LAGRANGE-MECHANIK

• ZWANGSBEDINGUNGEN

· Die Newton'sche Mechanik befasst sich mit Systemen ~~von~~ Massepunkten beschrieben durch Gleichungen der Form

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \qquad (\text{sieh } S. \text{ } 19)$$

· Aber die typischen physikalischen Systeme unserer Umgebung sind jedoch häufig keine typischen Teilchensysteme. Die Bewegung des Teilchen ist normalerweise eingeschränkt ~~[illegible]~~ (Bindekräfte, Fadenspannungen).
Es gibt gewisse geometrische Bindungen der Teilchen miteinander
(Bemerkung: so was haben wir schon gesehen. Ich erinnere euch, daß ein starrer Körper ~~von~~ der Bedingung $r_{ij} \equiv$ const definiert wird.)

· Man nennt Zwangsbedingungen die Bedingungen, die die freie Bewegung der Teilchen einschränken.

· Zwangskräfte sind Kräfte, die die ~~[illegible]~~ Zwangsbedingungen bewirken. Diese Kräfte sind im Allgemeinen unbekannt. Man kennt nur ihre Auswirkungen (also die Zwangsbedingungen).

· Natürlich, wegen der Zwangsbedingungen ~~sind~~ die Teilchenkoordinaten $\vec{r}_i$ nicht unabhängig voneinander.

· Die Tatsachen, daß die Zwangskräfte unbekannt sind, und die Abhängigkeit ~~der~~ $\vec{r}_i$ voneinander, machen die Beschreibung der typischen mechanischen Systeme nur mit Newton'schen Mechanik sehr schwierig oder sogar fast unmöglich. Man muß die Zwangsbedingungen in der Beschreibung der Mechanik korrekt einbauen. Das ist genau was die Lagrange'sche Mechanik tut.

• HOLONOME ZWANGSBEDINGUNGEN

• Wie gesagt, die Zwangsbedingungen spielen eine entscheidende Rolle. Es ist deshalb sinnvoll, die verschieden Arte von Zwangsbedingungen zu charakterisieren.

• Holonome ~~Zwangs~~bedingungen sind Verknüpfungen der Teilchenkoordinaten und eventuell der Zeit in der folgenden Form

$$\boxed{f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, p}$$

$p \equiv$ Anzahl von Zwangsbedingungen

Nicht alle Zwangsbedingungen können in dieser Form geschrieben werden. Wir werden später auch die sogen. nicht-holonome Zwangs--bedingungen studieren.

• Wir können die holonome Zwangsbedingungen in 2 Familien spalten:

* Holonom-skleronome Zwangsbedingungen

• Das sind holonome Zwangsbedingungen, die nicht explizit zeitabhängig sind.

Also $\boxed{\dfrac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, p}$

• z.B.: Ein Teilchen auf einer Kugeloberfläche

$x^2+y^2+z^2 = R^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$

$\longrightarrow f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 \longrightarrow$ eine Zwangsbedingung

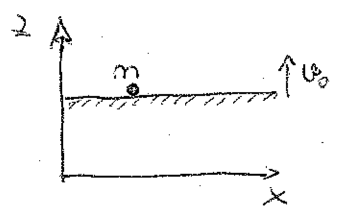
Ganz klar, f_1 is nicht explizit zeitabhängig.

* Holonom-rheonome Zwangsbedingungen

• Das sind holonome Zwangsbedingung mit expliziter Zeitabhängigkeit

$$\boxed{\frac{\partial f_\nu}{\partial t} \neq 0}$$

• z.B. ein Teilchen im Aufzug $\Longrightarrow$



$z(t) = v_0(t-t_0) + z_0$

$f_1(z,t) = z - z_0 - v_0(t-t_0) = 0$

- <u>GENERALISIERTE KOORDINATEN</u>

- Holonome Zwangsbedingungen <u>reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade</u>.
Ein N-Teilchensystem hat ohne Zwang 3N Freiheitsgrade, bei p holonomen Zwangsbedingungen dann nur noch

$$\boxed{S = 3N - p}$$

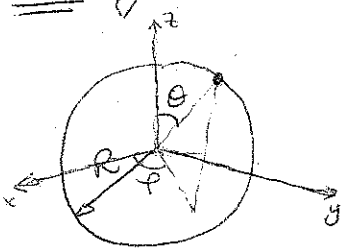
- Mit Hilfe der p Zwangbedingungen können wir p der 3N Koordinaten eliminieren, und für den Rest die Newton'schen Bewegungsgleichungen integrieren.
- Das ist zwar möglich, aber mühsam und nicht sehr elegant.
Eleganter und wirkungsvoller ist die Einführung der sogen. <u>generalisierten Koordinaten</u>: $q_1, q_2, \dots, q_s$.
Die generalisierten Koordinaten müssen <u>2 Bedingungen erfüllen</u>:
  - Die Konfiguration des System ist eindeutig durch $q_1, \dots, q_s$ festgelegt. Also für alle Teilchen
  $$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t)$$
  - Die q_j sind unabhängig voneinander.
- Die generalisierten Koordinaten spannen einen S-dimensionalen Raum auf, der sogen. <u>Konfigurationsraum</u>.
Jeder Punkt des Konfigurationsraums
$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_s) \equiv \text{Konfigurationsvektor}$$
entspricht einem möglichen Zustand des Systems.
- Die Zeitableitung der generalisierten Koordinaten ergibt die sogen. <u>generalisierten Geschwindigkeiten</u>
$$\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$$

* Dann, wenn wir $\vec{q}(t_0)$ und $\dot{\vec{q}}(t_0)$ für eine gewisse Zeit t_0 kennen, dann kennen wir den Zustand des Systems für alle Zeiten.

(<u>Bemerkung</u>: die Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen 2. Ordnung, und damit wird die Bewegung für alle Zeiten von 2 Anfangsbedingungen (pro Freiheitsgrad) vollständig definiert)

- Noch ein Paar Bemerkungen über die generalisierte Koordinaten
  - Die Zahl S der Freiheitsgrade ist für ein gegebenes Problem bekannt, aber die <u>konkrete Wahl</u> der Größen $q_1, \dots, q_S$ ist <u>nicht eindeutig</u> (aber es ist trotzdem typischerweise klar durch die physikalische Problemstellung)
  - Die $\{q_i\}$ sind <u>nicht unbedingt Längen</u>. Sie können z.B. Winkel sein.

<u>z.B.</u> Suchen wir noch mal unseren Beispiel der Seite 65



- $x^2+y^2+z^2-R^2=0 \longrightarrow$ eine Zwangsbedingung
- $S = 3-1 = 2 \longrightarrow$ 2 Freiheitsgrade
- Wir brauchen 2 generalisierte Koordinaten

$$q_1 = \theta \;;\quad q_2 = \varphi \quad \text{(also 2 Winkel)}$$
$$\theta: 0 \to \pi \qquad \varphi: 0 \to 2\pi$$

· Also:
$$x = R \sin q_1 \cos q_2$$
$$y = R \sin q_1 \sin q_2$$
$$z = R \cos q_1$$

* Wie gesagt, der Wahl von $q_{1,2}$ ist nicht eindeutig, z.B. $q_1 = z \; (-R \le z \le R)$, $q_2 = \varphi \; (0 \le \varphi < 2\pi)$

$$x = \sqrt{R^2 - q_1^2}\, \cos q_2$$
$$y = \sqrt{R^2 - q_1^2}\, \sin q_2$$
$$z = q_1$$

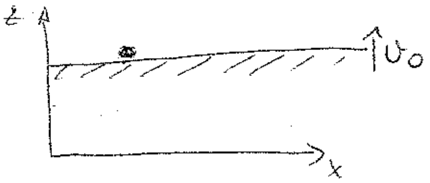
• DAS D'ALEMBERT'SCHE PRINZIP

* Wir werden nun sehen, wie die Lagrangesche Mechanik schafft, die unbekannten Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren.
* Wir werden erstmal ein Paar wichtiger Definitionen einführen

• Virtuelle Verrückung ($\delta \vec{r}_i$)

Virtuelle infinitesimale Koordinatenänderung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist und momentan ($\delta t = 0$) durchgeführt wird

• Bemerkung: $\delta \vec{r}_i$ haben im Prinzip nichts mit der tatsächliche Bewegung zu tun. z.B. fürs Teilchen im Aufzug



$z = z_0 + v_0(t - t_0) \longrightarrow dz = v_0 dt$

Also $d\vec{r} = (dx, dz) = (dx, v_0 dt)$

aber, da $\delta t = 0 \longrightarrow \delta \vec{r} = (\delta x, \delta z) = (\delta x, 0)$

Von nun an: δ heißt virtuelle Verrückung
d heißt tatsächliche Verrückung.

• Virtuelle Arbeit (δW_i)

. Auf s. ④ haben wir die Idee von Arbeit eingeführt.
Für die virtuelle Verrückung gibt es eine virtuelle Arbeit der Form:

$$\delta W_i = - \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

wobei $\vec{F}_i$ ist die auf Teilchen i wirkende Kraft

$$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{K}_i}_{\text{Treibende Kraft}} + \underbrace{\vec{Z}_i}_{\text{Zwangskraft}}$$

* Aus der Newton'schen Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{\vec r}_i = \vec F_i = \vec K_i + \vec Z_i$$

· Wegen Energieerhaltung

$$\sum_i \delta W_i = \sum_i m_i \ddot{\vec r}_i \cdot \delta \vec r_i$$

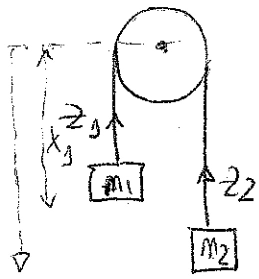
Also $$\sum_i (\vec K_i - m_i \ddot{\vec r}_i)\cdot \delta \vec r_i + \underbrace{\sum_i \vec Z_i \cdot \delta \vec r_i}_{\text{Arbeit geleistet von den Zwangskräfte}} = 0$$

· Nun formulieren wir das sogen. <u>Prinzip der virtuellen Arbeit</u>

$$\boxed{\sum_i \vec Z_i \cdot \delta \vec r_i = 0}$$ ⇒ <u>Die Zwangskräfte leisten keine Arbeit!</u> (bei jeder gedachten Bewegung, die mit den Zwangsbedingung verträglich ist)

Das ist physikalisch (nicht mathematisch) motiviert.

z.B. <u>die Atwood'sche Maschine</u>



Die Zwangskräfte sind die Fadenspannungen

$$Z_1 = Z_2$$

Also die virtuelle Arbeit (nur für diese Kräfte) ist

$$\delta W = -\vec Z_1 \cdot \delta \vec x_1 - \vec Z_2 \cdot \delta \vec x_2$$
$$= Z_1 (\delta x_1 + \delta x_2) = Z_1\, \delta(x_1 + x_2)$$

Aber $x_1 + x_2 = \text{const}$ (gesamte Länge) also $\delta(x_1 + x_2) = 0$
und $\delta W = 0$ im Einklang mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

· Damit: $$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (\vec K_i - \dot{\vec P}_i) \cdot \delta \vec r_i = 0} \longrightarrow$$ <u>D'Alembert'sche Prinzip</u>

• DIE LAGRANGE-FUNKTION

* Die virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ sind aber abhängig voneinander (wegen der Zwangsbedingungen). Wir müssen alles als Funktion der virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten umschreiben:

• $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) \qquad i = 1, \dots, N$

• $\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \dot{\vec{r}}_i(q_1, \dots q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$

Kettenregel

Ganz klar $\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$ → Wir werden diese Eigenschaft sofort anwenden.

• $\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

Also → $\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \vec{K}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j} \delta q_j$

$\boxed{Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$ → generalisierte Kraftkomponent

(Bemerkung: Die Größe von Q_j ist aber nicht unbedingt eine Kraft)

• $\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j =$

$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t}$

$= \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right]$

$= \frac{\partial}{\partial q_j}\dot{\vec{r}}_i$

$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$

$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right]\delta q_j$

$= \sum_{j=1}^{s} \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right\}\delta q_j$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T) \right\} \delta q_j$$

wobei $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \equiv$ Kinetische Energie.

- Also

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

wird

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

(holonome Zwangsbedingungen)

- Da die Koordinaten q_j sind unabhängig, dann können wir alle δq_j bis auf eine gleich Null stellen. Dies bedeutet, daß jeder Summand verschwindet:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

* Nehmen wir nun ein konservatives System an. Für so ein System existiert ein Potential (s. 5)

$$V = V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$$

solch daß $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$

Also $Q_j = \sum_{i=1}^{N} (-\vec{\nabla}_i V) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \overset{\text{Kettenregel}}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

da V nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ abhängt

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Also:
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q_j}(T-V)\right) - \frac{\partial}{\partial \dot q_j}(T-V) = 0}$$

- Am diesem Punkt führen wir eine extrem wichtige Definition

$$\boxed{L(q_1 \ldots q_s, \dot q_1 \ldots \dot q_s, t) = T(q_1 \ldots q_s, \dot q_1 \ldots \dot q_s, t) - V(q_1 \ldots q_s)}$$

↳ Das ist die sogen. Lagrange-Funktion

und dann das D'Alambert'sche Prinzip wird der Form:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \qquad j = 1 \ldots s$$

(LAGRANGE-GLEICHUNGEN (2. Art))

- Damit werden die Zwangskräfte vollständig in den Bewegungsgleichungen eliminiert!!

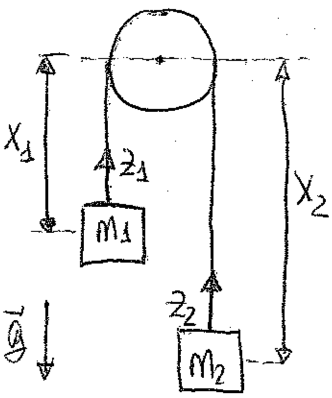
Die Lagrange-gleichungen ersetzen in der lagrange'schen Mechanik die Newton'schen Bewegungsgleichungen.

- Wir werden nun ein Beispiel der Anwendung der Lagrange-gleichungen diskutieren.

Aber der Algorithmus zur Lösung von Problemen (mit holonomen Zwangsbedingungen und konservative Kräfte) mit Hilfe der Lagrange-gleichungen ist immer gleich

i) Zwangsbedingungen formulieren
ii) Generalisierte Koordinaten $\vec q$ festlegen
iii) Lagrange-Funktion $L(\vec q, \dot{\vec q}, t) = T - V$ aufstellen
iv) Lagrange-gleichungen lösen
v) Rücktransformation auf „anschauliche" Koordinaten

• Gucken wir noch mal die Atwood'sche Fallmaschine



* Wir haben hier ein konservatives System mit 5 holonom-skleronomen Zwangsbedingungen, und zwar:

1) $x_1 + x_2 = l = const$ → Das Seil hat eine konstante Länge
2) $y_1 = 0$
3) $y_2 = 0$
4) $z_1 = 0$
5) $z_2 = 0$

Die Bewegung findet nur in X-Richtung statt

* 2 Massen haben 6 Freiheitsgrade im Prinzip, aber wegen der 5 Zwangsbedingungen gibt es nur $S = 6 - 5 = 1$ Freiheitsgrad.

Wir brauchen also eine einzige generalisierte Koordinate.

* Eine passende generalisierte Koordinate wäre:

$$q = x_1$$

Da $x_1 + x_2 = l \longrightarrow x_2 = l - q$

* Gucken wir erstmal die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{d}{dt} q\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{d}{dt}(l-q)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2$$

* Wir brauchen noch die potentielle Energie:

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g q - m_2 g (l - q)$$

* Also die Lagrange-Funktion ist der Form:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + (m_1 - m_2) g q + m_2 g l$$

• Also $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\dot{q} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{q}$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 - m_2) g$$

* Also die Lagrange-Gleichung ist der Form:

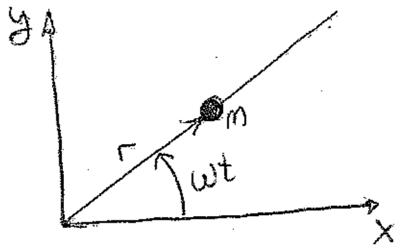
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \longrightarrow (m_1+m_2)\ddot q - (m_1-m_2)g = 0$$

Also $\boxed{\ddot q = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) g}$ Bewegungsgleichung für q.

* <u>Aufpassen</u>: für diese Rechnung haben wir die Zwangskräfte (also die Fadenspannungen in diesem Fall, Z_1 und Z_2) nicht benutzt. Der Lagrange-Formalismus braucht die nicht mehr!

---

* Wir werden nun noch ein Beispiel sehen: <u>eine gleitende Perle auf einer Stange</u>. Die Stange rotiert auf der xy-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.



* Wir haben 2 holonome Zwangsbedingungen:
  - <u>Skleronom</u>: $z=0$ (die Bewegung findet auf der xy-Ebene statt)
  - <u>Rheonom</u>: $y = x\tan\omega t$ (die Bewegung findet auf der rotierenden Stange statt)

* Ein Teilchen hat im Prinzip 3 Freiheitsgrade, aber wir haben 2 holonome Zwangsbedingungen, also es gibt wirklich nur $S=3-2=1$ Freiheitsgrad.

. Als generalisierte Koordinate wählen wir $q=r$ aus.

Also $x = r\cos\omega t = q\cos\omega t \longrightarrow \dot x = \dot q\cos\omega t - \omega q\sin\omega t$

$y = r\sin\omega t = q\sin\omega t \longrightarrow \dot y = \dot q\sin\omega t + \omega q\cos\omega t$

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2) = \frac{m}{2}\left[\dot q^2+\omega^2 q^2\right] \\ V = 0 \text{ (Wir betrachten keine Kräfte)} \end{array}\right\} L = \frac{m}{2}(\dot q^2+\omega^2q^2)$$

• Also $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q}$
$\frac{\partial L}{\partial q} = m\omega^2 q$

$\left.\right\} m\ddot{q} - m\omega^2 q = 0 \;\downarrow\; \ddot{q} = \omega^2 q$

$\longrightarrow q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$$\left.\begin{array}{l} q(0) = r_0 = A+B \\ \dot{q}(0) = 0 = \omega(A-B) \longrightarrow A=B \end{array}\right\} A = \frac{r_0}{2} = B$$

$\longrightarrow q(t) = \frac{r_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = r_0 \cosh \omega t$

Also $r(t)$ wächst ohne Ende. Die Perle gleitet nach draussen mit wachsender Beschleunigung.

• MECHANISCHEN EICHTRANSFORMATIONEN

• Wir haben gesehen, daß für holonomen Zwangsbedingungen und konservative Kräfte, die Physik des Systems durch die Lagrange-Gleichungen

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ gegeben wird.

Also was wichtig ist, sind diese Gleichungen. In diesem Sinn ist die Lagrange Funktion L nicht ganz vollständig definiert. Wir können eine sogen. <u>mechanische Eichtransformation</u> machen:

$L \longrightarrow L' = L + L_0$ wobei $L_0(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t)$

und $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0$ also <u>genau dieselbe Gleichungen.</u>

<u>Beweis</u>: $\frac{\partial L_0}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d}{dt} f = \frac{\partial}{\partial q_j}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\dot{q}_l\right\} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} + \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_l}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} + \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_l \partial q_j}$

Also $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial q_j} = 0$ (für alle j) und daraus folgt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0$