• ELEKTROSTATIK

* Wir werden nun mit der Beschreibung der Physik geladener Teilchen anfangen. Genauso wie ein Massenpunkt war eine Masse ohne räumliche Ausdehnung, eine Punktladung ist eine Ladung ohne räumliche Ausdehnung. Wir werden diese Idealisierung mehrmals benutzen.

* Wenn man eine kontinuierliche Verteilung von Ladungen hat, man spricht von eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, solch daß

$$Q = \int_V d^3r\, \rho(\vec{r}) \implies \text{gesamte Ladung im Volumen } V$$

• Die Elementarladung ist die Ladung des Elektrons

$$e \equiv 1{,}602 \; 10^{-19}\, C \qquad (C \equiv \text{Coulomb})$$

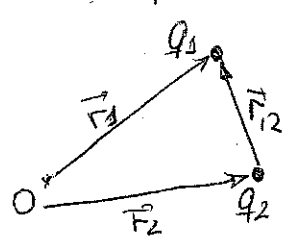
• Die Ladung (im Gegenteil zu der Masse) kann positiv oder negativ sein. z.B. die Ladung des Elektrons ist eigentlich $-e$, und die des Protons ist $+e$.

* Wir werden erstmals sehen, wie die Ladungen sich anziehen oder abstoßen.

• COULOMB-GESETZ

* Dies Gesetz ist experimentell verifiziebar.

* Seien q_1 und q_2 zwei Punktladungen an den Stellen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$



(Bemerkung: der Abstand $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ muß viel größer als die tatsächliche Ausdehnung der Ladungen, sonst ist die Idee von Massenpunkt nicht anwendbar)

* Dann $$\vec{F}_{12} = k\, q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \equiv \text{Coulomb-Kraft}$$

ist die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübte Kraft.

(Bemerkung: k ist eine Konstante. Wir kehren sofort zu dieser Konstante zurück.)

* Wie immer, die Kraft ist ein Vektor.
  Ganz klar $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (also actio = reactio (s. ②))

* Die Kraft wirkt immer entlang der Verbindungslinie.
  Wenn $q_1 q_2 > 0$ (also beide positiv oder negative) bedeutet $\vec{F}_{12}$ eine Abstoßung ($\overset{\vec{F}_{12}}{\longleftarrow}① \quad ②\overset{\vec{F}_{21}}{\longrightarrow}$). Im Gegenteil, wenn $q_1 q_2 < 0$, bedeutet $\vec{F}_{12}$ eine Anziehung ($①\overset{\vec{F}_{12}}{\longrightarrow} \quad \overset{\vec{F}_{21}}{\longleftarrow}②$).

• Die Konstante k hängt vom Medium ab, in dem sich die Punktladungen befinden. Im Vakuum

Ampere

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{wobei } \varepsilon_0 \equiv 8{,}85 \times 10^{-12} \, \frac{A^2 s^2}{N\, m^2}$$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums

(Bemerkung ⇒ diese Definition der Konstante k ist in SI-Einheiten.
In mehreren Bücher benutzt man die Ladungseinheiten (auch cgs-System oder Gaußsches Einheitssystem genannt). In diesem System $k = 1$.
Aber hier werden wir nur SI-Einheiten benutzen.)

• **DAS ELEKTRISCHE FELD**

• Sei eine Ladungskonfiguration und eine (sehr kleine) Testladung q.
Sei $\vec{F}$ die Coulomb-Kraft, die die Ladungskonfiguration auf q ausübt. Man definiert das Konzept des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ als:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

(Bemerkung: $q \to 0$ bedeutet, daß die Testladung das Feld selbst nicht ändert)

* Das $\vec{E}$ Feld ist eine vektorielle Größe mit Einheiten $N/C = V/m$ (V ≡ Volt).

* Die Idee vom $\vec{E}$ Feld führt auf eine 2. Deutung des Coulomb-Gesetzes. Zunächst erzeugt eine vorgegebene Ladungsverteilung instantan ein den ganzen Raum ausfüllendes $\vec{E}$-Feld. Dieses existiert unabhängig von der Testladung q.

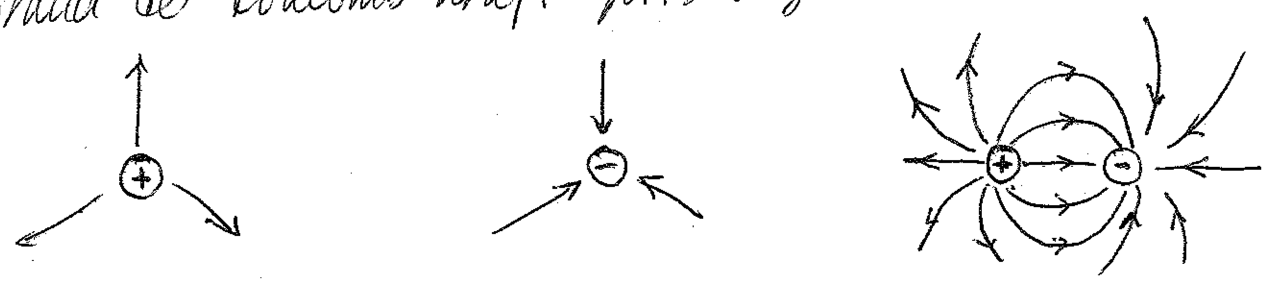
Die Testladung q reagiert auf das bereits vorhandene Feld gemäß $\vec{F}(\vec{r}) = q\,\vec{E}(\vec{r})$

* Eine Punktladung q_0 erzeugt ein $\vec{E}$-Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

wobei q_0 ist an der Stelle $\vec{r}_0$

* Die Idee vom $\vec{E}$-Feld wird mit Hilfe der Feldlinien anschaulicher. Die sind die Bahnen, auf denen sich eine kleine positive Ladung aufgrund der Coulomb-Kraft fortbewegen würde.



(Bemerkung: Feldlinien schneiden sich nie
Sie starten in positiven und enden in negativen Ladungen)

* Wegen des Superpositionsprinzips (S. ②), wenn wir mehreren Punktladungen haben, ist die gesamte Coulomb-Kraft auf der Testladung

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = q \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

* Also das elektrische Feld der mehreren Ladung ist:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

* Wenn wir eine <u>kontinuerliche Ladungsverteilung</u> haben, dann

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

wobei $\rho(\vec{r})$ ist die Ladungsdichte

• <u>DAS SKALARE ELEKTRISCHE POTENTIAL</u>

* Aus der Definition von $\vec{\nabla}$, man kann beweisen, daß

$$\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

Dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \left[-\vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right]$$

$$= -\vec{\nabla} \left[\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

* Wir definieren nun <u>das skalare elektrische Potential</u>

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

und damit $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})}$

* Damit ist die Coulomb-Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\vec{\nabla}(q\varphi(\vec{r})) = -\vec{\nabla} V$$

Also <u>die Coulomb-Kraft ist konservativ</u> (S. 6)

* Aus unserer Diskussion von s. 6 und 7 sieht man, daß das Linienintegral über $\vec{E}$ wegunabhängig ist

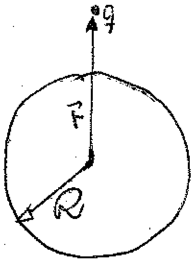
$$\underbrace{\varphi(\vec{r})-\varphi(\vec{r}_0)}_{\text{Spannung } U(\vec{r},\vec{r}_0)} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'$$

Spannung $U(\vec{r},\vec{r}_0)$

(Bemerkung: die Einheit von Spannung ist das Volt)

• BEISPIEL: Homogen geladene Kugel

* Sei eine homogen geladene Kugel von Radius R, und Ladungsdichte ρ_0. Die Gesamtladung des Kugels ist also



$$Q=\int d^3r\,\rho_0 = \rho_0\,\frac{4}{3}\pi R^3$$

* Die Ladungsverteilung ist also

$$\rho(\vec{r}\,')=\begin{cases}\rho_0 & |\vec{r}\,'|\le R\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

* Wir rechnen nun das skalare Potential:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Kugel}} d^3r'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \;=$$

← Kugelkoordinaten (r',θ',ϕ')

← wir definieren die Richtung von $\vec{r}$ als die z-Achse

$$=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r'^2\,dr'\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^{\pi}d\theta'\sin\theta'\,\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}} \;=$$

← $u\equiv\cos\theta$

$$=\frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r'^2\,dr'\int_{-1}^{1}du\,\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'u}} \;=$$

← $\frac{d}{du}\left[\sqrt{r^2+r'^2-2rr'u}\right]=\frac{-rr'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'u}}$

$$=-\frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\int_0^R r'\,dr'\underbrace{\int_{-1}^{1}du\,\frac{d}{du}\left[\sqrt{r^2+r'^2-2rr'u}\right]}_{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'}-\sqrt{r^2+r'^2+2rr'}}$$

$$\sqrt{r^2+r'^2-2rr'}-\sqrt{r^2+r'^2+2rr'} = |\vec{r}-\vec{r}\,'|-|\vec{r}+\vec{r}\,'| = \begin{cases}-2r & r<r'\\ -2r' & r\ge r'\end{cases}$$

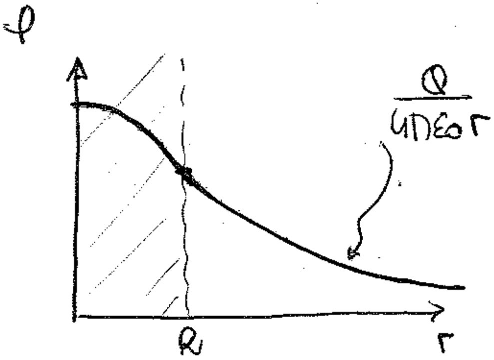
Dann

$$\varphi(\vec r) = +\frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\int_0^R dr' \begin{cases} 2rr' & (r<r') \\ 2r'^2 & (r\geq r') \end{cases}$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\begin{cases} \int_0^R dr'\, r'^2 & (r>R) \\ \int_0^r dr'\, r'^2 + \int_r^R dr'\, rr' & (r<R) \end{cases}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{r}\begin{cases} R^3/3 & (r>R) \\ r^3/2 + r\left[\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right] & (r<R) \end{cases} \;=\; \quad Q = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} 1/r & r>R \\ \left(\frac{3R^2-r^2}{2R^3}\right) & r\leq R \end{cases}$$

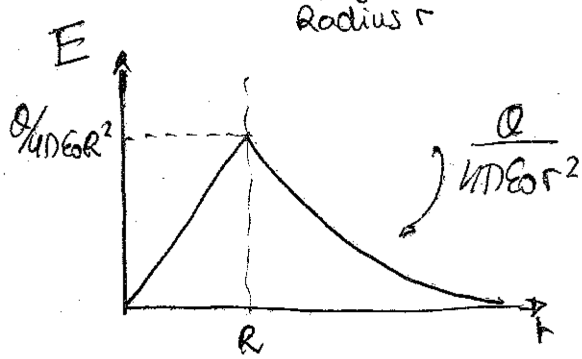


→ außerhalb der Kugel ist das Potential mit dem einer Punktladung Q im Koordinatenursprung identisch.

* Für das $\vec E$-Feld:

$$\vec E(\vec r) = -\vec\nabla\varphi(\vec r) = \underset{\vec r/r}{\vec e_r}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} Q/r^2 & r>R \\ \frac{Q(r)}{r^2} & r<R \end{cases}$$

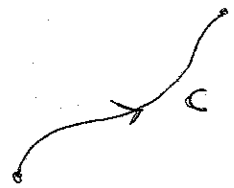
wobei $Q(r) = \int_{\text{Kugel vom Radius } r} \rho_0\, d^3r = \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3$



• Auffrischung mathematischer Konzepte

* Für unsere Diskussion der Elektrostatik werden wir manche Konzepte der Vektoranalyse brauchen, besonders Ideen der Vektorintegralen. (Ihr habt diese Ideen schon in anderen Vorlesungen gehört, z.B. RdP II)

* Linienintegrale



* Sei C eine Kurve
* Sei $f(x,y,z)$ eine Funktion

$$\int_C f(\vec r)\, d\vec r \equiv \text{Linienintegral von } f \text{ auf } C$$

wobei $d\vec r = \vec e_x\, dx + \vec e_y\, dy + \vec e_z\, dz$

Also $\int_C f(x,y,z)\, d\vec r = \vec e_x \int_C f(x,y,z)\, dx + \vec e_y \int_C f(x,y,z)\, dy + \vec e_z \int_C f(x,y,z)\, dz$

* Auf der Kurve C können wir auch

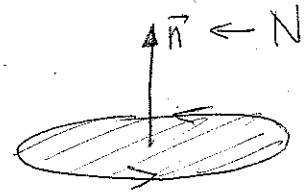
$$\int_C \vec v(\vec r) \cdot d\vec r$$

definieren, wobei $\vec v(\vec r) = v_x(\vec r)\, \vec e_x + v_y(\vec r)\, \vec e_y + v_z(\vec r)\, \vec e_z$

Also $\int_C \vec v(\vec r) \cdot d\vec r = \int_C v_x(\vec r)\, dx + \int_C v_y(\vec r)\, dy + \int_C v_z(\vec r)\, dz$

(z.B. auf S. 4 haben wir die Idee von Arbeit eingeführt $\Rightarrow W = -\int_C \vec F \cdot d\vec r$)

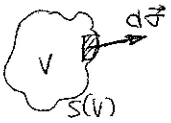
• Flächenintegral



* Sei S eine Fläche
* $d\vec \sigma = \vec n\, dA$ ($dA \equiv$ Flächenelement)
* Sei $f(x,y,z)$ eine Funktion
  $\longrightarrow$ Flächenintegral $\longrightarrow \int_S f(x,y,z)\, d\vec \sigma$
* Sei $\vec v(\vec r)$ ein Vektor
  $\longrightarrow$ Flächenintegral $\longrightarrow \int_S \vec v(x,y,z) \cdot d\vec \sigma$

* <u>Gaußscher Satz:</u>
  * Sei V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche $S(V)$.
  * Sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld
  * Dann

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})\, d^3r = \oint_{S(V)} \vec{A}\cdot d\vec{\sigma}}$$



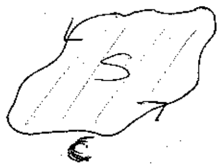
Flächenintegral

<u>Der gaußsche Satz</u>

Dieser Satz verknüpft also Volumeneigenschaften eines Vektorfeldes mit dessen Oberflächeneigenschaften

* <u>Stokessche Satz</u>

* Sei eine Fläche S, die durch die Randkurve C begrenzt ist.
  * Sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld
  * Dann



<u>Der stokesche Satz</u>

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}}$$

Flächenintegral

Linienintegral

Dieser Satz verknüpft also das Linienintegral über den Rand einer Fläche mit dem entsprechenden Flächenintegral.

* <u>Beziehung zwischen Diracschen Delta und Laplace-Operator</u>

* Aus dem Gaußschen Satz kann man eine sehr nützliche Relation zwischen der Diracschen Delta und dem Laplace-Operator:

$$\boxed{\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)}$$

wobei $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$

(<u>Bemerkung</u>: Für mehr Information über diese Mathematische Ideen, siehe z.B. G. Arfken, „Mathematical methods for physicists" (Kap. 1))

* MAXWELL-GLEICHUNGEN DER ELEKTROSTATIK / POISSON-GLEICHUNG

* Sei ein Volumen V mit einer Oberfläche S(V).
* Wir sind nun interessiert an dem <u>Fluss</u> von $\vec{E}(\vec{r})$ (Elektrisches Feld) durch die Oberfläche S(V): Dieser Fluss wird von einem Flächenintegral gegeben:

$$\int_{S(V)} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma} = \int_{S(V)} \left[\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]\cdot d\vec{\sigma}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r}')\int_{S(V)} d\vec{\sigma}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad = \quad \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r}')\int_{S(V)} d\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}_r\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] \quad = \quad$$

Gaußscher Satz

$$\int_S d\vec{\sigma}\,\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_V d^3r\,\vec{\nabla}_r\left(\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \int_V d^3r\,\nabla_r^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r}')\int_V d^3r\,\nabla_r^2\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] \quad = \quad \nabla_r^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r}')\int_V d^3r\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_V d^3r'\rho(\vec{r}')}_{\substack{\text{gesamte Ladung}\\ \text{im Volumen V}\\ q(V)}} = \frac{1}{\varepsilon_0}q(V)$$

$$\boxed{\int_{S(V)}\vec{E}\cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0}q(V)}$$

* Der Fluss des $\vec{E}$-Feldes durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens V ist also bis auf einem Faktor gleich der von V eingeschlossenen Gesamtladung $q(V)$ $\Longrightarrow$ <u>Physikalischer Gaußscher Satz</u>

(Bemerkung: Dieser Satz erlaubt uns zu wissen, wie ist die gesamte Ladung in V, nur durch den Kenntnis von E auf S(V). Das ist sehr bemerkenswert!!)

* Aus dem gaußschen Satz

$$\int_{S(V)}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma} = \int_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,d^3r$$

Also
$$\int_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,d^3r = \int_V d^3r\,\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \longrightarrow \int_V\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\right)d^3r = 0$$

* Das gilt für beliebige Volumina V, also

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})}$$ ← das ist die differentielle Darstellung des physikalischen gaußschen Satzes.

* Das ist die 1. Feldgleichung der Elektrostatik.

Die 2. kommt direkt aus der Tatsache, daß $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ (S. 109).

Also $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$

(Bemerkung: Ich erinnere euch, daß $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0$ für alle φ)

(Bemerkung (II): Für zeitlich veränderliche electromagnetische Felder werden wir später in dieser Vorlesungsreihe sehen, daß diese Gleichung modifiziert wird.)

* Aus dem stokeschen Satz:

$$\underbrace{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r}}_{\text{Zirkulation des E-Feldes längs eines beliebigen geschlossenen Weges}} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{\sigma} = 0$$

* Die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})\\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0\end{aligned}}$$

sind die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

* Mit der Idee des skalaren Potentials können wir beide Gleichungen kombinieren

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\varphi) = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$$

Also $\boxed{\nabla^2 \varphi(\vec r) = -\rho(\vec r)/\varepsilon_0}$ $\longrightarrow$ <u>Poisson-gleichung</u>

· Diese Gleichung ist die <u>fundamentelle Gleichung</u> der Elektrostatik.

· Wenn für alle $\vec r\,'$, $\rho(\vec r\,')$ bekannt ist, dann aus S. 109 wissen wir, daß $\varphi(\vec r) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec r\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r\,'|}$

Es ist einfach zu sehen, daß

$$\nabla_r^2 \varphi(\vec r) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec r\,')}{4\pi\varepsilon_0}\left(\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\right) \overset{\text{S. 113}}{=} -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\, \rho(\vec r\,')\, \delta(\vec r - \vec r\,') = -\frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}$$

also $\varphi(\vec r)$ erfüllt die Poisson-gleichung.

· Leider ist typischerweise das leben komplizierter! $\rho(\vec r)$ ~~ist~~ in einem endlichen Volumen V gegeben und die Werte für $\varphi(\vec r)$ (oder für die Ableitungen um $\varphi(\vec r)$) auf $S(V)$ sind bekannt. Man sucht dann nach dem Potential für all $\vec r \in V$.

Dies sind die typische <u>Randwertprobleme der Elektrostatik</u>.

Wir werden später Beispiele sehen.

* In ladungsfreien Räume: $\rho(\vec r) = 0$ und

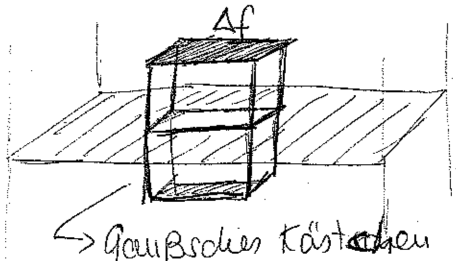
$$\boxed{\nabla^2 \varphi(\vec r) = 0}$$

$\hookrightarrow$ Das ist die sogenannte <u>Laplace-gleichungen</u>.

• Feldverhalten an Grenzflächen

• Das Verhalten des $\vec{E}(\vec{r})$-Feldes an Grenzflächen, die eine Flächenladung σ tragen, ist ziemlich interessant und wichtig, und folgt direkt aus unserer Diskussion der Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik.

• Normalkomponente von $\vec{E}$

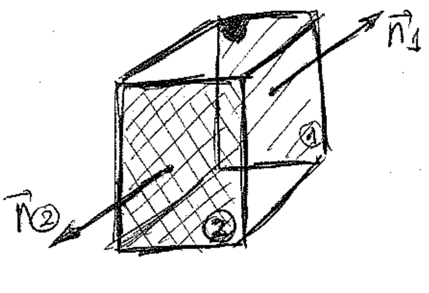


* Nehmen wir ein infinitesimales Volumen ΔV an der Grenzfläche wie in der Abbildung. Die Seiten des Parallelepipeds parallel zu der Oberfläche haben eine Fläche Δf.

* Wir benutzen den Gauß-Satz (S. 113)

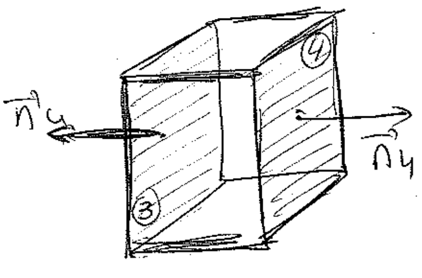
$$\int_{\Delta V} d^3r\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \oint_{S(\Delta V)} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{f}$$

Gucken wir genau an, wie dieses Flächenintegral ist



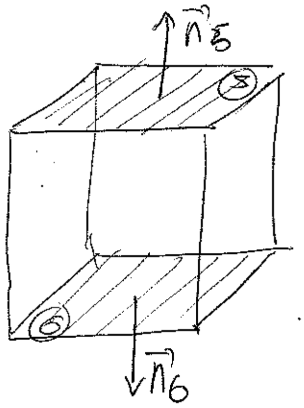
• Die Seiten ① und ② sind gleich aber die Normalenvektoren sind in gegenseitigen Richtungen gerichtet. Für infinitesimale Volumen das $\vec{E}$-Feld in ① = das $\vec{E}$-Feld in ②

$$\int_{①} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{f} = -\int_{②} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{f}$$



* Die Seiten ③ und ④ sind auch gleich und $\vec{n}_4 = -\vec{n}_3$.

Also $$\int_{③} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{f} = -\int_{④} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{f}$$



* Die Seiten ⑤ und ⑥ sind auch gleich und ~~[illegible]~~ $\vec{n}_6 = -\vec{n}_5 = \vec{n}$
* Aber hier die Seiten ⑤ und ⑥ liegen auf verschiedene Seiten der Grenzfläche. In ⑤ hat man ein Feld $\vec{E}_a$ und in ⑥ ein Feld $\vec{E}_i$.

* Also $\int_{⑤} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{f} \underset{\uparrow}{=} \vec{E}_a \Delta f\, \vec{n}$

$d\vec{f} = \Delta f \cdot \vec{n}$

$$\int_{⑥} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = -\vec{E}_i \cdot \Delta f\, \vec{n}$$

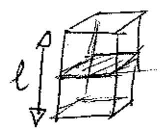
* Also $\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{①} + \int_{②} + \int_{③} + \int_{④} + \int_{⑤} + \int_{⑥} = (\vec{E}_a - \vec{E}_i)\Delta f\, \vec{n}$

Also $\int_{\Delta V} d^3r\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{n}\ \Delta f$

* Aber aus der 1. Maxwell Gleichung (S. 114)

$$\int_{\Delta V} d^3r\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\Delta V} d^3r\ \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \underset{\Delta V \to 0}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta f$$

(Bemerkung, per Definition $\sigma = \lim_{\ell \to 0} \frac{\rho}{\ell}$ wobei

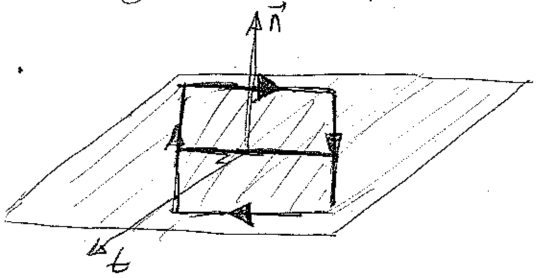


* Also $(\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{n}\ \Delta f = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Delta f$

$$\boxed{(\vec{E}_a - \vec{E}_i)\, \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

→ Also wenn $\sigma \neq 0$ die Normalkomponente des $\vec{E}$-Feldes verhält sich an der Grenzfläche unstetig

* Tangentialkomponenten

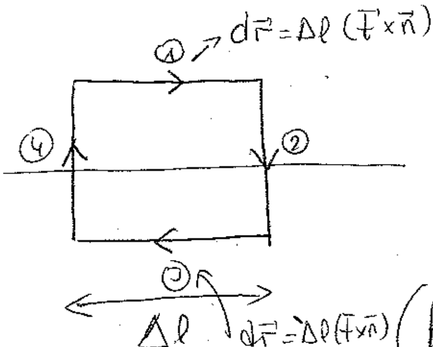


* Wir nehmen eine Fläche Δf wie in der Abbildung. Sei C die Kurve die Δf umrahmt.

* Wegen des Stokes-Satzes:

$$\int_{\Delta f} d\vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Aber $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ (s. 115), also $\oint_C \vec{E}\, d\vec{r} = 0$



Für $\Delta f \to 0$ $\vec{E}$ auf ② und ④ ist gleich.

Und damit $\int_{④} d\vec{r}\cdot\vec{E} = -\int_{②} d\vec{r}\cdot\vec{E}$

(Bemerkung: Ihr muß aufpassen, wie die Richtung von $d\vec{r}$ in ④ und ② ist.)

* Dann auf ① $\longrightarrow \vec{E}_a$, ③ $\longrightarrow \vec{E}_i$ } also $\oint_C \vec{E}\,d\vec{r} = \int_{①} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{③} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$$= \vec{E}_a\,\Delta l\,(\vec{t}\times\vec{n}) - \vec{E}_i\cdot\Delta l\,(\vec{t}\times\vec{n})$$

$$= (\vec{E}_a - \vec{E}_i)\cdot(\vec{t}\times\vec{n})\,\Delta l = 0$$

Also $\boxed{\vec{E}_a\cdot(\vec{t}\times\vec{n}) = \vec{E}_i\cdot(\vec{t}\times\vec{n})}$

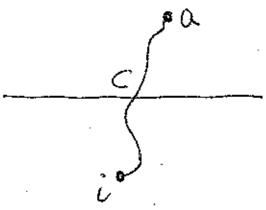
Also die Tangentialkomponente verhält sich an der Grenzfläche stetig.

- Die Ergebnisse für die Normal- und Tangentialkomponenten können kombiniert werden zu

$$\vec{E}_a - \vec{E}_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}$$

wobei $\vec{n} \equiv$ Einheitsvektor senkrecht zur Grenzfläche

* Was passiert mit dem skalaren Potential?



Die Spannung zwischen a und i ist

$$\varphi_a - \varphi_i = -\int_c \vec{E}\cdot d\vec{r} \Longrightarrow 0$$

für verschwindend kleine Weglänge

Also $\varphi_a = \varphi_i \Rightarrow$ Das skalare Potential ist also stetig an jeder Grenzfläche.

Aber, da $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Dann: $\vec{\nabla}\Phi_a - \vec{\nabla}\Phi_i = -4\pi\sigma\vec{n}$

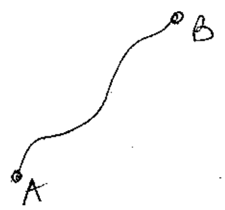
Die Ableitungen von Φ sind nicht unbedingt stetig.
Nur wenn $\sigma = 0$ ist $\vec{\nabla}\varphi$ (und damit $\vec{E}$) stetig.

* Das war eigentlich der Fall einer geladenen Kugel (S. 111), da diese keine Flächenladung an der Grenzfläche aufweist.

• ELEKTROSTATISCHE FELDENERGIE

* Auf eine Punktladung q wird in einem $\vec{E}$-Feld eine Coulomb-Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ geübt.

* Aus S. 4 kennen wir die Definition von Arbeit



$$W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \equiv$$ Arbeit um das Ladungsteilchen von A bis B zu transportieren.

Also $$W_{AB} = -\int_A^B q\,\vec{\nabla}\varphi\, d\vec{r} = +\int_A^B \vec{\nabla}(q\varphi)\, d\vec{r} = q\underbrace{(\varphi(B)-\varphi(A))}_{\text{Spannung } U_{BA}}$$

Also $$\boxed{W_{AB} = q\,U_{BA}}$$

~~* Die Energie eines~~

* Sagen wir, daß wir $n-1$ Ladungsteilchen in einem endlichen Bereich haben. Wir wollen die Arbeit berechnen, die nötig ist, um eine Ladung q_n im Feld der Punktladungen $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_{n-1}$ von ∞ nach $\vec{r}_n$ zu bringen.

* In $\vec{r}_n \to \varphi(\vec{r}_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_j|}$

* In $\infty \to \varphi(\infty) = 0$

Also $$W_{\infty\to\vec{r}_n} = q_n\left[\varphi(\vec{r}_n) - \varphi(\infty)\right] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j q_n}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_j|}$$

* Wir wollen nun, die Ladungen $q_1, q_2, \dots q_N$ von ∞ nach $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N$ eine nacheinander zu bringen.

$\infty \longrightarrow \vec{r}_1 \cdot q_1$ ← für die erste brauchen wir kein Arbeit (am Anfang gibt's Nichts)

$\infty \longrightarrow \vec{r}_2$, q_2 (mit q_1 bei $\vec{r}_1$)

$$W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$\infty \longrightarrow \vec{r}_3$, q_3 (mit q_1 bei $\vec{r}_1$, q_2 bei $\vec{r}_2$)

$$W_3 = \frac{q_3 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} + \frac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}$$

$\vdots$

$$W_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_j q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

* Gesamtarbeit

$$W_1 + W_2 + \dots + W_N = \sum_{j=2}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_j q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

(Bemerkung: die Doppelsumme werten wir so aus, daß wir jedes Paar doppelt zählen und daher durch 2 teilen müssen).

* Für kontinuerlichen Ladungsverteilungen

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|}}_{\varphi(\vec{r})} = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \, \varphi(\vec{r})$$

Poisson--gleichung

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2} \int d^3r \, (-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi) \varphi = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, (\nabla^2 \varphi) \varphi$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi\,\rho) - |\vec{\nabla}\varphi|^2\right] = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{RAND}\\(\infty)}} (\varphi\,\vec{\nabla}\varphi)\, d\vec{f} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, |\vec{E}|^2$$

* Am Rand φ geht zu ~~0~~ wie $\frac{1}{r}$

Also $\varphi\,\vec{\nabla}\varphi \longrightarrow 1/r^3$

In $\infty \longrightarrow |d\vec{f}| \sim r^2$ ↑Randfläche

$$\int (\varphi\,\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{f} \sim \frac{1}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Also das Flächenintegral verschwindet

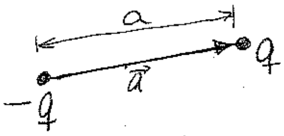
· Also $W = \int d^3r\, \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$

· Im Integranden steht die Energiedichte des $\vec{E}$-Feldes:

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2}$$

- <u>DER DIPOL</u>

* Ein <u>Dipol</u> ist eine Anordnung von 2 Punktladungen $+q$ und $-q$



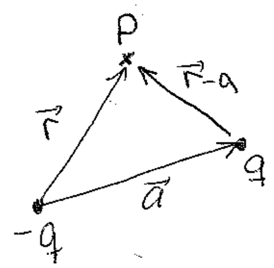
- $\vec{a} \equiv$ Abstandsvektor von $-q$ nach $+q$
- $\vec{p} = q\vec{a} \longrightarrow$ <u>Dipolmoment</u>

* In unserer Diskussion werden wir den limes

$$\vec{p} = \lim_{\substack{a \to 0 \\ q \to \infty}} q\vec{a}$$

annehmen, wobei das Dipolmoment endlich bleibt.

* Ein Dipol ist (wie eine Ladung) auch eine Quelle ~~elektromagnetischer~~ Felder. Sehen wir das. Nehmen wir ein Punkt P. Der Koordinatenursprung setzen wir in $-q$. Das skalare Potential erzeugt von $+q$ und $-q$ ist also:



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{r} + \frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right]$$

* Aber $|\vec{a}|$ ist sehr klein. Wir machen also eine Taylor-Entwicklung:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{a})^2 - r^2a^2}{r^5}\right] + \cdots$$

(<u>Bemerkung</u>: Ich lasse euch den Beweis als Übung.
Hinweis: $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2\vec{r}\vec{a}}} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2}\right]^{-1/2}$
Ihr muß also eine Funktion $(1+x)^{-1/2}$ in der Nähe von $x=0$
Taylor-entwickeln. Ihr muß am Ende bis Glieder 2. Ordnung in $\left(\frac{a}{r}\right)$ sehen.)

* Also $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r}\cdot\vec{a})}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\left[3(\vec{r}\cdot\vec{a})^2 - r^2a^2\right] + \cdots\right]$

* Wenn wir den Limes $\lim\limits_{\substack{q\to\infty \\ a\to 0}}$ bei endlichen $\vec{p} = q\vec{a}$ machen, dann verschwinden alle Glieder außer

$$\boxed{\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}}$$

Eine elektrostatische Ladungskonfiguration mit einem solchen skalaren Potential heißt ein Dipol.

* Rechnen wir nun das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}_D(\vec{r})$:

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_D(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}\right] = \qquad \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{S. } 109)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left[\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right] =$$

$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})$

also $\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}(\frac{1}{r})) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) + \vec{p}\times\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\tfrac{1}{r})}_{\text{zero}}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i p_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

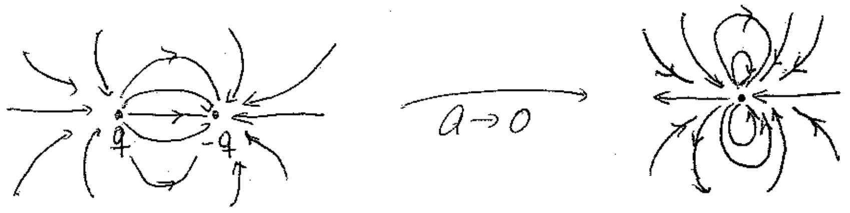
$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i p_i\left\{\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_i}\frac{1}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right\} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i p_i\left\{\frac{\vec{e}_i}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^4}\frac{x_i}{r}\right\}$$

Also

$$\boxed{\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

* Wie sehen die Feld-Linien aus?

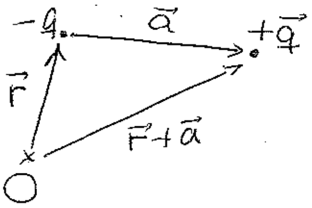
Kehren wir nun zu unserer Abbildung von S. 108 zurück:



$\Longrightarrow$ Elektrische Feldlinien eines Dipols.

(Für reelle Dipolen sieht das Feld nur so aus für ~~Abstände~~ $r \gg a$ (Fernzone). Für die Nahzone gilt die Taylor-Entwicklung von S. 124 nicht mehr, und $\vec{E}$ sieht entsprechend ganz anders aus.)

• Nehmen wir nun ein Dipol in einem $\vec{E}$-Feld. Wie sieht nun die Coulomb-Kraft auf den Dipol aus?



$$\vec{F}(\vec{r}) = -q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})$$

* Wir nehmen nun $a \ll r$, dann können wir noch mal Taylor-entwickeln:

$$\vec{E}(\vec{r}+\vec{a}) = \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2\vec{E}(\vec{r}) + \cdots$$

also

$$\vec{F}(\vec{r}) = q(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) + \frac{q}{2}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2\vec{E}(\vec{r}) + \cdots$$

$$\underset{\substack{\lim q\to\infty \\ a\to 0}}{=} q(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r})$$

Coulomb-Kraft auf einem Dipol

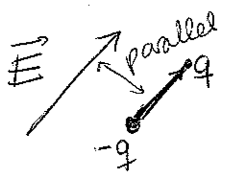
also $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r})}$

Also $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left[-\vec{p}\cdot\vec{E}\right] = -\vec{\nabla}V$

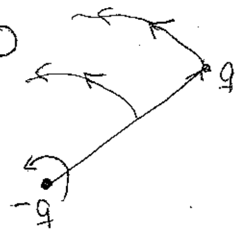
Der Dipol fühlt also ein Potential

$$\boxed{V(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})}$$

* Der Zustand geringster potentielle Energie ist also wenn $\vec{p}$ und $\vec{E}$ parallel sind



* Das ist interessant. Gucken wir es genauer. Sei $\vec{E}$ homogen (mindestens auf einem Bereich). Dann $(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{F} = 0$



• Aber der Drehmoment ist nicht Null!

~~Der~~ Drehmoment auf einem durch $-q$ gehende Achse ist

$$\vec{M} = \vec{a}\times(q\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})) = q\vec{a}\times\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{a}\times(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) + \cdots$$

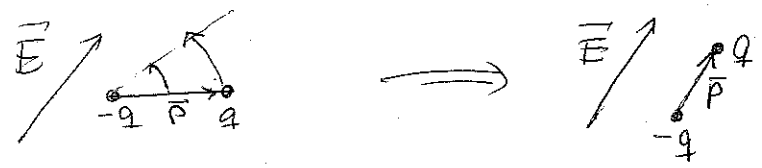
$$\underset{\substack{q\to\infty \\ a\to 0}}{=} \vec{p}\times\vec{E}(\vec{r})$$

- Also $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$

* $\vec{M}$ ist nur Null wenn $\vec{p}$ und $\vec{E}$ sind parallel!

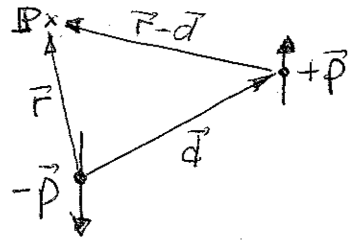
Also das Drehmoment versucht, den Dipol in eine Position minimaler potentieller Energie V zu drehen!

Nur dieser Zustand geringster Energie ist stabil.



- DER QUADRUPOL

* Einer Quadrupol wird von 2 antiparallele Dipolen $\vec{p}$ und $-\vec{p}$ zusammengesetzt:



- $\vec{d} \equiv$ Abstandsvektor von $-\vec{p}$ nach $\vec{p}$.
- Wie für den Dipol, lassen wir $|\vec{d}| \to 0$, $|\vec{p}| \to \infty$

wobei $\boxed{q_{ij} = \lim_{\substack{d_i \to 0 \\ p_j \to \infty}} d_i p_j}$ bleibt endlich.

Dies sind die Quadrupolmomente

* Das Potential eines Quadrupols ist die Summe der Potentiale der beiden Dipole:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{d})}{|\vec{r}-\vec{d}|^3}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{r}\right) - \vec{p}\cdot\vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|}\right)\right\}$$

$$= \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{\nabla}_r\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|}\right\} \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{\nabla}_r\left\{\cancel{\frac{1}{r}} - \cancel{\frac{1}{r}} + (\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_r)\frac{1}{r} + \dots\right\}$$

$$\underset{\substack{d\to 0\\ p\to\infty}}{=} \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{\nabla}_r\left[(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_r)\frac{1}{r}\right] \overset{\text{S.125}}{=} \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left\{(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_r)\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) + \vec{d}\times\cancelto{0}{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)}\right\}$$

$$= \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i d_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{-\vec{r}}{r^3}\right] = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i d_i\left\{\frac{\vec{e}_i}{r^3} - \frac{3x_i}{r^5}\vec{r}\right\} =$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i d_i \left\{ \frac{p_i}{r^3} - \frac{3x_i}{r^5} (\vec{r}\cdot\vec{p}) \right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{-(\vec{d}\cdot\vec{p})}{r^3} + \frac{3}{r^5} (\vec{r}\cdot\vec{d})(\vec{r}\cdot\vec{p}) \right]$$

Also

$$\varphi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[3(\vec{r}\cdot\vec{d})(\vec{r}\cdot\vec{p}) - r^2 (\vec{d}\cdot\vec{p}) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \left\{ 3 \sum_i x_i d_i \sum_j x_j p_j - r^2 \sum_i d_i p_i \right\}$$

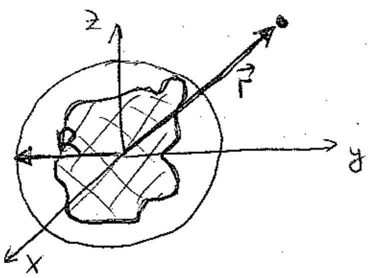
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{ij} \left[3 x_i x_j (d_i p_j) - r^2 \delta_{ij} (d_i p_j) \right]$$

$$\boxed{\varphi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{ij} q_{ij} \left(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \right)}$$

→ Eine elektrostatische Ladungsanordnung, die zu einem solchen skalaren Potential führt, wird <u>Quadrupol</u> genannt.

• <u>MULTIPOLENTWICKLUNG</u>

* Wir betrachten nun eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$, die sich in eine Kugel mit endlichem Radius R einbetten lässt.



* Falls keine Randbedingungen im Endlichen zu erfüllen sind, dann $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

• Für allgemeine Verteilungen $\rho(\vec{r}')$ ist die Auswertung dieses Integrales typischerweise schwer.

Aber mehrmals sind wir nur an dem asymptotischen Verhalten von $\varphi(\vec{r})$ für $r \gg R$ (Fernzone).

In diesem Fall können wir Taylorentwickeln, und zwar nach $\left(\frac{r'}{r}\right)$ – Potenzen.

* $$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \frac{1}{r} - (\vec r'\cdot\vec\nabla)\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}(\vec r'\cdot\vec\nabla)^2\left(\frac{1}{r}\right) + \dots = $$ $\leftarrow \vec\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec r/r^3$ (S. 109)

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec r'\cdot\vec r}{r^3} + \frac{3(\vec r'\cdot\vec r)^2 - r'^2 r^2}{2r^5} + \dots$$

(<u>Bemerkung</u>: $$(\vec r'\cdot\vec\nabla)^2\frac{1}{r} = -(\vec r'\cdot\vec\nabla)\left[\frac{\vec r'\cdot\vec r}{r^3}\right] = -\sum_i x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j \frac{x_j' x_j}{r^3}\right] =$$
$$= -\sum_i x_i'\left\{x_i'\frac{1}{r^3} + \sum_j x_j' x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\} = -\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{r^5}(\vec r\cdot\vec r')^2$$)

* Also
$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec r')\left[\frac{1}{r} + \frac{\vec r'\cdot\vec r}{r^3} + \frac{3(\vec r'\cdot\vec r)^2 - r'^2r^2}{2r^5} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int d^3r'\,\rho(\vec r')\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r}{r^3}\left[\int d^3r\,\vec r'\rho(\vec r')\right]$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\underbrace{\left[\int d^3r'\,\rho(\vec r')\left[3(\vec r\cdot\vec r')^2 - r'^2r^2\right]\right]}_{\underbrace{\int d^3r'\,\rho(\vec r')\left[3\sum_{ij}x_i x_i' x_j x_j' - r'^2\sum_{ij}\delta_{ij}x_i x_j\right]}_{\sum_{ij}x_i x_j\left[\int d^3r'\rho(\vec r')\left[3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right]\right]}} + \dots$$

Also, wir können $\varphi(\vec r)$ in der Form:

$$\boxed{\varphi(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec r\cdot\vec p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{ij}Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5} + \dots}$$

schreiben, Monopol, Dipol, Quadrupole ...

wobei man die folgenden Momente der Ladungsverteilung definiert:

* Gesamtladung (Monopol): $q = \int d^3r'\,\rho(\vec r')$
* Dipolmoment: $\vec p = \int d^3r'\,\rho(\vec r')\,\vec r'$
* Quadrupolmoment (Quadrupoltensor): $Q_{ij} = \int d^3r'\,\rho(\vec r')\left[3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right]$

* Das ist die so genannte <u>Multipolentwicklung</u>.

Wir können damit das Potential einer beliebigen Ladungsverteilung aus den Potentialen

* Einer <u>Punktladung</u> (q) $\sim 1/r$
* Eines <u>Dipols</u> ($\vec{p}$) $\sim 1/r^2$
* Eines <u>Quadrupols</u> (Q_{ij}) $\sim 1/r^3$

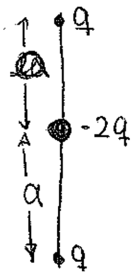
usw.

zusammensetzen.

* Natürlich wenn $q \neq 0$ dominiert in der Fernzone (r sehr groß) der Monopolterm (Punktladung), wegen der $1/r$ - Abhängigkeit.
* Aber wenn $q = 0$, und $|\vec{p}| \neq 0$ ist der Dipolterm der dominant Term.
  (neutrale Ladungsverteilung)
* Für z.B. <u>Spiegelsymmetrische Ladungsverteilungen</u> $\rho(\vec{r}\,') = \rho(-\vec{r}\,')$,
dann $\vec{p} = \int d^3r' \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,' = 0$.

---

* <u>BEISPIEL</u>:



$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(x)\delta(y)\left[\delta(z) - 2\delta(z-a) + \delta(z-2a)\right]$$

* Gesamtladung $\longrightarrow q = 0$
* Dipolmoment $\longrightarrow \vec{p} = \int d^3r' \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,' = 0$ (spiegelsymmetrische Verteilung)
* Quadrupolmoment: $Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \left[3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}\right]$

• Für $i \neq j \rightarrow Q_{ij} = 3\int d^3r' \rho(\vec{r}\,') x_i' x_j' = 0$ (wegen Symmetrie)

• $Q_{11} = \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \left[3x'^2 - r'^2\right] = \int d^3r' \rho(\vec{r}\,')\left[2x'^2 - y'^2 - z'^2\right]$

$$= -\int d^3r' \rho(\vec{r}\,') z'^2 = +2q\,a^2 - q(2a)^2 = -2qa^2$$

$Q_{22} = -2qa^2$

$Q_{33} = \int d^3r' \rho(\vec{r}\,')\left[2z'^2 - x'^2 - y'^2\right] = 2\int d^3r' \rho(\vec{r}\,') z'^2 = 4qa^2$

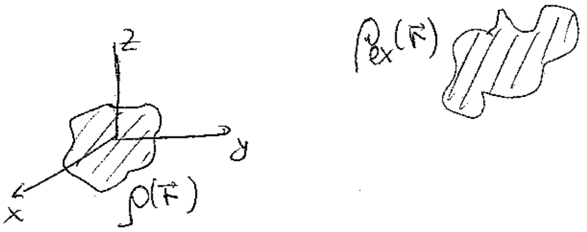
also $Q = 2qa^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Damit $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qa^2 \left[\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}\right] = \frac{-qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right]$

$$\boxed{\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{-qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,(1-3\cos^2\theta)}$$

• WECHSELWIRKUNG EINER LADUNGSVERTEILUNG MIT EINEM ÄUßEREN FELD

* Wir nehmen nun 2 Ladungsverteilungen $\rho_{ex}(\vec{r})$ und $\rho(\vec{r})$



* Aus unserer Diskussion der S. 122 ist die Feldenergie der gesamten Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) + \rho_{ex}(\vec{r})$:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3r \int d^3r' \, \frac{[\rho(\vec{r}) + \rho_{ex}(\vec{r})][\rho(\vec{r}\,') + \rho_{ex}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

* Die Wechselwirkungsenergie zwischen ρ und ρ_{ex} ist also

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r\, \rho(\vec{r}) \int d^3r' \, \frac{\rho_{ex}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \varphi_{ex}(\vec{r}\,')$$

wobei $\varphi_{ex}(\vec{r})$ ist das von $\rho_{ex}(\vec{r})$ erzeugte skalare Potential.

* Wir nehmen nun an, daß das $\rho(\vec{r}) \neq 0$ - Gebiet so klein ist, daß dort $\varphi_{ex}(\vec{r}) \simeq$ constant. Wir können dann eine Taylor-Entwicklung machen.

$$\varphi_{ex}(\vec{r}) = \varphi_{ex}(0) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\varphi_{ex}(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})^2\varphi_{ex}(0) + \dots$$

$$= \varphi_{ex}(0) - \vec{r}\cdot\vec{E}_{ex}(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \left.\frac{\partial^2 \varphi_{ex}}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{r=0} + \dots$$

· Wir werden nun das ein bisschen umschreiben. Im $\rho(\vec{r}) \neq 0$ Gebiet, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{ex} = 0$ (physikalisch das bedeutet, daß im Bereich $\rho(\vec{r}) \neq 0$ gibt es keine Ladung die $\vec{E}_{ex}$ erzeugt, also $\rho_{ex}(\vec{r})$ und $\rho(\vec{r})$ überlappen sich nicht).

* Das heißt:

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{ex} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(E_{ex})_i = -\sum_i \frac{\partial^2 \varphi_{ex}}{\partial x_i^2} = -\sum_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{ex}}{\partial x_i \partial x_j}$$

* Also

$$\varphi_{ex}(\vec{r}) = \varphi_{ex}(\vec{r}) + \frac{r^2}{6}\sum_{ij}\delta_{ij}\frac{\partial^2 \varphi_{ex}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= \varphi_{ex}(0) - \vec{r}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{ij}\left[3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right]\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j}\bigg|_{r=0} + \dots$$

* Und damit

$$W_1 = \varphi_{ex}(0)\underbrace{\left[\int d^3r\, \rho(\vec{r})\right]}_{q} - \vec{E}(0)\underbrace{\left[\int d^3r\, \rho(\vec{r})\,\vec{r}\right]}_{\vec{p}}$$

$$- \frac{1}{6}\sum_{ij}\underbrace{\left[\int d^3r\, \rho(\vec{r})\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)\right]}_{Q_{ij}}\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j} + \dots$$

Also

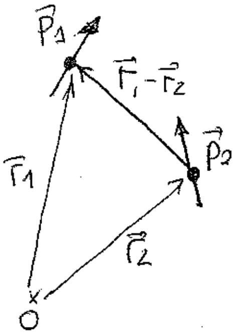
$$\boxed{W_1 = q\,\varphi_{ex}(0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{ij} Q_{ij}\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j} + \dots}$$

Die <u>Ladung</u> wechselwirkt mit dem externen Potential

Das <u>Dipolmoment</u> wechselwirkt mit dem externen Feld $\vec{E}$ (S. 126)

Das <u>Quadrupolmoment</u> wechselwirkt mit den Ortsableitungen des $\vec{E}$-Feldes

* Ein wichtiges Beispiel ist die <u>Wechselwirkung 2 Dipolen</u> ($\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$)



$\vec{p}_2$ erzeugt ein Feld (S. 125)

$$\vec{E}_D(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_2\right](\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5} - \frac{\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\right]$$

Die Wechselwirkungsenergie ist also:

$$\boxed{W = -\vec{p}_1\cdot\vec{E}_D(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} - \frac{3\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_2\right]\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_1\right]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5}\right]}$$

$\Downarrow$

WICHTIG! $\Longrightarrow$ <u>Dipol-Dipol-Wechselwirkung</u> (sie hängt von der Orientierung der beiden Dipolen)

• RANDWERTPROBLEME

* Auf S. 116 haben wir schon gesagt, daß für viele praktische Probleme man $\rho(\vec{r}')$ nicht für alle $\vec{r}'$ und ohne Randbedingungen an Grenzflächen kennt.

* Für viele praktische Probleme (so genannte Randwertprobleme) kennt man $\rho(\vec{r}')$ für alle $\vec{r}'$ in einem Volumen V, und außerdem kennt man $\varphi(\vec{r})$ oder $\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{n}$ auf S(V) [wobei $\vec{n}$ = Normalvektor zu S(V)].

(Bemerkung: von nun an benutzen wir $\frac{\partial\varphi}{\partial n} \equiv \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{n}$)

* Mit dieser Information wollen wir $\rho(\vec{r})$ für alle $\vec{r}\in V$ bestimmen.

* Gucken wir erst ganz formell nach der Lösung dieser Probleme.

(Bemerkung: hier werden wir die so genannte Greensche-Identität

$$\int_V [\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi]\, d^3r = \int_{S(V)} \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) df$$

anwenden, wobei $\varphi_{(\vec{r})}$ und $\psi_{(\vec{r})}$ skalare Felder. Diese Identität kommt direkt aus dem Gauß-Satz [man schreibt $\vec{A} = \varphi\vec{\nabla}\psi \rightarrow \int_V \vec{\nabla}\vec{A}\, d^3r = \oint_{S(V)} \vec{A}\cdot d\vec{f}$ und $\vec{B} = \psi\vec{\nabla}\varphi \longrightarrow \int_V \vec{\nabla}\vec{B}\, d^3r = \oint_{S(V)} \vec{B}\, d\vec{f}$ und man substrahiert die beide Gleichungen])

* Also aus der Greenschen Identität:

$$\int_V \left[\varphi(\vec{r}')\,\nabla^2_{r'}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla^2_{r'}\varphi(\vec{r}')\right] d^3r' = \int_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial n'}\varphi(\vec{r}')\right]$$

$\nabla^2_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ ⟶ ||

$$-4\pi\int_V \varphi(\vec{r}')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') - \int_V \frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underbrace{\nabla^2_{r'}\varphi(\vec{r}')}$$

⟶ Poisson-Gleichung ⟶ $-\rho(\vec{r}')/\varepsilon_0$

Also

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} df' \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$$

Also für die Bestimmung brauchen wir ⟹ $\boxed{\rho(\vec{r}') \text{ für } \vec{r}'\in V}$ und $\boxed{\varphi \text{ oder } \frac{\partial\varphi}{\partial n} \text{ auf } S(V)}$

(Bemerkung: Die Ladungen außerhalb V spielen eine implizite Rolle in den Randbedingungen auf S(V))

* Man unterscheidet 2 Typen von Randbedingungen
  - Dirichlet-Randbedingungen: man kennt $\varphi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in S(V)$
  - Neumann-Randbedingungen: man kennt $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf $S(V)$

Aus solchen Randbedingungen folgt die Eindeutigkeit der Lösung (ohne Beweis)

(Bemerkung: manchmals sind die Randbedingungen stückweise Direchlet und stückweise Neumann).

* z.B. für Leiter (Metalle) bewegen sich die Ladungen frei. Das Problem ist statik nur wenn $\vec{E}=0$ in dem Leiter. Damit ist $\varphi = \text{const}$ innerhalb des Leiters.

E_{AU}

$E_{IN}=0$

$$\left.\begin{aligned} E_{AU}^{(n)} &= \sigma/\varepsilon_0 \\ E_{AU}^{(t)} &= E_{IN}^{(t)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{aus unserer Diskussion der S. 117.}$$

- Also an einer Leiteroberfläche $\longrightarrow \varphi = \text{const}$
  " geladenen Fläche $\longrightarrow \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = -\sigma/\varepsilon_0$ } S. 120

- Greensche Funktion

* Für die Lösung der Poisson-Gleichung (und eigentlich im Allgemeinen für ander Differentialgleichungen) ist die sogen. greensche Funktion sehr nützlich.
* Für die Poisson-Gleichung ist die greensche Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ die Lösung von:

$$\boxed{\nabla_r^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

also eine Poisson-Gleichung mit Ladung 1.

Da $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \longrightarrow \nabla_r^2\left[G - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = 0$

Also $G(\vec{r},\vec{r}\,') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\text{Skalares Potential einer Ladung 1 ohne Randbedingungen}} + \underbrace{f(\vec{r},\vec{r}\,')}_{\text{solch daß } \boxed{\nabla^2 f(\vec{r},\vec{r}\,')=0}}$

(im Prinzip $f(\vec{r},\vec{r}\,')$ könnte ziemlich beliebig sein, nur $f(\vec{r},\vec{r}\,') = f(\vec{r}\,',\vec{r})$ und $\nabla^2 f = 0$)

* Aus der greenschen Identitäten:

$$\int_V d^3r' \left[\varphi(\vec{r}')\, \underbrace{\nabla^2_{r'} G(\vec{r},\vec{r}')}_{-\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{\varepsilon_0}} - G(\vec{r},\vec{r}')\, \underbrace{\nabla^2_{r'} \varphi(\vec{r}')}_{\rho(\vec{r}')/\varepsilon_0} \right] = \int_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right]$$

Also

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, \rho(\vec{r}')\, G(\vec{r},\vec{r}') - \varepsilon_0 \int_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right]}$$

* Für Dirichlet-Randbedingung, wählt man $f(\vec{r},\vec{r}')$ solch daß

$$\int_{S(V)} df'\, G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} = 0 \quad \text{(normalerweise nimmt man } G = 0 \text{ auf } S(V)\text{)}$$

Für Neumann-Randbedingungen wählt man $f(\vec{r},\vec{r}')$ solch daß

$$\varepsilon_0 \int_{S(V)} df'\, \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} = -\varphi_0 \equiv \text{const} \quad \left(\text{normalerweise nimmt man } \frac{\partial}{\partial n'} G = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \right)$$

$S \equiv$ gesamte Fläche von $S(V)$

$$\varphi_0 = \frac{1}{S} \int_{S(V)} df'\, \varphi(\vec{r}')$$

Damit hat man:

- Für Dirichlet $\Rightarrow$ $\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}') - \varepsilon_0 \int_{S(V)} df'\, \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}$

  Wir brauchen $\rho(\vec{r}')$ auf V und φ auf $S(V)$

- für Neumann $\Rightarrow$ $\varphi(\vec{r}) - \varphi_0 = \int_V d^3r'\, G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}') + \varepsilon_0 \int_{S(V)} df'\, G(\vec{r},\vec{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'}$

  wir brauchen $\rho(\vec{r}')$ auf V und $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}$ auf $S(V)$

---

* Also wenn wir $G(\vec{r},\vec{r}')$ kennen, kennen wir $\varphi(\vec{r})$, also wir haben die Poisson-gleichung gelöst.

* Suchen wir noch mal $G(\vec{r},\vec{r}')$, ~~[illegible]~~

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{} + \underbrace{f(\vec{r},\vec{r}')}_{}$$

Potential einer Punktladung mit Ladung $q = 1$ (S. 109)

Funktion, die $\nabla_r f(\vec{r},\vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r},\vec{r}' \in V$ erfüllt.

Diese Funktion wird durch die Randbedingungen gegeben.

Also wir müssen nun nach dieser Funktion $f(\vec{r},\vec{r}')$ suchen!

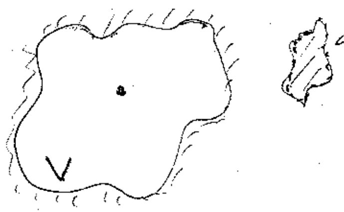
* METHODE DER BILDLADUNGEN

* Wir können die Funktion $f(\bar{r},\bar{r}')$ eine physikalische Interpretation geben:

$f(\bar{r},\bar{r}') \equiv$ Potential einer Ladungsverteilung außerhalb V, das zusammen mit dem Potential der Punktladung $q=1$ für die gegebenen Randbedingungen auf $S(V)$ sorgt.

* Diese Interpretation ist sehr interessant, und bringt uns direkt an der sogen. Methode der Bildladungen

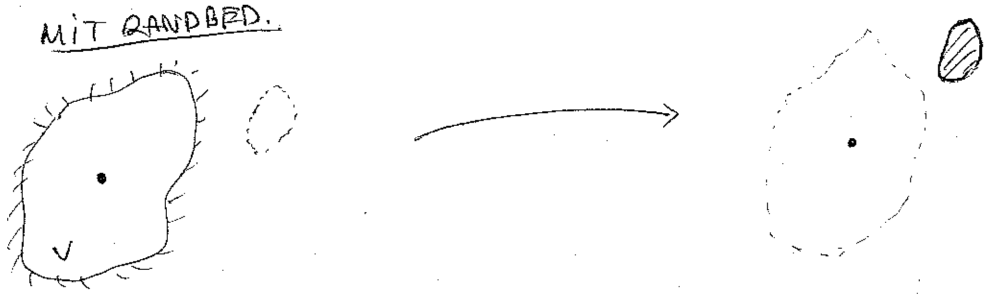
"Fiktive" Ladungsverteilung $\equiv$ Bildladungen



• Die Bildladungen sitzen außerhalb V und die ergeben die gewünschten Randbedingungen.

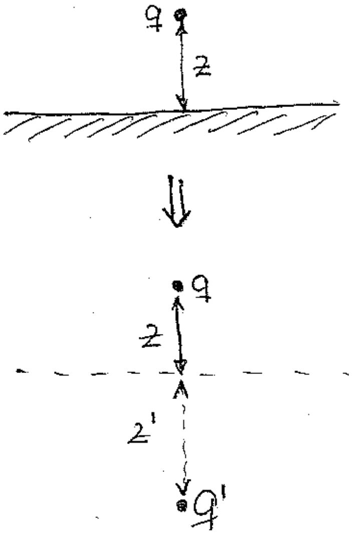
* Also wir können nun eine Problem mit Randbedingungen in einer Problem ohne Randbedingungen umwandeln:

MIT RANDBED. — MIT FIKTIVEN LADUNGEN (OHNE RANDB.)



Natürlich sind wir immer noch nur an dem Potential innerhalb V interessiert.

• BEISPIEL



* Wir sind interessiert am Potential einer Punktladung q über einer unendlich ausgedehnten Metallplatte. Die Metallplatte ist geerdet (also $\varphi=0$ auf der Fläche)

$$\boxed{\varphi=0 \text{ auf } S(V) \Longrightarrow \text{Dirichlet}}$$

* Wir realisieren diese Bedingung durch eine Bildladung q' (wegen Symmetriegründen ist es klar daß die Ladung q' auch auf der z-Achse liegen muß).

* Das Potential der beiden Ladungen ist:

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec r-\vec r_0|} + \frac{q'}{|\vec r-\vec r_1|}\right] \qquad \text{wobei } \vec r_0=(0,0,z),\ \vec r_1=(0,0,z')$$

solch daß $\varphi(x,y,z=0)=0$

Also
$$0 = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}} \Longrightarrow q'=-q,\quad z'=-z$$

Also
$$\varphi(\vec r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|}-\frac{1}{|\vec r+\vec r_0|}\right]$$

Für eine Ladung $q=1$, haben wir die Greensche Funktion, also

$$G(\vec r,\vec r_0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r_0|}\underbrace{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec r+\vec r_0|}}_{f(\vec r,\vec r_0)}$$

prüfen wir daß $\nabla^2 f(\vec r,\vec r_0)=0$ für $\vec r\in(V)$

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec r+\vec r_0|} = -4\pi\,\delta(\vec r+\vec r_0)=0$$

(weil $\vec r+\vec r_0$ kann nie Null sein, weil für $\vec r\in(V)$, $\vec r+\vec r_0\neq 0$)

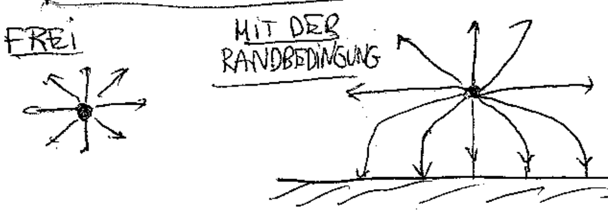
---

* Wir kennen $\varphi(\vec r)$. Also

$$\vec E = -\vec\nabla\varphi(\vec r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec\nabla\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|}\right)-\vec\nabla\left(\frac{1}{|\vec r+\vec r_0|}\right)\right] = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec r-\vec r_0)}{|\vec r-\vec r_0|^3}-\frac{(\vec r+\vec r_0)}{|\vec r+\vec r_0|^3}\right]$$

$$\vec E \xrightarrow[z\to0]{} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x,y,-z_0)}{|(x,y,-z_0)|^3} - \frac{(x,y,z_0)}{|(x,y,+z_0)|^3}\right] = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(0,0,2z_0)}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec E_{z\to0} = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}\,\vec e_z}$$ → Wie erwartet, das Feld $\vec E$ auf der Oberfläche ist senkrecht zu der Oberfläche.



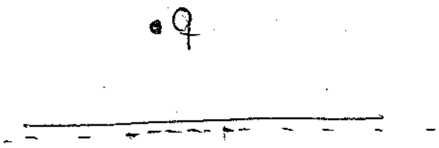
(bei $q>0$)

* Wie ist die <u>Ladungsdichte auf der Oberfläche</u>?

Die Ladung q (sei $q>0$) erzeugt eine Ladungsdichte auf der Oberfläche des geerdeten Leiters.

Aus S. 133 $\quad \vec{E}_{au} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z \longrightarrow \sigma = \frac{-q}{2\pi}\frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}$

Die Ladungsdichte ist eigentlich nicht uniform. Sie ist natürlich größer direkt unter die Ladung q.



$$\sigma_{max} = \sigma(x=0, y=0) = \frac{-q}{2\pi z_0^2}$$

* Die Gesamtladung auf der Grenzfläche ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\ \sigma(x,y) = \frac{-q z_0}{2\pi}\, 2\pi\int_0^{\infty}\rho\, d\rho\, \frac{1}{(\rho^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$= +\frac{q z_0}{\cancel{2\pi}}\cancel{2\pi}\int_0^{\infty}d\rho\,\frac{d}{d\rho}(\rho^2+z_0^2)^{-1/2} = -q\, z_0\,\frac{1}{z_0} = -q$$

i.e. die Gesamtladung erzeugt auf der Fläche ist genau $-q$.

* Es ist interessant zu sehen, daß $+q$ erzeugt eine Ladung auf der Fläche, die selbst eine Kraft auf $+q$ ergibt. Irgendwie bedeutet das, daß $+q$ (wegen der Randbedingung) eine Kraft über sich selbst erzeugt. Diese Kraft (auch <u>Bildkraft</u> genannt) ist die Kraft, die die Bildladung auf $+q$ übt:

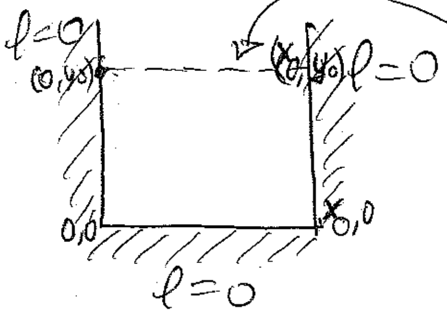
$$\vec{F}_{BILD} = q\,\vec{E}_{BILD} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q\,(\vec{r}_{BILD}-\vec{r}_{LADUNG})}{|\vec{r}_{BILD}-\vec{r}_{LADUNG}|^3}\right) = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0\, 8z^3}\,2z\,\vec{e}_z$$

Also $\boxed{\vec{F}_{BILD} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4z^2}\vec{e}_z}$

• METHODE DER SEPARATION DER VARIABLEN

* Wir werden nun noch eine Methode für die Lösung der Poisson-gleichung. Wir werden diese Methode mit einem Beispiel einführen.

* Sei ein Ladungsfreier Raum. Um das Problem zu vereinfachen werden wir ein 2D Problem diskutieren:



$\varphi(x,y_0) = \varphi_0(x)$

$\Uparrow$

Randbedingungen

Ladungsfreier Raum

$\Downarrow$

Laplace-gleichung

$\boxed{\nabla^2\varphi = 0}$

* Also in 2D $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \longrightarrow$ dann $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi = 0}$

* Wir machen nun ein Separationsansatz:

$$\varphi(x,y) = f(x)\,g(y)$$

Das nennt man eine Separation der Variablen

(Bemerkung: So ein Ansatz funktioniert nicht für beliebige gleichungen oder Randbedingungen. Aber für viele Probleme ist es sehr nützlich.)

* Also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi &= \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) g(y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi &= f(x)\,\frac{d^2 g}{dy^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right) g(y) + f(x)\,\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{f(x)}\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}_{\text{es hängt nur von } x \text{ ab}} = \underbrace{-\frac{1}{g(y)}\,\frac{d^2 g(y)}{dy^2}}_{\text{es hängt nur von } y \text{ ab}}$$

Die müssen für alle x,y gleich

Konstante

$\longrightarrow$ Das ist nur möglich wenn $\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2} = \alpha^2 = -\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}$

Also $\frac{d^2f}{dx^2} = -\alpha^2 f(x) \longrightarrow f(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

$\frac{d^2 g}{dy^2} = +\alpha^2 g(y) \longrightarrow g(y) = C\cosh\alpha y + D\sinh\alpha y$

* Aber $\varphi(0,y) = 0 \longrightarrow f(0) = 0 \longrightarrow A = 0$

$\varphi(x,0) = 0 \longrightarrow g(0) = 0 \longrightarrow C = 0$

Dann $\varphi(x,y) = \tilde{A}\sin\alpha x \sinh\alpha y$

Außerdem $\varphi(x_0,y) = 0 \longrightarrow \sin\alpha x_0 = 0 \longrightarrow \alpha x_0 = n\pi$

$\varphi_n(x,y) = \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{x_0}y\right)$

Die allgemeine Lösung ist also der Form

$\varphi(x,y) = \sum_n \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{x_0}y\right)$

* Wir haben noch eine letzte Randbedingung:

$\varphi(x,y_0) = \varphi_0(x)$

dann $\varphi_0(x) = \sum_n \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{x_0}y_0\right)$

$$\int_0^{x_0} dx \sin\left(\frac{n'\pi}{x_0}x\right)\varphi_0(x) = \sum_n \tilde{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0}y_0\right)\underbrace{\int_0^{x_0} dx \sin\left(\frac{n'\pi}{x_0}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{x_0}x\right)}_{\frac{x_0}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin(n'\theta)\sin(n\theta)}_{\frac{\pi}{2}\delta_{nn'}}}$$

$= \frac{x_0}{2}\tilde{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0}y_0\right)$

Also $\boxed{\tilde{A}_n = \frac{2}{x_0\sinh\left(\frac{n\pi}{x_0}y_0\right)}\int_0^{x_0} dx \sin\frac{n\pi}{x_0}x\,\varphi_0(x)}$

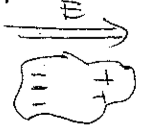
$$\Longrightarrow \boxed{\varphi(x,y) = \sum_n \tilde{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{x_0}y\right)}$$

- DIELEKTRIKA

- Bisher haben wir unsere Theorie nur im Vakuum gemacht. Nun wollen wir kurz die Theorie der Elektrostatik der Dielektrika diskutieren.

Dielektrika (Isolator) sind Substanzen die keine frei beweglichen Ladungen enthalten und aus stabilen Untereinheiten (z.B. Atomen) bestehen, deren Gesamtladungen verschwinden.

- Materie besteht größtenteils aus geladenen Teilchen (z.B. Ionen) die auf äußere Felder reagieren.



- Dies führt zu induzierten Multipolen (sie Abbildung) und damit zu Zusatzfeldern im Inneren der Materie, die sich dem äußeren überlagern.

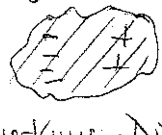
- Eine genaue mikroskopische Beschreibung des Systems ist erstmals unmöglich (zu viele Teilchen) und zweitens gar nicht nötig. Wir werden also folgendes machen. Wir spalten das gesamte Volumen in Subvolumina

$V(\vec{r}) \longrightarrow$ makroskopisch kleines Kugelvolumen mit Mittelpunkt bei $\vec{r}$, aber das mikroskopisch sehr groß ist, also enthält viele Teilchen (z.B. für $v \sim 10^{-6}\,cm^3$ gibt's $\simeq 10^{17}$ Teilchen)

(Bemerkung: $\sim 10^{23}$ Teilchen/cm^3. Ich erinnere euch an der Avogadro-Konstante)

- Nehmen wir erstmals ein Teilchen, z.B. eine Molekül. Die besteht aus Elektronen und Ionen, die als Punktladungen aufgefasst werden können.

Also die Gesamtladung des j-ten Teilchens ist

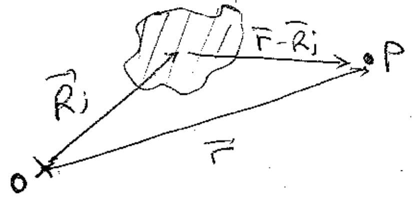


$$q_j = \sum_n^{(j)} q_n^{(j)}$$

(das gilt auch für die sich momentan im Raumbereich des j-ten Teilchens befindlichen Überschussladungen)

(Bemerkung: Die Teilchen könnten neutral sein, aber diese momentan zu finden Überschussladungen erzeugen eine Gesamtladung, die nicht Null ist.)

- Wir definieren:
  - Ladungsdichte im j-ten Teilchen: $\rho_j = \sum_n^{(j)} q_n^{(j)} \delta(\vec{r}-\vec{r}_n)$
  - Dipolmoment des j-ten Teilchens: $\vec{p}_j = \int d^3r\, \rho_j(\vec{r})\,(\vec{r}-\vec{R}_j)$



* Also das Teilchen j ist eigentlich eine Ladungsverteilung, und wir können eine Multipolentwicklung (s. 128) machen. Da die Abstände ~~zwischen~~ Teilchen >> Umfang des Teilchens dann können wir die Multipolentwicklung nach dem Dipolterm abbrechen:

$$\boxed{4\pi\varepsilon_0\, \varphi_j(\vec r) \approx \frac{q_j}{|\vec r-\vec R_j|} + \frac{\vec p_j\cdot(\vec r-\vec R_j)}{|\vec r-\vec R_j|^3}}$$

Das ist das skalare Potential erzeugt vom Teilchen j. Wichtig ist es nur daß außer der Ladung gibt es auch eine Mitwirkung des Dipolmoments.

(Bemerkung: Diese Mitwirkung des Dipolmoments kommt aus der Umverteilung der Subladungen innerhalb des Teilchens. Diese Umverteilung kommt aus der äußere $\vec E$-Felder. Dieser Punkt ist wichtig, wie wir bald sehen werden)

* Wir definieren eine effektive Ladungsdichte

$$\rho_e(\vec r) = \sum_{j=1}^{N} q_j\, \delta(\vec r-\vec R_j)$$

und eine effektive Dipoldichte

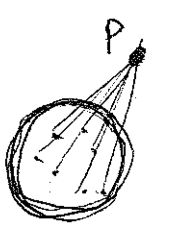
$$\vec\Pi_e(\vec r) = \sum_{j=1}^{N} \vec p_j\, \delta(\vec r-\vec R_j)$$

* Die N-Teilchen erzeugen also ein gesamtes skalares Potential

$$\varphi(\vec r) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left[\frac{\rho_e(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} + \vec\Pi_e(\vec r')\cdot\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}\right]$$

* An diesem Punkt nehmen wir ein Volumen $v(\vec r)$ (sieh unsere Diskussion oben), und machen wir ein Durchschnitt:

$$4\pi\varepsilon_0\, \overline{\varphi(\vec r)} \cong \frac{1}{v}\int_v d^3x \int d^3r' \left[\frac{\rho_e(\vec r')}{|\vec r+\vec x-\vec r'|} + \Pi_e(\vec r')\,\frac{(\vec r+\vec x-\vec r')}{|\vec r+\vec x-\vec r'|^3}\right]$$



$$= \frac{1}{v}\int_v d^3x \int d^3r'' \left[\frac{\rho_e(\vec r''+\vec x)}{|\vec r-\vec r''|} + \vec\Pi_e(\vec r''+\vec x)\cdot\frac{(\vec r-\vec r'')}{|\vec r-\vec r''|^3}\right]$$

$$= \int d^3r'' \left\{\frac{\left[\frac{1}{v}\int_v d^3x\, \rho_e(\vec r''+\vec x)\right]}{|\vec r-\vec r''|} + \left[\frac{1}{v}\int_v d^3x\, \vec\Pi_e(\vec r''+\vec x)\right]\cdot\frac{(\vec r-\vec r'')}{|\vec r-\vec r''|^3}\right\}$$

* Sei $\rho(\vec{r}) = \frac{1}{v}\int_v d^3x\, \rho_e(\vec{r}+\vec{x}) \Rightarrow$ <u>Makroskopische Ladungsdichte</u>

$\vec{\mathbb{P}}(\vec{r}) = \frac{1}{v}\int_v d^3x\, \vec{\Pi}_e(\vec{r}+\vec{x}) \longrightarrow$ <u>Makroskopische Polarisation</u>

Dann

$$4\pi\varepsilon_0 \bar{\varphi}(\vec{r}) \overset{\text{Multipolentwicklung}}{\cong} \int d^3r' \left\{ \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\right\}$$

* Sei $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\bar{\varphi}(\vec{r})$

Dann:

$$4\pi\varepsilon_0\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -4\pi\varepsilon_0 \nabla^2\bar{\varphi}(\vec{r}) = -\int d^3r' \left\{\rho(\vec{r}\,')\overbrace{\left[\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]}^{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} + \vec{P}(\vec{r}\,')\vec{\nabla}_{r'}\left[\nabla_r^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right]\right\}$$

$$= 4\pi\rho(\vec{r}) + \underbrace{4\pi\int d^3r'\, \underbrace{\vec{P}(\vec{r}\,')\underbrace{\vec{\nabla}_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}_{-\vec{\nabla}_r\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}}_{-\vec{\nabla}_r[\vec{P}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')]}}_{\underbrace{-\vec{\nabla}_r\left[\int d^3r'\,\vec{P}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]}_{-\vec{\nabla}_r\cdot\vec{P}(\vec{r})}}$$

Also $4\pi\varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) - 4\pi\vec{\nabla}_r\vec{P}(\vec{r})$

$$\boxed{\vec{\nabla}\left[\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})\right] = \rho(\vec{r})}$$

* Das führt uns direkt zu der Idee der <u>Dielektrische Verschiebung</u> : $\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})}$.

* Also <u>die Maxwell-gleichung der Elektrostatik werden nun:</u>

<u>1. gleichung</u>	$\longrightarrow$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho(\vec{r})$
<u>2. gleichung</u>	$\longrightarrow$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

* Wir können die
  Polarisationsladungsdichte $\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$
definieren.

Also $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho(\vec{r}) + \rho_P(\vec{r})\right]$ ← Polarisationsladungen

Überschussladungen

Also
$\vec{E}$ reagiert auf die tatsächliche lokale Ladungsdichte
$\vec{D}$ reagiert nur auf die Überschussladungen
Deswegen ist $\vec{E}$ die eigentliche Messgröße (und nicht $\vec{D}$).

· Wir können die Polarisation folgendes verstehen.
· $\vec{P}$ verursacht ein extra $\vec{E}_P$-Feld $\longrightarrow \vec{E}_P = -\vec{P}/\varepsilon_0$
· Die Überschussladungen verursachen ein $\vec{E}_0$-Feld

$\Big\}\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$

* Beziehung zwischen $\vec{E}$ und $\vec{P}$

* $\vec{P}$ und $\vec{E}$ sind natürlich miteinander verbunden (das ist klar weil $\vec{E}$, $\vec{P}$ verursacht).
  Man definiert den so genannten Dielektrischen Tensor γ_{ij}
solch daß: $P_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} E_j$ wobei $i,j = 1,2,3$ (also x,y,z).

* Man definiert ein isotropes Dielektrikum, als ein Dielektrikum mit $\gamma_{ij} = \gamma\,\delta_{ij} \longrightarrow P_i = \gamma E_i$. Man schreibt typischerweise:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P} = \chi_e\,\varepsilon_0\,\vec{E}\end{array}\right\}\ \text{also}\ \vec{D} = \underbrace{(1+\chi_e)}_{\varepsilon_r}\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

χ_e: dielektrische Suszeptibilität

$\varepsilon_r \rightarrow$ relative Dielektrizitätskonstante

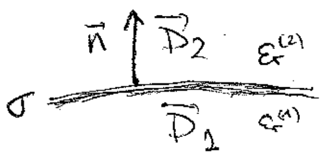
Also $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E}}$

* Bemerkung: Aufpassen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ sind parallel nur für isotropische Dielektrika

* Noch ein Paar Schlußbemerkungen über Dielektrika:

* Feldverhalten an Grenzflächen

- Wir haben gesehen, daß die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik in Dielektrika ein bisschen modifiziert werden:
  - $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$
  - $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$
- Aus unsere Diskussion der S. 117 ist es einfach zu sehen, daß an Grenzflächen:



$$\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma}$$

$$\boxed{(\vec{t}\times\vec{n})\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0}$$

(Das kommt direkt aus der modifizierten Maxwell-Gleichungen von S. 142)

* Elektrostatische Energie in einem Dielektrikum

- Man kann auch sehen (ohne Beweis), daß

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int d^3r\,\vec{E}\cdot\vec{D}}$$