen in dieser Lorentzinvariante Form geschrieben, aber nichts hat sich geändert. Das ist so, weil <u>die Elektrodynamik grundsätzlich lorentzinvariant ist</u>

* Die Newton-Mechanik war dagegen Galilei-Invariant. Deswegen ändert die spezielle Relativitätstheorie die Newton-Mechanik inhaltig. Man bekommt die Relativistische Mechanik.

* RELATIVISTISCHE MECHANIK

* Bisher haben wir nur die Galilei-Transformation durch die Lorentz-Transformation ersetzt. Wir werden nun die Newton-Mechanik durch eine relativistische Mechanik ersetzen.

* Wir sind auf der Bewegung eines Massenpunktes interessiert. Der Ortsvektor des Massenpunktes wird im Minkowski-Raum (also im Ort-Zeit-Raum) durch den 4-dimensionalen Ereignisvektor

$$\vec{R} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{r}) \leftarrow \text{4-Vektor}$$

beschreibt. Die 4-Geschwindigkeiten $(\vec{V})$ eines Massenpunktes erhält man als Veränderung des Ereignisvektors $\vec{R}$ bezogen auf die Eigenzeit (τ). Ich erinnere euch daß $dt = \gamma\, d\tau$ (Zeit-dilatation)

Also $$\vec{V} \equiv (V^0, V^1, V^2, V^3) = \frac{d\vec{R}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{R}}{dt} = \gamma\left(c, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \gamma(c, \vec{v})$$

* Für den 4-Impuls setzt man an:

$$\vec{P} \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) = m_0 \vec{V} = m_0 \gamma (c, \vec{v}) = (p^0, \vec{p})$$

Zur Identifikation von m_0 betrachten wir den klassischen Grenzfall $v \ll c \longrightarrow \gamma \simeq 1 \longrightarrow \vec{P} = (m_0 c, \underbrace{m_0 \vec{v}}_{\text{Newton'scher Impuls}})$

Also m_0 entspricht der klassischen Masse des Massenpunktes. Man nennt diese Masse die <u>Ruhemasse</u>. Im Gegensatz dazu ist

$$\boxed{m(v) = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

die <u>relativistische Masse</u>

* In der Newton-Mechanik (S. 2)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

Wir definieren in Analogie die 4-Kraft

$$\vec{K}^{\mu} \equiv (K^0, K^1, K^2, K^3) \equiv (K^0, \vec{K}) = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$= \gamma \frac{d}{dt}(p^0, \vec{p})$$

Also $\vec{K} = \gamma \frac{d}{dt}\vec{p} = \gamma \vec{F}$

Suchen wir nun was ist K^0.

$$V_\mu K^\mu = V_0 K^0 + \vec{V}\cdot\vec{K} = -V^0 K^0 + \vec{V}\cdot\vec{K} =$$

$$= -V^0 \frac{d}{d\tau}[m_0 V^0] + \vec{V}\frac{d}{d\tau}[m_0 \vec{V}]$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{m_0}{2}\left(\vec{V}\cdot\vec{V} - (V^0)^2\right)\right] = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{m_0}{2}\gamma^2(v^2 - c^2)\right] = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0 c^2}{2}\right) = 0$$

Andererseits $V_\mu K^\mu = -V^0 K^0 + \vec{V}\cdot\vec{K} =$

$$= -\gamma c K^0 + \gamma \vec{v}\cdot\gamma\vec{F} = 0$$

Also $K^0 = \gamma\left[\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}\right]$

$$\vec{K}^\mu = \gamma\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}, \vec{F}\right) \equiv \underline{\text{Minkowski-Kraft}}$$

* Die K^0 Komponente ist also mit der Leistung (S.⑤) $\vec{F}\cdot\vec{v}$ verknüpft.
* Ich erinnere euch dass $\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt} T$ wobei T ist die <u>kinetische Energie</u>. (S.⑤)

Da $K^0 = m_0 \frac{d}{d\tau} V^0 = \gamma \frac{d}{dt}[m_0 \gamma c]$

und $K^0 = \frac{\gamma}{c}(\vec{F}\cdot\vec{v})$

Dann $\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2) = \frac{d}{dt}(m(v) c^2)$

Also die <u>relativistische kinetische Energie</u> ist der Form:

$$\boxed{T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

* Aus dieser Formel haben wir <u>unglaublich viele Physik</u>!

① Sei $v \ll c$

$$T \simeq mc^2 + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{} + \ldots$$

mc^2 → Ruheenergie des Massenpunktes!

$\frac{mv^2}{2}$ → nicht relativistische kinetische Energie (S.⑤)

↳ Jede Masse besitzt eine Ruheenergie die freigesetzt werden kann! Das hat positive Folgen (Kernreaktor) aber auch schreckliche Folgen (Atombombe!)

② Je näher ist v zu c desto größer ist die Energie die man braucht um das Teilchen zu beschleunigen.

Das ist so weil die Trägemasse $m = m(v) = \gamma m_0 \xrightarrow[v \to c]{} \infty$

Als Folge davon, ein Teilchen mit $m_0 \neq 0$ kann nie bis zum $v = c$ beschleunigt werden.

③ $$\vec{K}^{\mu} = \gamma \left[\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right] = \gamma \frac{d}{dt} \left[\frac{T}{c}, \vec{p} \right] = \frac{d}{d\tau} \vec{p}^{\mu}$$

Also $p^0 = T/c$

Nehmen wir erstmals die Masse m_0 in Ruhe im System S

$$\vec{p}^{\mu} = \left(\frac{T}{c}, 0 \right) = (m_0 c, 0)$$

Sei nun S' in dem die Masse sich mit Geschwindigkeit v bewegt

$$\tilde{\vec{p}}^{\mu} = (\gamma m_0 c, \vec{p})$$

Das skalare Produkt $\vec{p}_{\mu} \cdot \vec{p}^{\mu}$ ist Lorentzinvariant (S. 230)

Also $$\vec{p}_{\mu} \cdot \vec{p}^{\mu} = \tilde{\vec{p}}_{\mu} \cdot \tilde{\vec{p}}^{\mu}$$

$$-m_0^2 c^2 = -\gamma^2 m_0^2 c^2 + p^2 = -\frac{T^2}{c^2} + p^2$$

$$T^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Für die klassische Mechanik hatten wir $T(p) = p^2/2m_0$

$$\boxed{T(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} \Longrightarrow$$ Relativistische Energie-Impuls-Relation