• DIE HAMILTON-MECHANIK

* Bisher haben wir 2 verschiedene Formulierungen der Mechanik, nämlich die Newton-Mechanik und die Lagrange-Mechanik. Die Lagrange-Mechanik eliminiert die Zwangskräfte und ist außerdem forminvariant gegenüber Punkttransformationen.
* Wir werden nun noch eine Formulierung der Mechanik, die sogen. Hamilton-Mechanik. Diese Formulierung ist besonders wichtig, weil die Begriffsbildungen des Hamilton-Formalismus sehr wichtig für die Quantenmechanik sind.

• DIE HAMILTON-FUNKTION

• In der Lagrange-Mechanik haben wir wichtige Begriffe eingeführt
- Generalisierte Koordinaten $q_1 \dots q_s$
- generalisierte Geschwindigkeiten $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_s$
- Lagrange-Funktion $L(q_1 \dots q_s ; \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s ; t)$
- Lagrange-Gleichungen: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (für holonome konservative Systeme)

* Wir führen nun noch eine Definition
- Generalisierte Impulse: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

. Man definiert nun eine sehr wichtige Funktion: die Hamilton-Funktion:

$$\boxed{H(q_1 \dots q_s ; p_1 \dots p_s ; t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q_1 \dots q_s ; \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s ; t)}$$

* Wir werden nun studieren, welche Gleichungen muß H erfüllen.

(Bemerkung: wir betrachten hier nur holonome Systeme mit konservativen Kräften)

- Die Hamilton-Gleichungen

* Wir bilden die totale Differentialform:

$$dH = \sum_{i=1}^{s}\left(dp_i\,\dot q_i + \cancel{p_i\,d\dot q_i}\right) - \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}d\dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\left[dp_i\,\dot q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i\right] - \frac{\partial L}{\partial t}dt =$$

Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \dot p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\left[\dot q_i\,dp_i - \dot p_i\,dq_i\right] - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Andererseits:

$$dH = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i\right] + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

Also:

$$\left\{\begin{aligned} \dot q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

Dies sind die <u>Hamilton'schen Bewegungsgleichungen</u>

(auch kanonischen Gleichungen genannt)

Diese Gleichungen beschreiben die Bewegung des Systems in einem abstrakten 2S-dimensionalen Raum $(q_1 \dots q_s; p_1 \dots p_s)$
$\longrightarrow$ sogen. Phasenraum

- Diese Gleichungen treten nun an der Stelle der Lagrange-Gleichungen.

- Der Hamilton-Formalismus wird insbesondere dann vorteilhaft, wenn sogen. zyklische Koordinaten vorliegen.

q_j ist zyklisch wenn $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

dann $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) = 0 \longrightarrow \dot p_j = 0 \longrightarrow p_j = c_j = \text{Konstante}$

• Da $\dot{p}_j = 0 \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$

Also q_j erscheint nicht in H, und der zugehörige Impuls $p_j = c_j$ ist keine echte Variable, sondern eine durch die Anfangsbedingungen festgelegte Konstante.

Also eigentlich

$$H = H(q_1 \dots q_{j-1}, q_{j+1} \dots q_s ; p_1 \dots p_{j-1} p_j \dots p_s ; t)$$

Die Zahl der Freiheitsgrade hat praktisch von s auf $s-1$ abgenommen!

. Dagegen enthält L noch alle $\dot{q}_l$, auch $\dot{q}_j$.

* Wir werden gleich ein Beispiel der Anwendung der Hamilton-gleichung, aber erstmals werden wir etwas über die physikalische Bedeutung der Hamilton-Funktion lernen.

• PHYSIKALISCHE BEDEUTUNG DER HAMILTON-FUNKTION

• Für ein System von N Massenpunkten $\{m_{i=1\dots n}\}$ mit Koordinaten $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_s, t)$, ist die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$$

• Man kann beweisen (und ich lasse das euch als Lösung) daß

$$L = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l}_{L_2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \dot{q}_j}_{L_1} + \underbrace{\alpha - V(q_1 \dots q_s, t)}_{L_0}$$

wobei $\mu_{jl} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right)$

$\alpha_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)$ und $\alpha = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$

* Also $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{l=1}^{s} \mu_{jl} \dot{q}_l + \alpha_j = \dot{p}_j$

Damit $\sum_{j=1}^{s} \dot{p}_j \dot{q}_j = 2 \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \dot{q}_j = 2L_2 + L_1$

Also $H = \sum_{j=1}^{s} \dot{p}_j \dot{q}_j - L = L_2 - L_0$

* Für <u>holonom-skleronome ~~Rand~~bedingungen</u> $\longrightarrow \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$
und damit $\alpha = \alpha_j = 0$, also $L_1 = 0$, $L_0 = -V$, $L_2 = T$

Also $\boxed{H = T + V = E}$

H ist dann mit der <u>Gesamtenergie</u> identisch.

(<u>Bemerkung</u>: für holonom-rheonome Zwangsbed. $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \neq 0$, und $H \neq E$)

• Aus der Form von dH finden wir daß:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \cancel{\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\}} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Also totale und partielle Ableitung von H nach der Zeit sind identisch

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Also $\boxed{\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \iff H = \text{const}}$

Falls $H = E$ ist dies <u>die Energiesatz</u>

• Lösung mechanischer Probleme in Rahmen des Hamilton-Formalismus.

• Auf S. 72 haben wir den Algorithmus zur Lösung von Problemen (mit holonomen Zwangsbedingungen und konservative Kräfte) mit dem Lagrange-Formalismus.

• Ähnlicherweise gibts es auch ein Algorithmus zur Lösung von Problemen mit dem Hamilton-Formalismus:

1) Zwangsbedingungen formulieren und generalisierte Koordinaten $\vec{q} \equiv (q_1, \dots, q_s)$ festlegen.

2) Transformationsgleichungen aufstellen

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_s, t)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

3) T, V und letztendlich L als Funktion von $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ schreiben

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(\vec{q}, t)$$

4) generalisierte Impulse berechnen

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow p_j = p_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \qquad j = 1 \dots s$$

5) Auflösen nach $\dot{q}_j$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) \qquad j = 1 \dots s$$

6) Man schreibt L als Funktion von $\vec{q}$ und $\vec{p}$:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t) \equiv L(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

7) Hamilton-Funktion schreiben

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

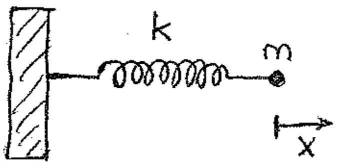
8) kanonische Gleichung aufstellen und integrieren.

9) Rücktransformation auf „anschauliche" Koordinaten

* Wir werden nun an Beispiel sehen.

* BEISPIEL

• Wir werden nun ein Beispiel der Anwendung des Hamilton-Formalismus sehen. Nehmen wir eine Feder mit Federkonstante k, und sei x die Abweichung aus der Ruhelage des Feders von einer Masse m. Die Feder folgt dem Hooke'schen Gesetz (s. ⑦):



$$F = -kx \longrightarrow \text{Harmonischer Oszillator}$$

• Wir wollen natürlich die Dynamik $x(t)$

• Wir werden die Schritte des Algorithmus folgen

1) Zwangsbedingungen: $y = z = 0 \rightarrow 2$ holonom-skleronome Zwangsbedingungen

und 2) Also wir brauchen eine generalisierte Koordinate. In diesem Fall ist die ganz klar:

$$q = x$$

3) $$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \\ V = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k q^2 \end{array}\right\} L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2} q^2$$

s. ⑦

4) $$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$ (in diesem Fall ist der generalisierte Impuls wirklich ein Impuls, aber das ist nicht für alle Beispiele der Fall. Aufpassen!)

5) $$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

6) $$L(q,p) = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{k}{2} q^2$$

7) $$H(q,p) = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2}$$

8) $$\left.\begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{array}\right\} \ddot{q} = \frac{1}{m}\dot{p} = -\frac{k}{m} q \quad ; \quad \text{sei } \Omega = \sqrt{k/m}$$

$$q(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t = x(t)$$

9) $$\text{Wenn } \left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = B\Omega = 0 \end{array}\right\} x(t) = x_0 \cos\Omega t$$

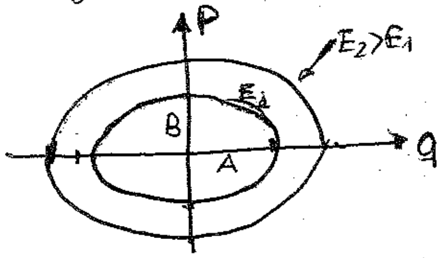
$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t}$$

• Gucken wir noch ein bisschen genauer dieses Beispiel.

Ganz klar $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ Also $H = E = \text{const}$ (Energieerhaltung)

Also $\boxed{\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 = E = \text{const}}$

Die Bewegung des Systems auf dem Phasenraum (q, p) ist also eingeschränkt (wegen der Energieerhaltung) und zwar auf



einer Ellipse der Form

$$\frac{p^2}{B} + \frac{q^2}{A} = 1 \quad \text{wobei} \begin{cases} A = \sqrt{\frac{2E}{m\Omega^2}} \\ B = \sqrt{2mE} \end{cases}$$

(Bemerkung: Aufpassen: dies ist die Bewegung auf dem Phasenraum, nicht die Bewegung im "reellen" Raum.)

---

* Dies Beispiel zeigt uns, daß es eine schöne Symmetrie zwischen q und $p = \partial L / \partial \dot{q}$ gibt.

Man sagt daß q und p sind Kanonisch Konjugierte Variablen.

• Die Idee von kanonischen konjugierten Variablensätze $(\vec{q}, \vec{p})$ ist extrem elegant und wirkungsvoller. Wir werden von nun an ziemlich viel darüber sagen.

• Jede beliebige mechanische Observable ($\equiv$ messbare Größe) kann als Phasenfunktion geschrieben werden also in der Form

$$f(\underbrace{\vec{q}, \vec{p}}_{\text{kanonisch konjugierte Variablen}}, t)$$

- Poisson-Klammer

* Wir wollen nun die Bewegungsgleichung einer Observable $f(\vec{q},\vec{p},t)$ untersuchen:

$$\frac{df}{dt} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

* An diesem Punkt führen wir einem wichtigen Begriff ein.

Seien $f(\vec{q},\vec{p},t)$ und $g(\vec{q},\vec{p},t) \longrightarrow$ 2 skalare Funktionen

Man definiert den Poisson-Klammer von f mit g als:

$$\boxed{\{f,g\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)}$$

(Bemerkung: per Definitionem $\{f,g\}_{\vec{p},\vec{q}} = -\{g,f\}_{\vec{p},\vec{q}}$)

(Bemerkung: wir werden später sehen, daß die Poisson-Klammern eigentlich unabhängig von der Wahl der kanonischen Variablen sind)

* Also, aus der Bewegungsgleichung wird:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \{f,H\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

- Von Bedeutung wird dieses Ergebnis erst, wenn wir gezeigt haben, dass die Poisson-Klammer von der $(\vec{q},\vec{p})$-Wahl unabhängig ist. Aber vorher gucken wir ein Paar Eigenschaften der Poisson-Klammern

1) $$\left.\begin{aligned} \{q_i,q_j\}_{\vec{q},\vec{p}} &= 0 \\ \{p_i,p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} &= 0 \\ \{q_i,p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} &= \delta_{ij} \end{aligned}\right\}\ \text{Fundamentelle Poisson-Klammer}$$

- Die erste 2 sind klar. Für den 3.: $\{q_i,p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{s}\delta_{ki}\delta_{kj} = \delta_{ij}$$

2) Sei $(\vec{q},\vec{p}) \equiv$ kanonisch konjugierte Variablen

$H = H(\vec{q},\vec{p}) \longrightarrow$ aus H bekommen wir die Hamilton-gleichungen.

Sei $(\vec{Q},\vec{P}) \equiv$ noch ein Satz kanonischer konjugierter Variablen.

$H = \tilde{H}(\vec{Q},\vec{P})$ (durch einsetzen der Transformation $\vec{q} = \vec{q}(\vec{Q},\vec{P})$, $\vec{p} = \vec{p}(\vec{Q},\vec{P})$)

↳ aus $\tilde{H}$ sollten wir die Hamilton-gleichungen für $\vec{Q}$ und $\vec{P}$ bekommen.

Dann $\{Q_i, Q_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = \{P_i, P_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0$

$\{Q_i, P_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = \delta_{ij}$

<u>Beweis</u>

$$\dot{Q}_i = \frac{d}{dt} Q_i(\vec{q},\vec{p}) = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\dot{p}_k \right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) =$$

$$= \sum_{k,l} \left\{ \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right] - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right] \right\} =$$

$$= \sum_{k,l} \left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l}\left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right] + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l}\left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right] \right] =$$

$$= \sum_{l} \left[-\dot{P}_l \{Q_i, Q_l\}_{\vec{q},\vec{p}} + \dot{Q}_l \{Q_i, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} \right]$$

Also $\{Q_i, Q_l\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0$ und $\{Q_i, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} = \delta_{il}$

Dieselbe Rechnung für $\dot{P}_i$ ergibt $\{P_i, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0$

• Nun können wir schon beweisen, daß der Wert einer Poisson-Klammer unabhängig der $(\vec{q},\vec{p})$-Wahl ist.

Seien $(\vec{q},\vec{p})$ und $(\vec{Q},\vec{P})$ zwei Sätze kanonischer Variabler

$$\vec{q} = \vec{q}\,(\vec{Q},\vec{P}) \quad , \quad \vec{p} = \vec{p}\,(\vec{Q},\vec{P})$$

und umgekehrt

$$\vec{Q} = \vec{Q}\,(\vec{q},\vec{p}) \quad , \quad \vec{P} = \vec{P}\,(\vec{q},\vec{p})$$

Seien F und G 2 beliebige Phasenfunktionen. Dann

$$\{F,G\}_{\vec{q},\vec{p}} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \sum_{j,\ell}\left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\left[\frac{\partial G}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_\ell}\frac{\partial P_\ell}{\partial p_j}\right] - \frac{\partial F}{\partial p_j}\left[\frac{\partial G}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_\ell}\frac{\partial P_\ell}{\partial q_j}\right]\right] =$$

$$= \sum_{\ell}\left[\frac{\partial G}{\partial Q_\ell}\{F,Q_\ell\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial G}{\partial P_\ell}\{F,P_\ell\}_{\vec{q},\vec{p}}\right]$$

Setzen wir nun

- $F = Q_K \rightarrow \{Q_K, G\}_{\vec{q},\vec{p}} = \dfrac{\partial G}{\partial P_K}$

- $F = P_K \longrightarrow \{P_K, G\}_{\vec{q},\vec{p}} = -\dfrac{\partial G}{\partial Q_K}$

Also $\{F,Q_\ell\}_{\vec{q},\vec{p}} = -\dfrac{\partial F}{\partial P_\ell}$ und $\{F,P_\ell\}_{\vec{q},\vec{p}} = \dfrac{\partial F}{\partial Q_\ell}$

Also $\{F,G\}_{\vec{q},\vec{p}} = \sum_\ell \left[-\dfrac{\partial G}{\partial Q_\ell}\dfrac{\partial F}{\partial P_\ell} + \dfrac{\partial G}{\partial P_\ell}\dfrac{\partial F}{\partial Q_\ell}\right\} = \{F,G\}_{\vec{Q},\vec{P}}$

Wie wir beweisen wollten. Wir können somit ab jetzt die Indizes am Klammersymbole weglassen.

- Die Poisson-Klammer haben wichtige Eigenschaften

i) Antisymmetrie: die haben wir schon gesehen
$\{f,g\} = -\{g,f\}$ und also $\{f,f\} = 0$

ii) Linearität: $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}$ $\quad c_{1,2} \equiv$ Konst.

iii) Nullelement $\{c, g\} = 0 \qquad c \equiv$ Konst

iv) Produktregel: $\{f, gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$

(Bemerkung: diese Regel ist genau gleich wie die einer Ableitung)

v) Jacobi-Identität $\{f, \{g,h\}\} + \{g, \{h,f\}\} + \{h, \{f,g\}\} = 0$

---

* Wir kehren nun an der Bewegungsgleichung

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

zurück. Also die Hamilton-Funktion hat eine entscheidende Bedeutung, da H die zeitliche Entwicklung mechanischer Observable bestimmt.

- Eine physikalische Größe $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ist eine Integral der Bewegung (eine Erhaltungsgröße) wenn $\boxed{dF/dt = 0}$, also $\boxed{\{F, H\} = -\frac{\partial F}{\partial t}}$

- Bemerkung: für $F = H \longrightarrow \{H, H\} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial t}$
Also $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow H \equiv$ const. wie wir schon wüßten.

* Die Poisson-Klammer, und insgesamt die allgemeine Struktur der Hamilton-Mechanik (Hamilton-Funktion, Bewegungsgleichungen, usw), spielen eine extrem wichtige Rolle in dem Übergang ~~zwischen~~ Klassischen und Quanten-Mechanik (durch den sogen. Korrespondenzprinzip).
Eigentlich ist die Struktur der Hamilton-Mechanik extrem ähnlich wie die der Quantenmechanik!!

---

* <u>Beispiel der Anwendung der Poisson-Klammer</u>

• Nehmen wir unseren harmonischen Ostillators der S. 95

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\Omega^2 q^2 \qquad \left(\text{ganz klar } \frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$$

also
$$\dot{p} = \{p,H\} = \left\{p, \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2} q^2\right\} \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$= \frac{1}{2m}\{p,p^2\} + \frac{m\Omega^2}{2}\{p,q^2\} \overset{\text{Produktregel}}{=}$$
$$= \frac{1}{2m}\left[\{p,p\}p + p\{p,p\}\right] + \frac{m\Omega^2}{2}\left[\{p,q\}q + q\{p,q\}\right] \overset{\text{Fundamentelle Poisson-Klammer}}{=}$$
$$= \frac{m\Omega^2}{2}\left[-q - q\right] = -m\Omega^2 q$$

und $\dot{q} = \{q,H\} = \frac{1}{2m}\{q,p^2\} = p/m$

und die sind genau die Hamilton Gleichungen der S. 96

• NOETHER – THEOREM

* Erhaltungsgröße ergeben eine wichtige Information über die Systeme. Der so genannte Noether-Theorem erlaubt uns Erhaltungsgröße zu bestimmen, und zwar nur aus der Symmetrien des Systems.

z.B.: Translationsinvarianz $\longrightarrow$ Impulserhaltung
Rotationsinvarianz $\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung

usw.

* Der Noether-Theorem besagt das folgende.
Sagen wir, daß die Lagrange-Funktion L ändert sich nicht, wenn man eine Transformation $q \longrightarrow q(s)$ macht (eine einparametrige Familie von Transformationen)

D.h. $\frac{d}{ds} L[q(s), \dot{q}(s)] = 0$ (hier betrachte ich, der Einfachheit halber nur eine generalisierte Koordinate)

dann $C = p \frac{d}{ds} q(s)$ ist eine Erhaltungsgröße (also $\frac{dC}{dt} = 0$)
(wobei $p = \partial L / \partial \dot{q}$)

* Beweis

$\dot{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$ (Lagrange-gleich.)

$$\frac{dC}{dt} = \dot{p} \frac{d}{ds} q(s) + p \frac{d\dot{q}}{ds} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \frac{dq}{ds}(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}(s)}{ds} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{ds}(s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} L[q(s), \dot{q}(s)]$$

QED

Also $\frac{d}{dt} C = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{ds} L = 0$

z.B. Translationsinvarianz: $q(s) = q + s \longrightarrow \frac{dq}{ds} = 1$

und $p \equiv$ konstant $\longrightarrow$ Impulserhaltung!

• KANONISCHE TRANSFORMATIONEN

* Eine Phasentransformation ist eine Punkttransformation im Phasenraum

$$q'_j = q'_j(\vec{q},\vec{p},t) \qquad p'_j = p'_j(\vec{q},\vec{p},t)$$

* Während alle Punkttransformationen im Konfigurationsraum zu einer äquivalenten Lagrange-Funktion (und Lagrange-Gleichungen) führen (s. (84)), bleiben nicht bei jeder Phasentransformation die Hamilton-Bewegungsgleichungen forminvariant.

• Man bezeichnet als <u>Kanonische Transformationen</u>, die die Form der Bewegungsgleichungen nicht verändern.

Also $(\vec{q},\vec{p}) \longrightarrow (\vec{q}\,',\vec{p}\,')$ ist kanonisch

wenn $H'(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t)$ erfüllt $\dot{q}'_j = \dfrac{\partial H'}{\partial p'_j}$ und $\dot{p}'_j = \dfrac{-\partial H'}{\partial q'_j}$

* <u>Beispiel</u>:

Sei $\left.\begin{aligned} q'_j &= -p_j \\ p'_j &= q_j \end{aligned}\right\}$ $H(\vec{q},\vec{p},t) \longrightarrow H'(-\vec{p},\vec{q},t)$

also $\left.\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial p'_j} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = +\dot{q}'_j \\ \frac{\partial H'}{\partial q'_j} &= \frac{-\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j = -\dot{p}'_j \end{aligned}\right\}$ also die Transformation ist Kanonisch.

(<u>Bemerkung</u>: wir können $q \leftrightarrow -p$, $p \Leftrightarrow q$ in dieser Form umtauschen, und die Gleichungen bleiben gleich!

* Eine Phasentransformation ist genau dann kanonisch, wenn

$$\{ q_i'(\vec{q},\vec{p},t) , p_j'(\vec{q},\vec{p},t) \} = \delta_{ij}$$

$$\{ q_i'(\vec{q},\vec{p},t) , q_j'(\vec{q},\vec{p},t) \} = \{ p_i'(\vec{q},\vec{p},t), p_j'(\vec{q},\vec{p},t) \} = 0$$

<u>Beweis</u>

. Wir führen hier den Beweis für nicht explizit zeitabhängige Phasentransformationen : $q_j' = q_j'(\vec{q},\vec{p})$, $p_j' = p_j'(\vec{q},p)$

$$\dot{q}_j' = \{ q_j' , H \}_{\vec{q},\vec{p}} = \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\partial q_j'}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial q_j'}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right]$$

$$= \sum_{i,K=1}^{s} \left[\frac{\partial q_j'}{\partial q_l} \left[\frac{\partial H'}{\partial q_k'} \frac{\partial q_k'}{\partial p_l} + \frac{\partial H'}{\partial p_k'} \frac{\partial p_k'}{\partial p_l} \right] - \frac{\partial q_j'}{\partial p_l} \left[\frac{\partial H'}{\partial q_k'} \frac{\partial q_k'}{\partial q_l} + \frac{\partial H'}{\partial p_k'} \frac{\partial p_k'}{\partial q_l} \right] \right]$$

$$= \sum_{K=1}^{s} \left[\frac{\partial H'}{\partial q_k'} \{ q_j' , q_k' \}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial H'}{\partial p_k'} \{ q_j' , p_k' \}_{\vec{q},\vec{p}} \right]$$

Auf eine gleiche Weise findet man

$$\dot{p}_j' = \sum_{K} \left[-\frac{\partial H'}{\partial q_k'} \{ q_k' , p_j' \}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial H'}{\partial p_k'} \{ p_j' , p_k' \}_{\vec{q},\vec{p}} \right]$$

also $\dot{q}_j' = \frac{\partial H'}{\partial p_k'}$ und $\dot{p}_j' = \frac{-\partial H'}{\partial q_k'}$

gelten genau wenn die Bedingungen daoben erfüllt werden.

* Beispiel einer kanonischen Transformation

* Wir arbeiten noch mal mit dem harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2} q^2$$

Sei $q = \sqrt{\frac{2p'}{m\Omega}} \sin q'$

$$p = \sqrt{2p' m\Omega} \cos q'$$

$$\{q,p\}_{q',p'} = \frac{\partial q}{\partial q'}\frac{\partial p}{\partial p'} - \frac{\partial q}{\partial p'}\frac{\partial p}{\partial q'} = 2\sqrt{p'}\cos q' \frac{1}{2\sqrt{p'}}\cos q' - \frac{1}{2\sqrt{p'}}\sin q' \sqrt{p'}(-\sin q')$$

$$= 1$$

~~Kurze die Transformation ist~~

Also die Transformation ist kanonisch.

$$H' = \frac{1}{2m}\left(2p' m\Omega\right)\cos^2 q' + \frac{m\Omega^2}{2} \cdot \frac{2p'}{m\Omega} \sin^2 q' = \Omega p'$$

also H' nimmt eine besonders einfache Gestalt!!

Dann $\frac{\partial H'}{\partial q'} = 0 \rightarrow p' = const = p_0'$

und dann $\frac{\partial H'}{\partial p'} = \Omega \rightarrow q'(t) = \Omega t + q_0'$

Also $$\boxed{q = \sqrt{\frac{2p_0'}{m\Omega}} \sin(\Omega t + q_0')}$$

* Also eine geeignet gewählte kanonische Transformation kann tatsächlich die Integration der Bewegungsgleichungen stark vereinfachen!