DER STARRE KÖRPER

* Bisher haben wir die Dynamik des Massenpunktes studiert.
Aber bei einem makroskopischen Festkörper (mit 10^{23} Teilchen/cm^3) ist das Konzept des Massenpunktes fragwürdig (zu viele Teilchen zu betrachten!)
Von einem makroskopischen Standpunkt aus erscheint der Festkörper als Kontinuum, als makroskopische Einheit.

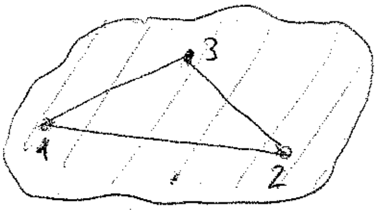
* Wir modellieren den Festkörper als ein System von N Massenpunkten, deren Abstände unter allen Umständen konstant bleiben

$$r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{konstant}$$

Der starre Körper ist also per definitionem nicht deformierbar.
(Bemerkung: das ist eigentlich eine gute Idealisierung, aber für manche Materialien ist die Elastizität natürlich wichtig.)

* Freiheitsgrade eines starren Körpers

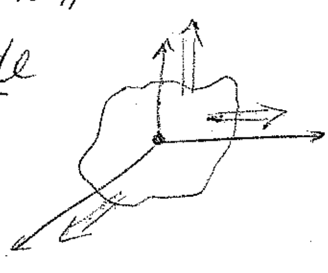
* Nehmen wir mal 3 (nicht auf einer geraden liegende) Punkte. Zu deren Beschreibung benötigen wir je 3 kartesische Koordinaten,



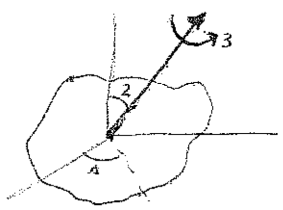
also 9 Koordinaten. Aber wir haben 3 Zwangsbedingungen da r_{12}, r_{13} und r_{23} konstant bleiben müssen.

* Frei wählbar sind also nur sechs Größen.
* Jeder weitere Massenpunkt bringt 3 neue Koordinaten aber auch 3 neue Zwangsbedingungen (r_{j1}, r_{j2}, r_{j3} sind konstante).

* Also, der starre Körper hat 6 Freiheitsgrade
  * Translation eines mit dem Körper starr verbundenen Punktes
    $\longrightarrow$ 3 Freiheitsgrade



- <u>Rotation</u> um eine Achse durch einen (mit dem Körper starr verbundenen) Punkt. Das bedeutet <u>3 Freiheitsgrade</u>, nämlich zwei Winkelangaben zur Festlegung der Achse und ein Drehwinkel

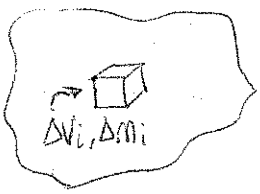


- <u>Vom N-Teilchen-System in das Kontinuum</u>

- Wir haben für N-Teilchen Systeme einige wichtige Größen eingeführt
  - Gesamtmasse: $M = \sum_i m_i$
  - Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$
  - Gesamtimpuls: $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$

usw.

- Wir werden nun diese Größen für das Kontinuum berechnen.



  - Man zerlegt den starren Körper in kleine Teilvolumina $\Delta V_i(\vec{r}_i)$, in denen die Masse $\Delta m_i(\vec{r}_i)$ enthalten ist.
  - Dann: $M = \sum_i \Delta m_i = \sum_i \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} \Delta V_i$

- Wir lassen nun $\left\{ \begin{array}{l} \Delta V_i \to 0 \\ \Delta m_i \to 0 \end{array} \right\}$

und kommen damit zur Definition der <u>Massendichte</u>

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M(\vec{r})}{\Delta V(\vec{r})}$$

$\rho(\vec{r})\, d^3r \equiv$ Masse im Volumenelement

- Dann

$$M = \int d^3r\, \rho(\vec{r})$$

$$\vec{R} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}$$

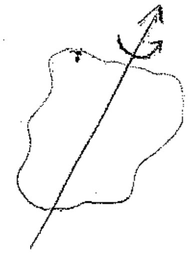
$$\vec{P} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \vec{v}(\vec{r})$$

(<u>Bemerkung</u>: Integriert wird jeweils über den Raumbereich des starren Körpers)

usw.

- Rotation um eine Achse

- Wir untersuchen zuerst die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse (später werden wir allgemeinere Bewegungsforme studieren).



Das System besitzt dann nur einen Freiheitsgrad, nämlich den Drehwinkel φ um die Achse.

- Wir werden annehmen, daß alle äußeren Kräfte konservativ sind.
- Die kinetische Energie ist

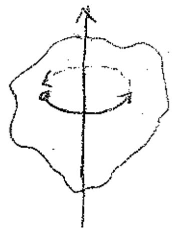
$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

- Wir setzen eine raumfeste Achse, sagen wir die z-Achse.

$$\vec{\omega} = (0,0,\omega) \longrightarrow \underline{\text{Winkelgeschwindigkeit}}$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

- Jeder Punkt des starren Körpers führt eine Kreisbewegung aus, und zwar mit Geschwindigkeit



$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega(-y_i, x_i, 0)$$

Also die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 (y_i^2 + x_i^2) = \frac{\omega^2}{2} \left[\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \right]$$

Wir führen nun die wichtige Idee von Trägheitsmoment ein:

$$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Dann: $\boxed{T = \frac{1}{2} J \omega^2}$

- Für das Kontinuum

$$J = \int \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

oder allgemeiner:

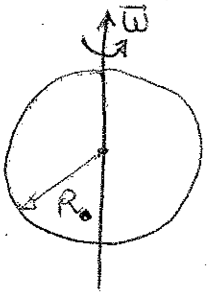
$$\boxed{J = \int d^3r\, \rho(\vec r) \left(\frac{\vec\omega}{\omega} \times \vec r\right)^2}$$

Das Trägheitsmoment hängt ab von:
- Massenverteilung
- Richtung und konkrete Lage der Drehachse

---

* Beispiel

- Nehmen wir eine Kugel mit homogener Massenverteilung $\rho(\vec r) = \begin{cases} \rho_0 & r \le R_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



- $\frac{\vec\omega}{\omega} = \vec e_z \rightarrow \vec e_z \times \vec r = -y\,\vec e_x + x\,\vec e_y$

$$|\vec e_z \times \vec r|^2 = x^2 + y^2$$

- Am besten arbeiten wir in Kugelkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \end{aligned}\right\} x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta$$

$$z = r\cos\theta$$

Also: $$J = \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \rho_0\, r^2 \sin^2\theta$$

$$= \rho_0 \underbrace{\left[\int_0^{R_0} r^4 dr\right]}_{R_0^5/5} \underbrace{\left[\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \sin^2\theta\right]}_{4/3} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} d\phi\right]}_{2\pi}$$

$$= \left(\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0^3\right)\frac{2}{5}R^2$$

Aber $M = \int d^3r\, \rho_0 = \rho_0\left(\frac{4\pi}{3}R_0^3\right)$

Also $$\boxed{J = \frac{2}{5} M R_0^2}$$

- Die Energie des Systems ist der Form

$$E = T + V = \frac{1}{2} J \dot\varphi^2 + V(\varphi)$$

Die Energie bleibt erhalten da alle äußere Kräfte konservativ sind

(Da es nur ein Rotationsfreiheitsgrad gibt, kann V nur von φ abhängen, $V = V(\varphi)$)

* Also $\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{J}(E - V(\varphi))$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J}(E-V(\varphi))}} = dt \longrightarrow \boxed{t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\frac{2}{J}(E-V(\varphi'))}}}$$

Diese Gleichung ergibt $t = t(\varphi)$ deren Umkehrung $\varphi = \varphi(t)$ legt die Bewegung des starren Körpers eindeutig und vollständig fest.

* Gucken wir nun was passiert mit dem Drehimpuls.
· Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist im allgemeinen nicht parallel zu $\vec{\omega}$ (mehr später über das)
Wir wollen hier nur die Komponent von $\vec{L}$, die parallel zu $\vec{\omega}$ ist

$$L_\omega = \vec{L}\cdot\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)\cdot\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) = \sum_i m_i \left(\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right)\times\vec{r}_i\right)\cdot\dot{\vec{r}}_i$$

$$= \sum_i m_i \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\times\vec{r}_i\right)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \left[\sum_i m_i\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\times\vec{r}_i\right)^2\right]\omega = J\omega$$

Also $\boxed{L_\omega = J\dot{\varphi}}$

· Wir wissen schon, daß (s. 20)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}^{(ex)}$$

(Drehimpulssatz)
(Natürlich wenn $\vec{M}^{(ex)} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{Konstante}$)

Dann

$$J\ddot{\varphi} = \frac{dL_\omega}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}\cdot\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}^{(ex)})\cdot\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right)$$

$$\boxed{J\ddot{\varphi} = \frac{1}{\omega}\sum_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot\vec{F}_i^{(ex)}}$$

→ Ein Beispiel dieser Gleichung habt ihr auf s. 44.

Dies ist eine Bewegungsgleichung für φ.

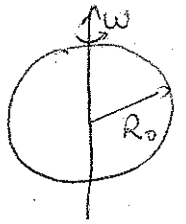
· Ganz klar, wenn $M_\omega^{(ex)} = \vec{M}^{(ex)}\cdot\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) = 0 \longrightarrow$ $L_\omega \equiv$ Konstante. Wenn J konstant ist, ω = Konstante und T = Konstante

Wir müssen ein Drehungsmoment um die Achse üben, wenn wir die Drehung ändern wollen, logisch, oder?

* Wenn $\vec{M}^{(ex)}_{\omega} = 0 \longrightarrow \vec{L}_{\omega}$ ist konstant.

Dann $L_{\omega} = J\omega$ ist konstant; manchmals ist J aber keine Konstante!

* Nehmen wir unseres Beispiel eines Kugels



$$J = \frac{2}{5} M R_0^2$$

Also $L = \frac{2}{5} M R_0^2 \omega$

* Wenn R_0 abnimmt und aufgrund der Erhaltung des Drehimpulses beschleunigt sich die Rotation des Kugels

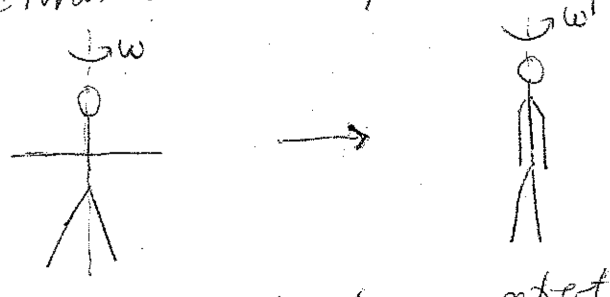
$$R_0^2 \omega = R_1^2 \omega' \longrightarrow \omega' = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 \omega \xrightarrow[R_0 > R_1]{} \omega' > \omega$$

* Das passiert z.B. im Allraum, z.B. in den sogen. Pulsars.
Eine starke Verkleinerung der räumlichen Ausdehnung beschleunigt die Rotation eines Neutronsternes so stark, dass die Rotationsdauer anstatt mehrerer Tage nur noch Sekunden oder sogar Sekundenbruchteile beträgt!!

z.B PSR J1748-2446ad rotiert pro Sekunde 716 mal. (!!)

(Radius < 16 Km)

• Etwas ähnliches passiert mit einem Eis-Skater

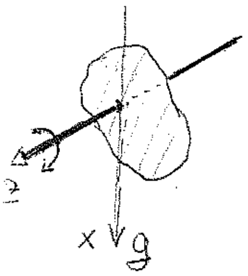


$\omega' > \omega$

Mit gestreckten Armen rotiert der Skater langsamer;

Ihr habt das sicher schon gesehen oder sogar erfahren!

* Sehen wir ein Beispiel → Pendel



- Wir betrachten nun einen starren Körper im homogenen Schwerefeld der Erde:

$$\vec{F}_i^{(ex)} = m_i g \vec{e}_x$$

- Der starre Körper ist um eine horizontale Achse (entlang z) drehbar: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

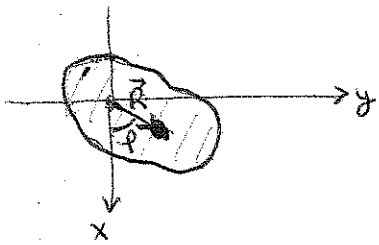
Also: $J\ddot{\varphi} = \sum_i (\vec{e}_z \times \vec{r}_i) \cdot m_i g \vec{e}_x = \sum_i (-m_i g y_i)$

$$= -g \left[\sum_i m_i y_i \right] = -M g R_y$$

wobei $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ ~~ist die Schwerpunktkoordinate~~ ist der Schwerpunktvektor.

- Wir wählen den Nullpunkt auf der Drehachse:

$$\vec{R} = R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \longrightarrow R_y = R\sin\varphi$$



Dann

$$\boxed{J\ddot{\varphi} = -MgR\sin\varphi} \rightarrow \text{Bewegungsgleichung}$$

Diese ist die Gleichung eines Pendels

- Für $\varphi \ll 1 \longrightarrow \sin\varphi \simeq \varphi \longrightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{MgR}{J}\sin\varphi \simeq -\frac{MgR}{J}\varphi$

$\rightarrow \varphi(t) = A\sin\bar{\omega}t + B\cos\bar{\omega}t$

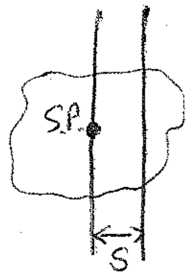
wobei $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{MgR}{J}} \Rightarrow$ Kreisfrequenz

• Steiner'scher Satz

Wenn man das Trägheitsmoment (J_S) um eine gegebene Achse durch den Schwerpunkt kennt, dann kann man sehr einfach das Trägheitsmoment (J) um alle andere Achse parallel dazu.

$$\boxed{J = J_S + MS^2}$$ Steiner'scher Satz

wobei S = senkrechter Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse $\Longrightarrow$ Abstand der beiden Achsen.



• Beweis: $J_S = \sum_i m_i (\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2) \longrightarrow$ $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i \rightarrow$ Koordinaten im Bezugssystem des Schwerpunktes.

$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \longrightarrow$ Drehung um z axis.

$$J = \sum_i m_i \left[(\tilde{x}_i + R_x)^2 + (\tilde{y}_i + R_y)^2 \right]$$

$$= \sum_i m_i \left[\tilde{x}_i^2 + R_x^2 + 2\tilde{x}_i R_x + \tilde{y}_i^2 + R_y^2 + 2\tilde{y}_i R_y \right]$$

$$= J_S + M(R_x^2 + R_y^2) + \underbrace{\left(\sum_i m_i \tilde{x}_i\right)}_{0} 2R_x + \underbrace{\left(\sum_i m_i \tilde{y}_i\right)}_{0} 2R_y$$

Im Bezugssystem des Schwerpunkts $\tilde{R} = 0 \rightarrow \sum_i m_i \tilde{x}_i = \sum_i \tilde{y}_i m_i = 0$

Also $J = J_S + MS^2$ Q.E.D.

• Der Steiner'scher Satz ist sehr nützlich, weil normalerweise es ist relativ einfach J_S zu rechnen (wegen Symmetriegründen).

• TRÄGHEITSTENSOR

· Bisher haben wir die Bewegung des starren Körpers um feste Achsen diskutiert. Aber, was passiert, wenn die Drehachse eine zeitlich veränderliche Richtung hat? Diese Diskussion wird uns zu dem wichtigen Begriff des Trägheitstensors führen.

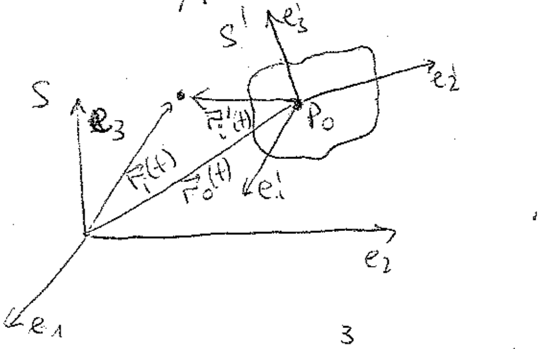
• Wir betrachten die Bewegung eines starren Körpers. Dafür führen wir zwei Bezugssysteme ein:

$S \rightarrow$ Raumfestes Bezugssystem. Es möge sich um ein Inertialsystem handeln.

Achsen $\longrightarrow e_\alpha \quad \alpha = 1,2,3$

$S' \longrightarrow$ Körperfestes Bezugssystem mit dem körperfesten Ursprung P_0

Achsen $\longrightarrow e'_\alpha \quad \alpha = 1,2,3$



• Die Diskussion ist ähnlich wie unsere Diskussion der Scheinkräfte (siehe S. 15)

. Für jeden Punkt i des starren Körpers haben wir:

$$\vec r_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{3} x_{i\alpha}(t)\, e_\alpha \qquad (\text{in } S)$$

$$\vec r_i'(t) = \sum_{\alpha=1}^{3} x'_{i\alpha}\, e'_\alpha \qquad (\text{in } S') \leftarrow$$

Die Koordinaten $x'_{i\alpha}$ in S' sind nach Definition des starren Körpers zeitunabhängige Größen.

und ganz klar $\longrightarrow$ $\vec r_i(t) = \vec r_0(t) + \vec r_i'(t)$

* Ich erinnere euch unsere Diskussion der Scheinkräfte.

Damals haben wir gesehen, daß

$$\left(\frac{d}{dt}\vec R\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\vec R\right)_{S'} + \vec\omega \times \vec R$$

für alle Vektoren $\vec R$.

. Also $$\left(\frac{d\vec r_i}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\vec r_0\right)_S + \left(\frac{d}{dt}\vec r_i'\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\vec r_0\right)_S + \overbrace{\cancel{\left(\frac{d}{dt}\vec r_i'\right)_{S'}}}^{0} + \vec\omega \times \vec r'$$

Also $$\boxed{\dot{\vec r}_i = \dot{\vec r}_0 + \vec\omega \times \vec r'}$$

· Dies ist ein wichtiges Ergebnis. Es besagt, daß sich zu jedem Zeitpunkt die Bewegung eines starren Körpers in die Translations-bewegung ($\vec{r}_0(t)$) des Ursprungs P_0 im körperfesten System und die Drehung um die momentane Achse $\vec{\omega}(t)$ zerlegen lässt. (wobei die Drehachse durch P_0 geht)

* Nun können wir die kinetische Energie des starren Körpers schreiben:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_i^{\,\prime}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i}_{M} \dot{\vec{r}}_0^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i^{\,\prime})^2 + \underbrace{\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i^{\,\prime})\cdot\dot{\vec{r}}_0}_{\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime}\cdot(\dot{\vec{r}}_0\times\vec{\omega})}$$

* Nun, es gibt 2 typische Fälle:
  - Ein Punkt des Körpers bleibt raumfest, während der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ rotiert
    Dann $\longrightarrow$ $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ (Konstant)
  - Es gibt kein raumfester Punkt, so legt man üblicherweise den Ursprung P_0 in den Schwerpunkt. Also $\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = 0$
    (nun $S' \equiv$ Schwerpunktsystem, und in Schwerpunktsystem ist der Schwerpunkt natürlich 0)

Also für beide Fälle gibt es eine klare Trennung in der kinetischen Energie:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^{\,2}}_{\text{Translationsanteil } (T_T)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i^{\,\prime})}_{\text{Rotationsanteil } (T_R)}$$

* Gucken wir den Rotationsanteil genauer. Wegen vektoriellen Eigenschaften:

$$(\vec{\omega}\times\vec{r}_i^{\,\prime})^2 = \omega^2 r_i^{\prime 2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i^{\,\prime})^2 = (\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)(x_{i1}^{\prime 2} + x_{i2}^{\prime 2} + x_{i3}^{\prime 2}) - (\omega_1 x_{i1}' + \omega_2 x_{i2}' + \omega_3 x_{i3}')$$

• Also

$$2T_R = \omega_1^2 \sum m_i (x_{i2}'^2 + x_{i3}'^2) - \omega_1\omega_2 \sum m_i x_{i1}' x_{i2}' - \omega_1\omega_3 \sum_i m_i x_{i1}' x_{i3}'$$
$$- \omega_2\omega_1 \sum_i m_i x_{i2}' x_{i1}' + \omega_2^2 \sum_i m_i (x_{i1}'^2 + x_{i3}'^2) - \omega_2\omega_3 \sum_i m_i x_{i2}' x_{i3}'$$
$$- \omega_3\omega_1 \sum_i m_i x_{i3}' x_{i1}' - \omega_3\omega_2 \sum_i m_i x_{i3}' x_{i2}' + \omega_3^2 \sum_i m_i (x_{i1}'^2 + x_{i2}'^2)$$

$$= (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} \sum_i m_i (x_{i2}'^2 + x_{i3}'^2) & -\sum_i m_i x_{i1}' x_{i2}' & -\sum_i m_i x_{i1}' x_{i3}' \\ -\sum_i m_i x_{i2}' x_{i1}' & \sum_i m_i (x_{i1}'^2 + x_{i3}'^2) & -\sum_i m_i x_{i2}' x_{i3}' \\ -\sum_i m_i x_{i3}' x_{i1}' & -\sum_i m_i x_{i3}' x_{i2}' & \sum_i m_i (x_{i1}'^2 + x_{i2}'^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\omega_1 \omega_2 \omega_3) \hat{J} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\hat{J}$ ist der sogen. Trägheitstensor $\hat{J} = \{J_{em}\}$

Also $\boxed{T_R = \frac{1}{2} \sum_{e,m=1}^{3} J_{em} \omega_e \omega_m}$

* Die Komponenten des Trägheitstensors lassen sich in einer kompakteren Form darstellen:

$$J_{em} = \sum_i m_i (\vec{r}_i'^2 \delta_{em} - x_{ie}' x_{im}') \qquad e, m = 1,2,3$$

• Wenn die Masse kontinuierlich verteilt ist (Massendichte $\rho(\vec{r}')$) geht man von der Summation zur Integration über:

$$\boxed{J_{em} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left[\vec{r}'^2 \delta_{em} - x_e' x_m'\right]}$$

* Für den Fall einer festen Achse, wir definieren den Einheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = (n_1, n_2, n_3) \longrightarrow \vec{\omega} = (n_1 n_2 n_3)\,\omega$$

Also $T_R = \frac{1}{2} \left[\sum_{e,m=1}^{3} J_{em} n_e n_m\right] \omega^2$

* Aber ich erinnere euch, daß wenn wir eine feste Achse haben,

$$T_R = \frac{1}{2} J\omega^2$$ wobei J der Trägheitsmoment war.

Der Vergleich liefert den folgenden wichtigen Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment (bezogen auf eine feste Achse) und dem Trägheitstensor

$$\boxed{J_{\vec{n}} = \sum_{\ell,m} J_{\ell m} n_\ell n_m}$$

* Durch den Trägheitstensor $\hat{J}$ ~~wird~~ jeder Raumrichtung $\vec{n}$ ein Trägheitsmoment $J_{\vec{n}}$ zugeordnet.

* Hauptträgheitsachsen

· Die Matrix $\hat{J}$ ist reell ($J_{\ell m} = J_{\ell m}^*$) und symmetrisch ($J_{\ell m} = J_{m\ell}$).

Wir können die Matrix diagonalisieren und die Eigenwerte sind also reelle Zahlen.

· Die Diagonalisierung des Trägheitstensors $\hat{J}$ ist die sogen. Hauptachsentransformation. Die entsprechenden Eigenwerte sind die Hauptträgheitsmomente, und die Eigenvektoren, die Hauptträgheitsachsen.

$$\hat{J} \xrightarrow{\text{Hauptachsentransf.}} \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$$

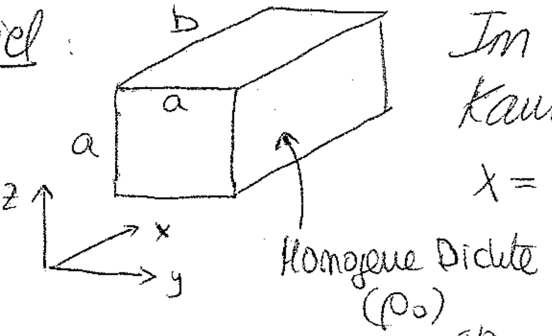
$A, B, C \rightarrow$ Hauptträgheitsmomente

$\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta} \rightarrow$ Hauptträgheitsachsen.

· Wir werden später diese Notation benutzen.

50

• Beispiel:



Im Schwerpunktsystem sind die Kanten des Parallelepipeds in $x = \pm b/2$, $y = \pm a/2$, $z = \pm a/2$

$$J_{11} = \int d^3r\, \rho_0 (y^2+z^2) = \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} dx\, \rho_0 (y^2+z^2) = \frac{\rho_0 a^4 b}{6}$$

aber $M = \rho_0 a^2 b$. Also $J_{11} = \frac{Ma^2}{6}$

Genauso $J_{22} = \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} dx\, \rho_0 (x^2+z^2) = \frac{M}{12}(a^2+b^2) = J_{33}$

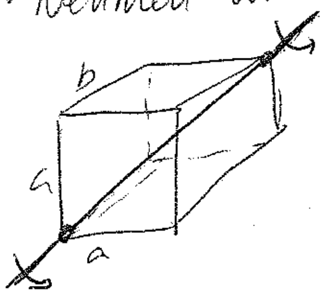
Wegen Symmetriegründen $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$

Also $\hat{J} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ ↗ Hauptträgheitsmomente

$A = \frac{Ma^2}{16} \longrightarrow \vec{e}_\xi = \vec{e}_x$

$B = C = \frac{M(a^2+b^2)}{12} \rightarrow \vec{e}_\eta = \vec{e}_y$, $\vec{e}_\zeta = \vec{e}_z$

• Nehmen wir die Diagonallinie $\Rightarrow \vec{n} = \frac{(-b,a,a)}{\sqrt{2a^2+b^2}}$



$$J_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}}(-b,a,a)\,\frac{M}{12}\begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{M}{6} a^2 \left[\frac{a^2+2b^2}{b^2+2a^2}\right]$$

• Mit der Hilfe der Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente können wir den Rotationsanteil der kinetischen Energie in der Form

$\boxed{T_R = \frac{1}{2}(A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2)}$ schreiben, wobei

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\xi} + \omega_\eta \vec{\eta} + \omega_\zeta \vec{\zeta}$$

* Drehimpuls

Wir werden nun den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls ($\vec{L}$) und dem Trägheitstensor ($\hat{J}$) eines starren Körpers aufsuchen.

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i{}') \times [\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i{}']$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}')$$

$$+ \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}') + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_0}_{}\ (+)$$

Für die Fälle $\vec{r}_0 = 0$ oder $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$ (sieh Diskussion in S. 47) sind diese beide glieder Null.

Also
$$\vec{L} = \underbrace{M \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0}_{} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}')}_{}$$

$\vec{L}_S \equiv$ Drehimpuls der im Schwerpunkt vereinigten gesamtmasse M

$\vec{L}' \equiv$ Körpereigener Drehimpuls

* Wir sind in dem Körpereigenen Drehimpuls interessiert:

$$\vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}') = \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i)$$

Also
$$\vec{\omega} \cdot \vec{L}' = \sum_i m_i (r_i^2 \omega^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})^2) = 2 T_R$$

$$\boxed{T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}'}$$

Aber $T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega} (\hat{J} \cdot \vec{\omega})$ (sieh S. 48)

und damit $\boxed{\vec{L}' = \hat{J} \cdot \vec{\omega}}$

· Bemerkung: Ich erinnere euch, daß für die Bewegung um eine feste Achse: $L_\omega = J\omega$ (S. 43).

• Im Hauptachsensystem wird die Beziehung zwischen $\hat{J}$, $\vec{\omega}$ und $\vec{L}'$ besonders einfach:

$$\boxed{\vec{L}' = (A\omega_\xi \vec{\xi} + B\omega_\eta \vec{\eta} + C\omega_\varsigma \vec{\varsigma})}$$

<u>Bemerkung</u>: Man kann ziemlich klar sehen, daß $\vec{L}'$ und $\vec{\omega}$ nur parallel sind, wenn die Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen erfolgt

• <u>KREISELTHEORIE</u>

• Ab jetzt setzen wir voraus, daß der starre Körper einen raumfesten Punkt aufweist, den wir zum Ursprung des körperfesten Systems S' machen. (Sieh Abbildung auf S. 52')

* Wir kennen schon daß

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{(Drehimpulssatz)} \qquad (\vec{M} \equiv \vec{M}^{(ex)}) \longrightarrow \text{äußeres Drehmoment}$$

In dieser Form gilt der Drehimpulssatz nur im Inertialsystem S. Zweckmäßiger ist es aber den Drehimpulsatz im mitrotierenden, körperfesten Bezugssystem S' zu formulieren, wobei wir al Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen wählen.

$$\text{Winkelgeschwindigkeit}: \quad \vec{\omega} = p\vec{e}_\xi + q\vec{e}_\eta + r\vec{e}_\varsigma$$

$$\text{Drehimpuls (im S')}: \quad \vec{L}' = Ap\vec{e}_\xi + Bq\vec{e}_\eta + Cr\vec{e}_\varsigma$$

• Wie immer:

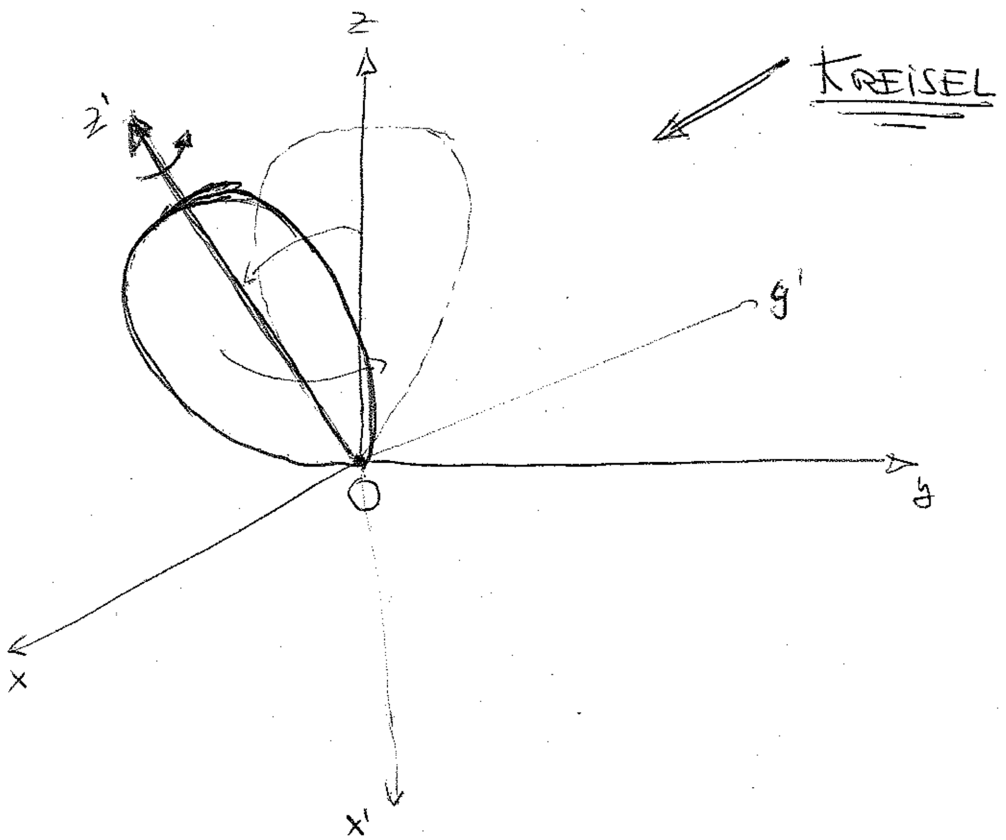
$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\times$$

Also

$$\vec{M} = \left(\frac{d}{dt}\vec{L}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\vec{L}'\right)_{S'} + \vec{\omega}\times\vec{L}' \longrightarrow \vec{M} = \dot{\vec{L}}' + \vec{\omega}\times\vec{L}'$$

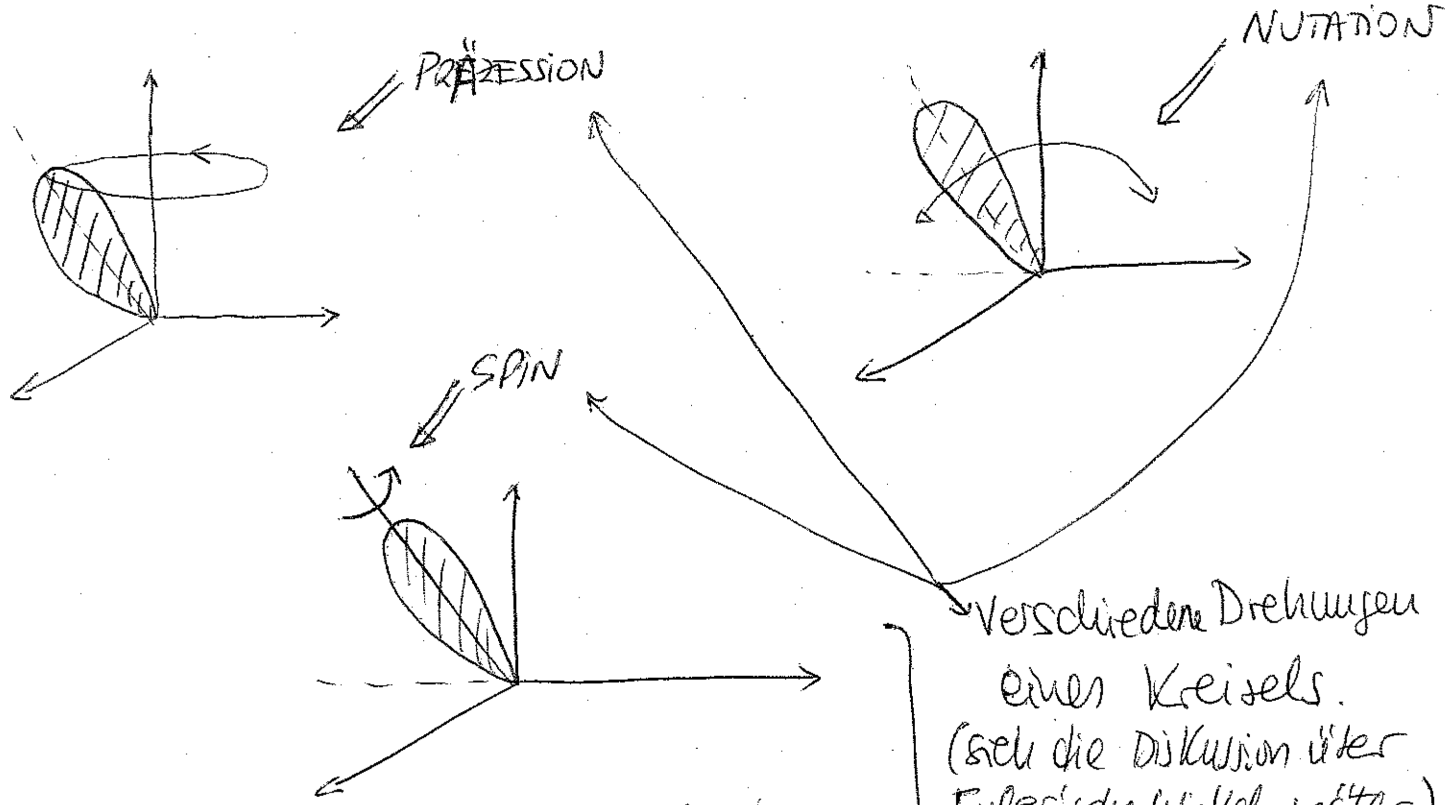
$$\vec{M} = \left[A\dot{p}\vec{e}_\xi + B\dot{q}\vec{e}_\eta + C\dot{r}\vec{e}_\varsigma\right] + \begin{vmatrix} \vec{e}_\xi & \vec{e}_\eta & \vec{e}_\varsigma \\ p & q & r \\ Ap & Aq & Ar \end{vmatrix}$$

$$= M_\xi \vec{e}_\xi + M_\eta \vec{e}_\eta + M_\varsigma \vec{e}_\varsigma$$



- $S \longrightarrow$ Raumfeste Achse

- $S' \longrightarrow$ Körperfeste Achse ($\equiv$ Hauptachsensystem)



Verschiedene Drehungen eines Kreisels.
(sieh die Diskussion über Euler'sche Winkel später)

- Eine allgemeine Bewegung ist eine Kombination diese Drehungen

Also

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= A\dot{p} + (C-B)\,qr \\ M_\eta &= B\dot{q} + (A-C)\,rp \\ M_\zeta &= C\dot{r} + (B-A)\,pq \end{aligned}\right\}$$ Man nennt diese Gleichungen die <u>Euler'schen Gleichungen</u>

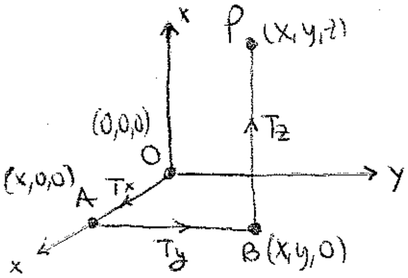
· Die Euler'schen Gleichungen stellen bei bekannten Drehmoment $\vec{M}$ ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen für p, q, r dar. Es sind die Bewegungsgleichungen für die Drehbewegung des starren Körpers.

• <u>Die Euler'sche Winkel</u>

· Zum konkreten Auswertung des Gleichungssystems benötigt man die Komponenten von $\vec{M}$ bezüglich der Hauptträgheitsachsen. Aber $\vec{M}$ wird durch äußere Kräfte bewirkt, und deswegen auf der linken Seite werden wir Größen haben, die in raumfesten System S definiert sind.

· Wir brauchen deswegen eine Beziehung zwischen raumfesten und Körperfesten Bezugssystemen. Dafür benutzt man die sogenannten Euleŕsche Winkel. Wir werden nun die Einzelheiten dieser wichtigen Idee kennenlernen.

· Um einem Punkt P von Ursprung der Koordinaten $(0,0,0)$ bis in (x,y,z) zu bewegen, benötigt man 3 Operationen

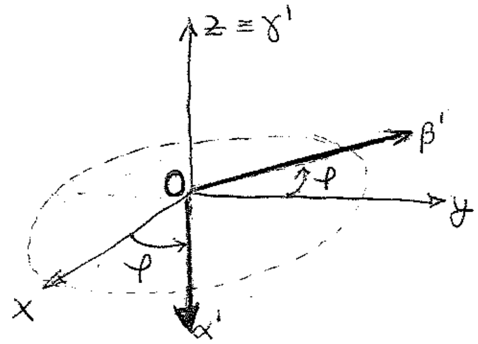


$$O \xrightarrow{T_x} A \xrightarrow{T_y} B \xrightarrow{T_z} P$$

Translation in x — Translation in y — Translation in z

Die Idee von Euler war, daß man etwas ähnliches machen kann, um ein System S in einem Bezugssystem S' zu transformieren. Man braucht diesmal 3 verschiedene Rotationen.

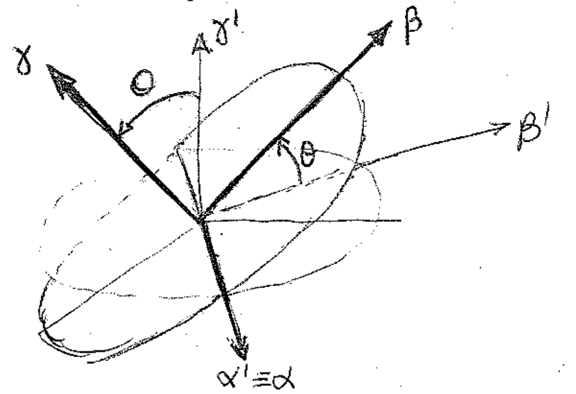
① <u>Drehung um die z-Achse (φ)</u>



• von $\underbrace{(x,y,z)}_{\vec{X}}$-Achse zu $\underbrace{(\alpha',\beta',\gamma')}_{\vec{A}'}$-Achse

$$\vec{A}' = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Drehungsmatrix} \\ \text{um die } z\text{-Achse}}} \vec{X} = R_3(\varphi)\,\vec{X}$$

② <u>Drehung um die α'-Achse</u> (θ)

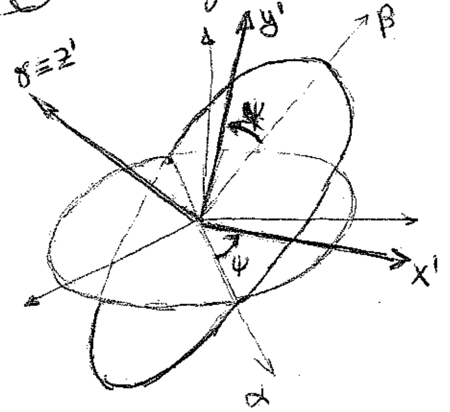


• von $\underbrace{(\alpha',\beta',\gamma')}_{\vec{A}'}$-Achse zu $\underbrace{(\alpha,\beta,\gamma)}_{\vec{A}}$-Achse

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \vec{A}' = R_1(\theta)\,\vec{A}'$$

(<u>Bemerkung</u>: Die Linie $O\alpha \equiv O\alpha'$ ist die sogen. <u>Knotenlinie</u>)

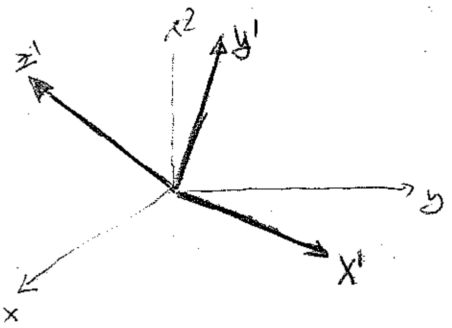
③ <u>Drehung um die γ-Achse (ψ)</u>



• von $\underbrace{(\alpha,\beta,\gamma)}_{\vec{A}}$-Achse zu $\underbrace{(x',y',z')}_{\vec{X}'}$-Achse

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{A} = R_3(\psi)\,\vec{A}$$

* <u>gesamte Drehung</u>



$$\vec{X}' = \underbrace{R_3(\psi)\,R_1(\theta)\,R_3(\varphi)}_{R(\psi,\theta,\varphi)}\,\vec{X}$$

wobei

$$R=\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

* Die 3 Winkel (ψ,θ,φ) sind die sogen. <u>Euler'sche Winkel</u>

* Also 3 Drehungen bringen das System S in das System S'. genauso wie 3 Translationen bringen O in P. Es gibt aber ein Unterschied, weil <u>die Drehungen kommutieren nicht miteinander</u>. Also die Ordnung der Drehungen ist wichtig.

* Alle mögliche Rotationen des starren Körpers können als eine Änderung der Winkel (φ,θ,ψ) zerlegt werden.

  Es gibt also 3 Winkelgeschwindigkeiten:

  $\vec{\omega}_z = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$ (Präzession)

  $\vec{\omega}_\alpha = \dot{\theta}\,\vec{e}_\alpha$ (Nutation)

  $\vec{\omega}_{z'} = \dot{\psi}\,\vec{e}_{z'}$ (Spin)

  (Ich erinnere euch unsere Diskussion der Seite 52')

Die gesamte Winkelgeschwindigkeit ist dann die Vektorsumme dieser 3 Beiträge: $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\alpha + \dot{\psi}\,\vec{e}_{z'}$

Wir können die verschiedene Vektoren bezüglich der körperfesten Achsen $(\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')$ zerlegen:

$$\vec{e}_z = \sin\theta\sin\psi\,\vec{e}_{x'} + \sin\theta\cos\psi\,\vec{e}_{y'} + \cos\theta\,\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{e}_\alpha = \cos\psi\,\vec{e}_{x'} - \sin\psi\,\vec{e}_{y'}$$

Also, wenn wir vereinbaren, daß das körperfeste System gleich ~~dem~~ Hauptachsensystem: $\vec{e}_{x'} \equiv \vec{e}_\xi$; $\vec{e}_{y'} \equiv \vec{e}_\eta$; $\vec{e}_{z'} \equiv \vec{e}_\zeta$

dann:

$$\vec{\omega} = [\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi]\,\vec{e}_\xi + [\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi]\,\vec{e}_\eta + [\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}]\,\vec{e}_\zeta$$

$$= p\,\vec{e}_\xi + q\,\vec{e}_\eta + r\,\vec{e}_\zeta$$

Also hat man (p,q,r) aus den Euler'schen Gleichungen bestimmt, so sind dann Bewegungsgleichungen für die Euler'sche Winkel bekannt, über die schließlich die Lage des starren Körpers relativ zum raumfesten System (S) bestimmt ist.

* Also dies ist das allgemeine Verfahren
  * Euler'sche Gleichungen: bestimmen (p,q,r) für gegebenes $\vec{M}$
  * Euler'sche Winkel: erlauben uns, die Bewegung im System S zu beschreiben.

* Wir werden ~~nun~~ diese allgemeine Theorie an einem Spezialfall testen.

• Rotationen um freie Achsen

* Wir nehmen nun an, daß $\vec{M} = 0$ (keine äußere Drehmomente).

Dann die Euler'sche Gleichungen werden der Form:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

Gleichungen des Kräftefreien Kreisels

• Es ist einfach zu zeigen (Übung), daß aus der Gleichungen man bekommt

• $\frac{d}{dt} T_R = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)\right\} = 0$ (Energieerhaltung)

• $\frac{d}{dt} |\vec{L}|^2 = \frac{d}{dt}\left\{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2\right\} = 0$

$\downarrow$

Der Betrag $|\vec{L}|$ ist also im körperfesten System eine Erhaltungsgröße

• Bemerkung

• Da $\vec{M} = 0$, $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = 0$ (sieh S. 52)

• Aber die Richtung von $\vec{L}$ in körperfesten System (S') ist nicht konstant in Allgemeinen.

• Soll auch die Richtung von $\vec{L}$ (in S') konstant sein, so

$$\vec{L} = (\underset{\vec{\xi}\text{ Richtung}}{Ap}, \underset{\vec{\eta}\text{ Richtung}}{Bq}, \underset{\vec{\zeta}\text{ Richtung}}{Cr}) \longrightarrow \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} = (A\mathring{p}, B\mathring{q}, C\mathring{r}) = (0,0,0)$$

Also
$$A\mathring{p} = (B-C)qr = 0$$
$$B\mathring{q} = (C-A)rp = 0$$
$$C\mathring{r} = (A-B)pq = 0$$

Wenn wir annehmen, daß (A,B,C) paarweise verschieden sind, so müssen 2 der Komponenten (p,q,r) Null sein, d.h.:

$\vec{\omega} = p\,\vec{e}_\xi$ oder $\vec{\omega} = q\,\vec{e}_\eta$ oder $\vec{\omega} = r\,\vec{e}_\zeta$

Also $\vec{\omega}$ liegt in Richtung einer Hauptträgheitsachse.

und $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ sind parallel.

* Da $\vec{L}$ auch im raumfesten System (S) konstant ist, gilt das auch für $\vec{\omega}$. Die Richtung der Drehachse ist also sowohl in S' als auch in S konstant.

- Man nennt solche Achsen <u>freie Achsen</u>
- Ein starrer Körper, der um eine freie Achse rotiert, <u>schlingert nicht.</u>
- Ist die Rotation um eine freie Achse <u>stabil</u>? Wir werden nun sehen, daß die Stabilität hängt davon ab, welche ~~Achse~~ Hauptträgheitsachse wir als freie Achse auswählen.

- <u>Bemerkung</u>: Wir werden ~~nun~~ eine sogen. <u>Stabilitätsanalyse</u> machen. Diese Analyse sind sehr wichtig in der ~~M~~echanik, und im Allgemeinen <u>in der</u> gesamten Physik.

Die Stabilitätsanalyse gehen folgenderweise. Man betrachtet eine kleine Störung, man entwickelt (Taylor) die Gleichungen bis zum 1. Ordnung in der Störung, und man löst die Gleichungen.

z.B. möge die Drehung um die Achse ξ sein.

Also ohne Störung $\vec{\omega}_0 = p_0 \vec{e}_\xi$

Wir betrachten nun eine Störung $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Delta\omega}$

wobei $\vec{\Delta\omega} = (\Delta p_0, \Delta q, \Delta r)$

wobei $\Delta p_0, \Delta q, \Delta r$ sind alle sehr klein.

• Also $p = p_0 + \Delta p_0$
$q = \Delta q$
$r = \Delta r$

$$A\dot{p} + (C-B)qr = A\Delta\dot{p}_0 + (C-B)\underbrace{[\Delta q][\Delta r]}_{\text{Das ist 2. Ordnung in der Störung}} \simeq A\Delta\dot{p}_0 = 0$$

Also $\boxed{\Delta\dot{p}_0 = 0}$

$$B\dot{q} + (A-C)rp = B\Delta\dot{q} + (A-C)\Delta r(p_0+\Delta p_0) \simeq B\Delta\dot{q} + (A-C)p_0\Delta r = 0$$

$$C\dot{r} + (B-A)pq = C\Delta\dot{r} + (B-A)(p_0+\Delta p_0)\Delta q \simeq C\Delta\dot{r} + (B-A)p_0\Delta q = 0$$

• Also
$$\begin{cases} B\Delta\dot{q} = (C-A)p_0\Delta r \\ C\Delta\dot{r} = (A-B)p_0\Delta q \end{cases}$$

Wir leiten die 1. Gleichung ab:

$$B\Delta\ddot{q} = (C-A)p_0\Delta\dot{r} = (C-A)p_0\frac{1}{C}(A-B)p_0\Delta q$$

$$\Delta\ddot{q} = -\frac{(A-C)(A-B)p_0^2}{BC}\Delta q \equiv -D^2\Delta q$$

und genauso $\Delta\ddot{r} = -D^2\Delta r$

* Diese Gleichungen haben 2 mögliche Lösungen:

• Wenn $D^2 > 0 \longrightarrow \Delta q = \alpha\cos Dt + \beta\sin Dt$
$\Delta r = \tilde{\alpha}\cos Dt + \tilde{\beta}\sin Dt$

Wenn $\Delta q, \Delta r$ anfangs klein waren, dann bleiben sie auch klein. <u>Die Achse ist deshalb stabil</u>

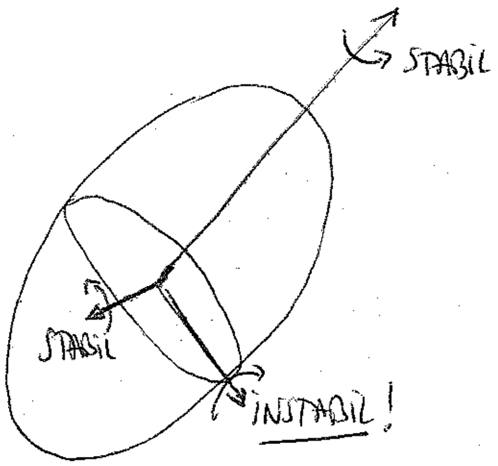
(Die Störung wächst nicht)

- Wenn $D^2<0 \longrightarrow$ $\Delta q = \alpha e^{|D|t} + \beta e^{-|D|t}$

$$\Delta r = \tilde{\alpha} e^{|D|t} + \tilde{\beta} e^{-|D|t}$$

Die exponentiell ansteigende Lösungen bedeuten, daß die Störung mit der Zeit zunimmt, und deswegen ist die Achse <u>instabil</u>.

- Also
  - $D^2>0 \longrightarrow (A-C)(A-B)>0 \longrightarrow$ $\left\{\begin{matrix} A>C \\ A>B \end{matrix}\right\}$ A ist der größte Hauptträgheitsmoment
    - $\left\{\begin{matrix} A<C \\ A<B \end{matrix}\right\}$ A ist der kleinste Hauptträgheitsmoment
    - $\downarrow$ <u>Stabil</u>
  - $D^2<0 \longrightarrow (A-C)(A-B)<0 \longrightarrow$ $\left\{\begin{matrix} B<A<C \\ C<A<B \end{matrix}\right\}$ A is der mittlere Hauptträgheitsmoment



• KRÄFTEFREIER SYMMETRISCHER KREISEL

• Vorher haben wir angenommen, daß (A, B, C) paarweise verschieden waren. Nun werden wir den Fall eines symmetrischen Kreisel studieren:

$$A = B \neq C \longrightarrow \text{Achsen } \vec{\xi}, \vec{\eta}; \vec{\zeta} \leftarrow \text{sogen. Figurenachse}$$

• Es ist klar von unseren Diskussion der freien Achsen, daß wenn $A = B \neq C$ kann $\vec{\omega}$ nicht fest bleiben.

• Die Gleichungen des Kräftefreien Kreisels (s. 56) werden der Form:

$$A\dot{p} + (C-A)qr = 0$$

$$A\dot{q} + (A-C)rp = 0$$

$$C\dot{r} = 0 \longrightarrow r = r_0 \equiv \text{const.}$$

Die Komponente von $\vec{\omega}$ auf die Figurenachse bleibt konstant

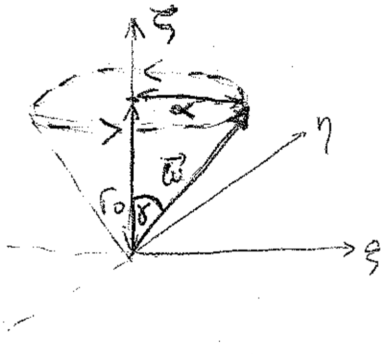
Also
$$\left.\begin{array}{l} \dot{p} = \dfrac{(A-C)r_0}{A} q \\ \dot{q} = -\left(\dfrac{A-C}{A}\right) r_0 p \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Ableitung}} \left\{\begin{array}{l} \ddot{p} = -\Omega^2 p \\ \ddot{q} = -\Omega^2 q \end{array}\right\} \quad \text{wobei } \Omega^2 \equiv \left(\frac{A-C}{A}\right)^2 r_0^2$$

Also p und q erfüllen Schwingungsgleichungen mit Lösungen der Form

$$p = \alpha \sin(\Omega t + \beta) \qquad \text{wobei } \alpha, \beta \equiv \text{const.}$$

$$q = \alpha \cos(\Omega t + \beta)$$

Also $|\omega|^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \alpha^2 + r_0^2 \Rightarrow$ Konstante



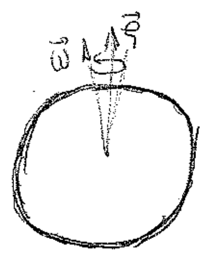
$\vec{\omega}$ beschreibt also einen Kreiskegel um $\vec{\zeta}$ mit Winkel γ:

$$\tan\gamma = \frac{\alpha}{r_0}$$

$\Downarrow$

(Polkegel)

z.B. die Erde ist ungefähr ein symmetrischer Ellipsoid
Der geometrischer Nordpol (Figurenachse) und die Drehachse (Kinematischer Nordpol) fallen nicht genau zusammen.



* Der kinematische Nordpol beschreibt einen Kreis mit Radius ≈ 6 m um den geometrischen Nordpol mit Periode ≈ 433 Tagen

[<u>Bemerkung</u>: diese Bewegung ist nicht 100% genau was die Theorie des starren Körpers vorhersagt, weil die Erde nicht ganz starr ist (Atmosphere, z.B.).]

· Nun kennen wir die Bewegung in $S' \equiv (\xi, \eta, \zeta)$. Wir müssen nun die Euler'sche-Winkel-Theorie benutzen, um auf das raumfeste System zu transformieren.

• Einerseits, $\vec{M} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = 0$. Also $\vec{L}$ ist eine Konstante in S.

Nehmen wir z.B. $\vec{L} = L\,\vec{e}_z$

Da $\vec{e}_z = \sin\theta \sin\psi\, \vec{e}_\xi + \sin\theta\cos\psi\, \vec{e}_\eta + \cos\theta\, \vec{e}_\zeta$

dann $\vec{L} = L\sin\theta\sin\psi\, \vec{e}_\xi + L\sin\theta\cos\psi\, \vec{e}_\eta + L\cos\theta\, \vec{e}_\zeta$

$$= Ap\, \vec{e}_\xi + Aq\, \vec{e}_\eta + Cr\, \vec{e}_\zeta$$

· Andererseits aus S. 56:

$$p = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \overset{(S.\ 61)}{=} \alpha\sin(\Omega t + \beta)$$
$$q = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = \alpha\cos(\Omega t + \beta)$$
$$r = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = r_0$$

* Also $A\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + A\dot{\theta}\cos\psi = L\sin\theta\sin\psi$ (1)

$A\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - A\dot{\theta}\sin\psi = L\sin\theta\cos\psi$ (2)

$C\dot{\varphi}\cos\theta + C\dot{\psi} = L\cos\theta$ (3)

$$\left.\begin{aligned}(1) &\longrightarrow (A\dot{\varphi}-L)\sin\theta\sin\psi = -A\dot{\theta}\cos\psi \\ (2) &\longrightarrow (A\dot{\varphi}-L)\sin\theta\cos\psi = A\dot{\theta}\sin\psi\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\dot{\theta}=0 \longrightarrow \theta=\theta_0 \equiv \text{const} \\ &\dot{\varphi}=L/A \longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{L}{A}t+\varphi_0}\end{aligned}$$

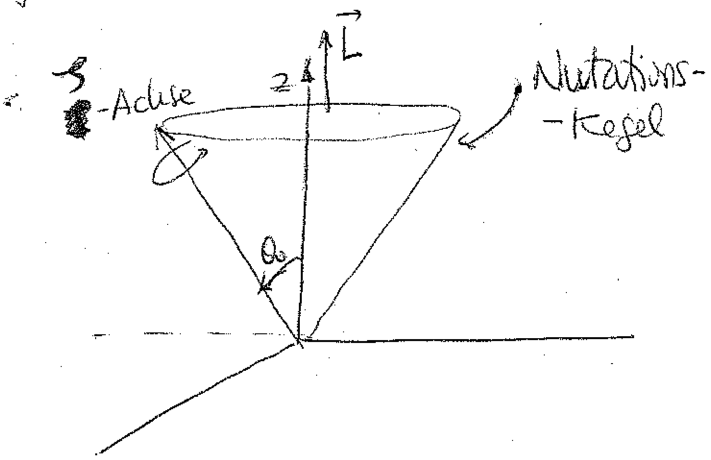
Also:

$$\left.\begin{aligned}* \quad p &= \alpha\sin(\Omega t+\beta) = \frac{L}{A}\sin\theta\sin\psi \\ q &= \alpha\cos(\Omega t+\beta) = \frac{L}{A}\sin\theta\cos\psi\end{aligned}\right\} \tan(\Omega t+\beta)=\tan\psi \longrightarrow \boxed{\psi = \Omega t+\beta} \quad \boxed{\beta=\psi_0}$$

* $\boxed{\alpha = \frac{L}{A}\sin\theta_0}$

* $r_0 = \frac{L}{A}\cos\theta_0 + \Omega \longrightarrow \cos\theta_0 = \frac{A}{L}(r_0-\Omega)$

Da $\Omega = \left(\frac{A-C}{A}\right)r_0 \longrightarrow \cos\theta_0 = \frac{A}{L}\left[\frac{C}{A}\right]r_0 = \frac{C}{L}r_0 \longrightarrow \boxed{\cos\theta_0 = \frac{r_0 C}{L}}$



* Also, zussammengefaßt:

- $\varphi(t) = \frac{L}{A}t + \varphi_0$
- $\theta(t) = \arccos\left(\frac{r_0 C}{L}\right) \equiv \text{const}$
- $\psi(t) = \left(\frac{A-C}{A}\right)r_0 t + \psi_0$

Also die Figurenachse (ξ) bewegt sich mit konstantem Öffnungswinkel $\theta=\theta_0$ mit konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die Richtung von $\vec{L}$ (diesmal $\vec{e}_z$). Außerdem dreht der Körper um die Figurenachse mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ (auch konstant).