z.B. Sei $L = A\dot{q}^2 + B\dot{q} + F(q)$

$$L_0 = \frac{d}{dt} f(q) \qquad f(q) = -Bq$$

Dann $L' = L + L_0 \longrightarrow L' = A\dot{q}^2 + F(q)$

Ganz klar L' und L ergeben dieselbe Lagrange Gleichung.

• BESONDERE FÄLLE

Bisher haben wir nur holonome Zwangsbedingungen und konservative Kräfte. Wir werden nun auch dissipative Kräfte berücksichtigen.

• Wir kehren nun an unserer Diskussion der S. 71 zurück. Für holonomen Randbedingungen, aber nicht unbedingt konservative Kräfte:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

wobei $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ waren die generalisierte Kraftkomponenten

• Für konservative Kräfte (S. 71) : $Q_j = \frac{-\partial V}{\partial q_j}$, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ und

damit haben wir die Lagrange-Gleichungen in S. 72 hergeleitet.

• Das ist aber nicht immer der Fall. Sehen wir 2 besondere Fälle

① Verallgemeinerte Potentiale

• Für manche Fälle : $Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}$ $\qquad j = 1 \ldots s$

wobei $U = U(q_1 \ldots q_s ; \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_s ; t) \equiv$ verallgemeinerte Potentiale

• Dann können wir die verallgemeinerte Lagrange-Funktion $L = T - U$ definieren, und die Lagrange-Gleichungen bleiben formal unverändert

• Ein wichtiges Beispiel ist die sogen. Lorentz-Kraft für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld (Präsenzübung)

(Mehr über die Lorentz-Kraft später in dieser Vorlesungsreihe).

② Reibung

* Die Reibung ist eine der wichtigsten dissipativen Kräfte.

Die Reibungskräfte sind geschwindigkeitsabhängig (s. ③) $\vec{F} = -\alpha(\vec{v})\,\vec{v}$, und die lassen sich nicht aus einem verallgemeinerten Potential U ableiten.

• Aus s. ㉑:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\vec{K}_i^{(K)}}_{\substack{\text{Konservativ} \\ -\vec{\nabla}_i V}} + \underbrace{\vec{K}_i^{(R)}}_{\text{Reibung}}\Big) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

also: $(L = T - V)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i^{(R)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \equiv Q_j^{(R)}$$

* Ein phenomenologischer Ansatz für $Q_j^{(R)}$ ist (sieh oben)

$$Q_j^{(R)} = -\sum_{\ell=1}^{S} \beta_{j\ell}\, \dot{q}_\ell$$

Sei $D = \frac{1}{2} \sum_{\ell,m=1}^{S} \beta_{\ell m}\, \dot{q}_\ell \dot{q}_m$ $\equiv$ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

Dann $Q_j^{(R)} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$

Also $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad j = 1 \ldots S}$$

Modifizierte Lagrange-Gleichungen

* z.B. Ein Teilchen mit Masse m fällt vertikal in dem Schwerfeld der Erde. Die Reibungskräfte treten gemäß einer Dissipationsfunktion

$D = \alpha v^2/2$ auf, wobei $v = \dot{z}$.

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \\ V = -mgz \end{array}\right\} L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz$$

$\partial L/\partial z = mg$; $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ $\longrightarrow$ $m\ddot{z} - mg + \alpha \dot{z} = 0$

$\partial D/\partial \dot{z} = \alpha v$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{z} = \underbrace{mg}_{\text{Schwerkraft}} \underbrace{-\alpha \dot{z}}_{\text{Reibungskraft}}$$

* Man kann beweisen (Übung) daß

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -2D$$

(Bemerkung, in S. 7 $\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2$, also $\frac{dE}{dt} = -2D$)

Also 2D spielt die Rolle der <u>Energiedissipation</u>

- <u>NICHT-HOLONOME SYSTEME</u>

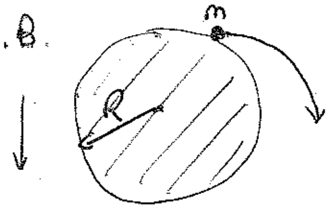
· Bisher haben wir nur holonome Zwangsbedingungen. Die waren der Form $f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$.

· Aber nicht alle Zwangsbedingungen sind dieser Form. Zum Beispiel:

① <u>Ungleichungen</u>

· Die Zwangsbedingungen sind Ungleichungen anstatt Gleichungen

z.B.



Ein Teilchen mit Masse m auf einer Kugeloberfläche im Schwerfeld. Da der Kugel hart ist

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$$

Die freie Bewegung des Teilchens ist eingeschränkt, aber wir können diese Ungleichung nicht benutzen, um überflüssige Koordinaten zu eliminieren (wie wir für holonome Zwangsbedingungen gemacht haben).

② <u>Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form</u>

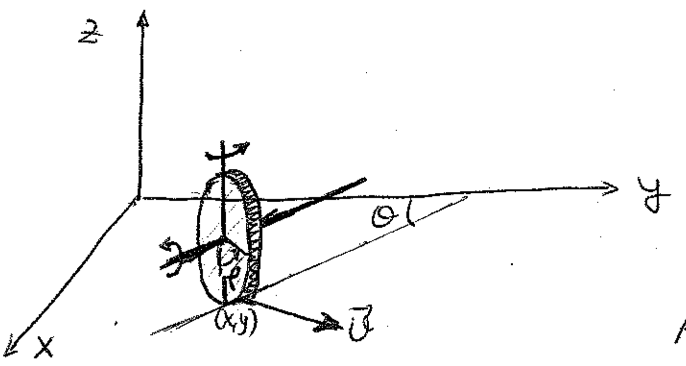
· Dies sind insbesondere Zwangsbedingungen, die Teilchengeschwindigkeiten enthalten. Sie sind der Form

---

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{3N} f_{im}\, dx_m + f_{it}\, dt}\ = 0 \qquad i = 1 \dots p$$

dies läßt sich nicht integrieren, d.h. daß es keine Funktion $F(x_1 \dots x_{3N}, t)$ gibt, solch daß $f_{im} = \frac{\partial F_i}{\partial x_m}$, $f_{it} = \frac{\partial F_i}{\partial t}$

zB Nehmen wir eine Radscheibe, solch daß die Scheibenebene stets vertikal steht. Die Radscheibe rollt auf der xy-Ebene



* Rollbedingungen (Betrag von $\vec{v}$)

$$|\vec{v}| = R\dot{\varphi}$$

* Richtung: $\vec{v} \Rightarrow$ immer senkrecht zur Radachse

Also
$$\dot{x} = v_x = v\cos\theta = R\dot{\varphi}\cos\theta$$
$$\dot{y} = v_y = v\sin\theta = R\dot{\varphi}\sin\theta$$

Dann
$$\begin{cases} dx - R\cos\theta \, d\varphi = 0 \\ dy - R\sin\theta \, d\varphi = 0 \end{cases}$$

Diese 2 Bedingungen sind nicht integrabel. Man braucht $\theta = \theta(t)$ aber $\theta(t)$ liegt nur nach vollständiger Lösung des Problems vor!

* Für diese 2. Sort von nicht holonomen Problemen gibt es ein Lösungsverfahren, nämlich die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

· Wir werden nun diese Methode diskutieren.

· Nehmen wir ein System mit $\bar{p}$ Zwangsbedingungen, davon $p \leq \bar{p}$ in der nicht-holonomen Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t)\, dx_m + f_{it}(x_1 \dots x_{3N}, t)\, dt = 0 \qquad i = 1 \dots p$$

* Erstmal benutzen wir die $(\bar{p}-p)$ holonome Zwangsbedingungen um die tatsächlichen Freiheitsgrade zu verringern:

$$j = 3N - (\bar{p} - p)$$

Wir benutzen also j generalisierte Koordinaten $q_1 \dots q_j$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_j)$$

(Bemerkung → Wegen der p nicht-holonomen Zwangsbedingungen sind nun die generalisierten Koordinaten nicht ganz unabhängig.)

* Wir schreiben nun die nicht-holonomen ~~Zwangsbedingungen~~ Zwangsbedingungen als Funktion der generalisierten Koordinaten

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im}\, dq_m + b_{it}\, dt = 0 \qquad i = 1 \dots p$$

* Für virtuelle Verrückungen (δq_m , und $\delta t = 0$)

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im}\, \delta q_m = 0 \qquad i = 1 \dots p$$

* Wir führen nun die so genannte Lagrange'sche Multiplikatoren λ_i ein. Die sind $\vec{q}$-unabhängig aber vielleicht t-abhängig.

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im}\, \delta q_m \xrightarrow[\text{klar}]{\text{ganz}} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{m=1}^{j} a_{im}\, \delta q_m = 0$$ (wir benutzen das sofort)

(Bemerkung: Wir haben so viele Lagrange-Multiplik. wie nicht-holonomen ~~Zwangs~~bedingungen)

* Ich erinnere euch daß (im Allgemeinen) (sieh s. 71)

$$\sum_{m=1}^{j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} - Q_m \right\} \delta q_m = 0$$ wobei Q_m die generalisierte Kräfte waren.

(Bemerkung: da die δq_m sind nun nicht voneinander unabhängig, es is nicht mehr wahr, daß jeder Summand auch verschwinden muß)

* Für konservative Kräfte $Q_m = -\frac{\partial V}{\partial q_m}$, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_m} = 0$

also

$$\sum_{m=1}^{j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right\} \delta q_m = 0$$

* Dies kombinieren wir mit der Gleichung der Lagrange-Multiplikatoren:

$$\sum_{m=1}^{j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right\} \delta q_m = 0$$

(Bemerkung: $\overline{Q}_m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}$ spielt die Rolle eine generalisierte Zwangskraft die die nicht-holonomen Zwangsbedingungen realisiert. Natürlich $\sum_{m=1}^{j} \overline{Q}_m \delta q_m = 0$ (s. 69))

* Wie gesagt, wegen der nicht holonomen Zwangsbedingungen die q_m's sind nicht voneinander unabhängig im Allgemeinen.

Eigentlich von allen der j Freiheitsgrade nur $j-p$ sind wirklich frei wählbar (wegen der p nicht-holonomen ~~Zwangsbedingung~~ Zwangsbedingung).

* Wir legen nun fest:

$q_m : m = 1 \ldots j-p \quad \longrightarrow$ die sind unabhängig

$q_m : m : j-p+1 \ldots j \quad \longrightarrow$ die sind abhängig

* Die Lagrange-Multiplikatoren λ_i sind noch unbestimmt. Wir wählen sie so, daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} = 0 \qquad m = j-p+1, \ldots, j$$

Das sind p Gleichungen für p unbekannte λ_i.

* Damit

$$\sum_{m=1}^{j}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}\right\}\delta q_m = \sum_{m=1}^{j-p}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}\right\}\delta q_m = 0$$

Aber diese q_m sind nun voneinander unabhängig, also jeder Summand muß auch verschwinden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} = 0 \qquad m : 1, \ldots, j-p$$

* Also insgesamt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}} \quad \text{für alle } m : 1 \ldots j$$

$\downarrow$

<u>Lagrange'sche Bewegungsgleichungen (1. Art)</u>

* Diese Methode läßt sich am Besten mit einem Beispiel verstehen.

- Wir nehmen nun noch mal die Radscheibe der S. 79.

Die „Generalisierte" Koordinaten sind:

$q_1 = x \; ; \; q_2 = y \; ; \; q_3 = \varphi \; ; \; q_4 = \theta$

Die Rollbedingungen waren:

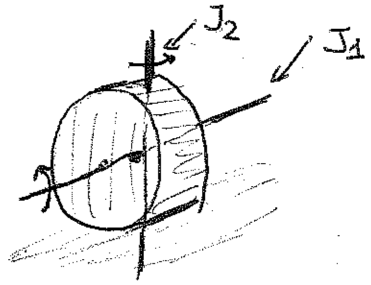
$$\left.\begin{aligned} \dot{x} - R\cos\theta\,\dot{\varphi} = 0 &\longrightarrow dq_1 - R\cos q_4\, dq_3 = 0 \\ \dot{y} - R\sin\theta\,\dot{\varphi} = 0 &\longrightarrow dq_2 - R\sin q_4\, dq_3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{2 nicht-holonomen Zwangsbedingungen}$$

Also $a_{11} = 1\,,\; a_{12} = 0\,,\; a_{13} = -R\cos q_4\,,\; a_{14} = 0$ (Notation der S. 80)

$a_{21} = 0\,,\; a_{22} = 1\,,\; a_{23} = -R\sin q_4\,,\; a_{24} = 0$

* Die generalisierte Zwangskräfte $\overline{Q}_m = \sum_{i=1}^{f} \lambda_i a_{im}$ (siehe Bemerkung in S. 80)

sind also $\overline{Q}_1 = \lambda_1 \; ; \; \overline{Q}_2 = \lambda_2 \; ; \; \overline{Q}_3 = -R\cos q_4\,\lambda_1 - R\sin q_4\,\lambda_2 \; ; \; \overline{Q}_4 = 0$



* Die kinetische Energie der Radscheibe ist:

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2$$

$J_1 \to$ Trägheitsmoment um die Radachse

$J_2 \to$ Trägheitsmoment um die durch Scheibenmittelpunkt und Auflagepunkt verlaufende Achse.

Wir nehmen an, daß die Radscheibe im kräftefreien Raum bewegt, also $V = 0$, und daher $L = T$

- Die Lagrangesche Gleichungen 1. Art sind der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \overline{Q}_m$$

$$L = \frac{M}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{J_1}{2}\dot{q}_3^2 + \frac{J_2}{2}\dot{q}_4^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = M\dot{q}_1 \quad \Bigg\| \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = J_1 \dot{q}_3 \quad \Bigg\| \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{\partial L}{\partial q_4} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M\dot{q}_2 \quad \Bigg\| \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = J_2 \dot{q}_4 \quad \Bigg\|$$

• Also
$$\left\{\begin{aligned} M\ddot{q}_1 &= \lambda_1 \\ M\ddot{q}_2 &= \lambda_2 \\ J_1\ddot{q}_3 &= -R\cos q_4\,\lambda_1 - R\sin q_4\,\lambda_2 \\ J_2\ddot{q}_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$
Lagrange-gleichungen 1. Art

Damit $\ddot{q}_4 = 0 \longrightarrow q_4 = \omega t$ wobei $\omega = \text{const}$ (wir nehmen $q_4(0)=0$ an)

Aus der Zwangsbedingungen

$$\dot{q}_1 - R\cos q_4\,\dot{q}_3 = 0 \longrightarrow \dot{q}_1 - R\cos\omega t\,\dot{q}_3 = 0 \longrightarrow \ddot{q}_1 + R\omega\sin\omega t\,\dot{q}_3 - R\cos\omega t\,\ddot{q}_3 = 0$$

$$\dot{q}_2 - R\sin q_4\,\dot{q}_3 = 0 \longrightarrow \dot{q}_2 - R\sin\omega t\,\dot{q}_3 = 0 \longrightarrow \ddot{q}_2 - R\omega\cos\omega t\,\dot{q}_3 - R\sin\omega t\,\ddot{q}_3 = 0$$

Also
$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_1 = \frac{\lambda_1}{M} &= -R\omega\sin\omega t\,\dot{q}_3 + R\cos\omega t\,\ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_2 = \frac{\lambda_2}{M} &= R\omega\cos\omega t\,\dot{q}_3 + R\sin\omega t\,\ddot{q}_3 \end{aligned}\right\}$$
Damit liegen λ_1 und λ_2 fest

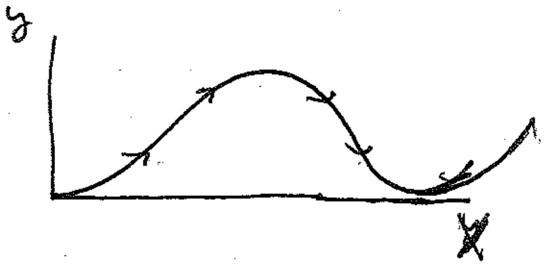
Wir müssen noch die 3. Lagrange-gleichung benutzen

$$\begin{aligned} J_1\ddot{q}_3 &= -MR\cos\omega t\left[-R\omega\sin\omega t\,\dot{q}_3 + R\cos\omega t\,\ddot{q}_3\right] \\ &\quad -MR\sin\omega t\left[R\omega\cos\omega t\,\dot{q}_3 + R\sin\omega t\,\ddot{q}_3\right] \\ &= -MR^2\ddot{q}_3 \longrightarrow (J_1 + MR^2)\ddot{q}_3 = 0 \end{aligned}$$

Also $\dot{q}_3 = \dot{\varphi} \equiv \text{const} = \Omega$

• Damit
$$\ddot{x} = \ddot{q}_1 = -R\Omega\omega\sin\omega t$$
$$\ddot{y} = \ddot{q}_2 = R\Omega\omega\cos\omega t$$

Also
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}t + R\frac{\Omega}{\omega}\sin\omega t \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}t - R\frac{\Omega}{\omega}\cos\omega t \end{aligned}\right\}$$



(Versuch es mal mit einer Münze!)

* FORMINVARIANZ DER LAGRANGE-GLEICHUNGEN

* Die Newton-Gleichungen sind, wie wir schon wissen, nicht forminvariant gegenüber Koordinatentransformationen.

Die Lagrange-Gleichungen sind dagegen forminvariant gegenüber Punkttransformationen der Form

$$(q_1 \dots q_s) \longrightarrow (\bar{q}_1 \dots \bar{q}_s)$$

D.h. wenn $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1 \dots s$

dann für $\begin{cases} q_j' = q_j'(q_1 \dots q_s, t) \; ; \; q_j = q_j(q_1' \dots q_s', t) \\ L'(\vec{q}\,', \dot{\vec{q}}\,', t) = L(\vec{q}(\vec{q}\,', t), \dot{\vec{q}}(\vec{q}\,', \dot{\vec{q}}\,', t), t) \end{cases}$

gilt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j'} = 0 \qquad j = 1 \dots s$

Also genau die gleiche Form! → [Das ist (neben der Eliminierung der Zwangskräfte) ein sehr großer Vorteil der Lagrange-Mechanik.

• BEWEIS: $q_j = q_j(q_1' \dots q_s', t)$

$$\dot{q}_j = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} \dot{q}_l' + \frac{\partial q_j}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l'} = \frac{\partial q_j}{\partial q_l'}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_l'} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_l'} \right)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_l'} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l'} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_l'}\right) = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_l'}\right) \right\} = \sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_l'} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_l'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_l'} = \sum_j \underbrace{\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right\}}_{0} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} = 0$$

- DAS HAMILTON'SCHE PRINZIP

- Bisher haben wir das D'Alembert-Prinzip und die assoziierten Ideen von virtueller Verrückung und virtueller Arbeit benutzt, um die Bewegungsgleichungen der Lagrange-Mechanik (also die Lagrange-gleichungen) herzuleiten.

- Man kann die Lagrange-Mechanik in einer anderen alternativen Form herleiten, und zwar mit dem sogen. Hamilton'schen Prinzip. Diese alternative Form ist extrem wichtig nicht nur für die Mechanik sondern als allgemeinere Idee der gesamten Physik, und deswegen sollen wir sie hier diskutieren.

- Auf S. 66 haben wir die Idee von Konfigurationsraum eingeführt, ein S-dimensionalen Raum (S ≡ tatsächliche Freiheitsgrade), dessen Achsen durch die generalisierten Koordinaten $q_1, \dots, q_S$ gebildet werden.

- Die Kurve im Konfigurationsraum, der der Zustand des Systems im Laufe der Zeit folgt, heißt Konfigurationsbahn: $\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_S(t))$ (Bemerkung: die Konfigurationsbahn ergibt die tatsächlichen Teilchenbahnen, aber hat im Prinzip natürlich nicht die geringste Ähnlichkeit mit den Teilchenbahnen)

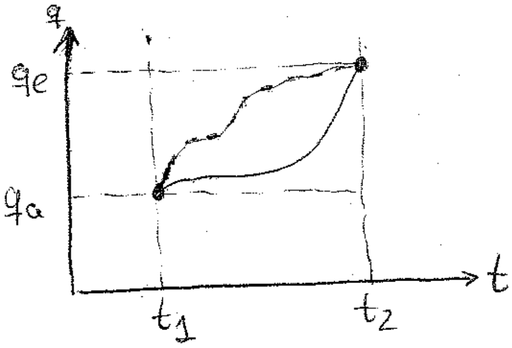
- Für die folgende Diskussion beschränken wir uns auf holonome, konservative Systeme.
Die Lagrange-Funktion ist der Form $L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$ (S. 72).

- Wir definieren nun eine extrem wichtige Idee:

$$\boxed{S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t]\, dt} \longrightarrow \text{Wirkungsfunktional}$$

Die Wirkung hängt von
- Anfangszeit und Endzeit (t_1 und t_2)
- der Bahn $\longrightarrow \vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)$

• Bei festen (t_1, t_2) wird jeder Bahn $\vec{q}(t)$ ein Zahl $S[\vec{q}(t)]$ zugeordnet. Dies nennt man ein Funktional (eine Funktion einer Funktion).



• Es ist klar, daß für feste $\vec{q}_a = \vec{q}(t_1)$ und $\vec{q}_e = \vec{q}(t_2)$ es viele (unendlich viele eigentlich) Konfigurationsbahnen gibt, die diese Randbedingungen erfüllen. (sieh Abbildung)

• Alle die Konfigurationsbahnen $M = \{\vec{q}(t)$ solch daß $\vec{q}(t_1)=\vec{q}_a,\ \vec{q}(t_2)=\vec{q}_e\}$ bauen den Konkurrenzschar.

Natürlich jeder Bahn $\vec{q}(t) \in M$ wird eine Wirkung $S[\vec{q}(t)]$ zugeordnet.

• Jeder Konfigurationsbahn $\vec{q}(t) \in M$ kann durch virtuelle Verrückungen $\delta\vec{q}$ aus einer anderen Bahn entstehen (Natürlich wegen der Randbedingungen $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$),

• Das Hamilton'sche Prinzip lautet, daß die Systembewegung so erfolgt, dass $S[\vec{q}(t)]$ extremal wird, also von allen Bahnen $\vec{q}(t) \in M$, die tatsächliche Bahn ist die, die S extremal macht. D.h. $\boxed{\delta S = 0}$

• Dies Prinzip ist sehr elegant, kurz und extrem wichtig!

Wir werden nun sehen, daß dies Prinzip und das D'Alembert'sche Prinzip äquivalent sind.

· Auf S. 69 haben wir das D'Alembert'sche Prinzip formuliert

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i)\cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left[\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right] - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i =$$

$$= \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i) - \frac{1}{2}\delta\left[\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right]$$

$\delta\left[\frac{d}{dt}\vec{r}_i^{\,2}\right] = 2\frac{d}{dt}\vec{r}_i\ \delta\left[\frac{d}{dt}\vec{r}_i\right]$ (also δ funktioniert wie eine Ableitung)

(mit „δ" können wir genauso wie mit „d" umgehen)

• Also

$$0=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}dt\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i)-\frac{m_i}{2}\delta(\dot{\vec{r}}_i^{\,2})-\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right]\right)$$

Aber

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i)\,dt=\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

$\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$ ← und $\delta q_j(t_{1,2})=0$

Ausserdem:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i\overset{\text{s. 70}}{=}\sum_{j=1}^{s}Q_j\,\delta q_j\overset{\text{Konservative Kräfte}}{=}-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j=-\delta V$$

• Also

$$0=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[-\delta\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}_{T}\Big]+\delta V\right]\Rightarrow 0=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\delta(T-V)=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\delta L$$

$$\Rightarrow\boxed{\delta\left[\int_{t_1}^{t_2}L\,dt\right]=0}\longrightarrow\boxed{\delta S=0}$$

$\delta t=0$ per Definitionem der virtuellen Verrückung (s. 68)

• Also, für alle in der Natur ablaufenden Prozesse nimmt die Wirkung einen Extremwert gegenüber allen virtuellen Nachbarbahnen an, die zwischen denselben Zeitpunkten t_1 und t_2 und denselben Endkonfigurationen $\vec{q}_a$ und $\vec{q}_b$ durchlaufen werden.

* Das Hamilton-Prinzip spielt eine sehr wichtige Rolle in der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie. Die Idee des Feynmann-Pfadintegral kommt eigentlich aus dieser Idee.

• VARIATIONSPROBLEME / DIE LAGRANGE GLEICHUNGEN

• Das Hamilton'sche Prinzip $\delta S = 0$ ist ein Beispiel eines sogen. Variationsproblem. Bevor wir aus der Bedingung $\delta S = 0$ die Lagrange-Gleichungen bekommen, sollten wir erstmal kurz erläutern, wie diese Variationsprobleme eigentlich gelöst werden können.

• Der Einfachkeit halber, werden wir ein 1D Fall annehmen

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

wobei $\left\{ \begin{array}{l} q(t_1) = q_1 \\ q(t_2) = q_2 \end{array} \right\}$

• Wir charakterisieren die Kurven $q(t) \in M$ durch einen Scharparameter α solch daß:

$$q_\alpha(t) = q_0(t) + \alpha \eta(t)$$

wobei $q_0(t)$ die gesuchte extremale Bahn ist.

$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, also $\left\{ \begin{array}{l} q_\alpha(t_1) = q_0(t_1) \\ q_\alpha(t_2) = q_0(t_2) \end{array} \right\}$ Randbedingungen.

Die Verschiebung δq der Bahn, die bei einer Veränderung des Parameters α von $\alpha = 0$ auf $d\alpha$ einsetzt:

$$\delta q = q_{d\alpha}(t) - q_0(t) = \eta(t)\, d\alpha$$

(das ist wirklich eine virtuelle Verrückung, weil hier die Zeit festgehalten ist.)

• Die Variation des Funktionals (in diesem Fall die Wirkung) ist also:

$$\delta S = S[q_{d\alpha}(t)] - S[q_0(t)] = \left(\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_{d\alpha}, \dot{q}_{d\alpha}, t) - L(q_0, \dot{q}_0, t) \right] dt$$

* Da $q_0(t)$ ist die gesuchte extremale Bahn, muß

$$\left(\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \quad \text{für beliebige } \eta(t)$$

{Bemerkung: das ist nun wie eine normale Minimierung / Maximierung einer Funktion.}

* Also

$$\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} L[q,\dot{q},t]\, dt \overset{\text{Kettenregeln}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right\}$$

Aber $\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \eta(t)$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha \dot{\eta}(t)\right) = \dot{\eta}(t)$$

Also $\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta}(t) \right\} dt$

Aber

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\eta(t)}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\eta(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] dt}_{=\left[\eta(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]_{t_1}^{t_2} = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) dt$$

(weil $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$)

Also

$$\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right\} \eta(t)\, dt = 0$$

Dies muß ~~so~~ sein für jede beliebige Funktion $\eta(t)$, also

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0} \longrightarrow$$ Wir bekommen also die Lagrange-Gleichungen (2. Art)

(Bemerkung: die Ideen von Variationsprobleme sind ganz allgemeine. Sei z.B. $f(y, y', x)$ wobei $y = y(x)$, $y' = dy/dx$; sei $J = \int dx\, f(y, y', x)$

dann $\delta J = 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \longrightarrow$ O.

In der Theorie der Variationsprobleme diese Gleichung heißt Euler-Gleichung)

Bemerkung (II)

* Die Diskussion kann für mehrere Dimensionen verallgemeinert werden

Sei $f(y_1 .. y_s; y'_1 ... y'_s; \cancel{x})$ und $J = \int d\cancel{x}\, f(y_1 .. y_s; y'_1 ... y'_s; t)$

$\Rightarrow \delta J = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0 \underset{i=1..s}{\longrightarrow}$ Euler-Lagrange Gleichungen

* Für die Wirkung

$L(q_1 .. q_s; \mathring{q}_1 .. \mathring{q}_s; t) \longrightarrow S = \int dt\, L(q_1 .. q_s; \mathring{q}_1 \cdots \mathring{q}_s; t)$

$\Rightarrow \delta S = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} = 0 \quad i=1..s} \Rightarrow$ Lagrange-Gleichungen 2. Art.