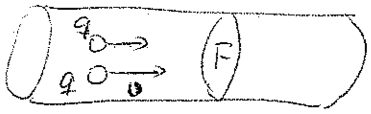
• MAGNETOSTATIK

* Bisher haben wir nur die Elektrostatik studiert. Dort waren die Ladungen in Ruhe. Wir werden nun sehen, daß wenn es eine stationäre elektrische Strom, dann gibt es die sogen. Magnetostatische Felder. Diese magnetostatische Felder werden von der Magnetostatik studiert.

* Die erste Idee die wir klar haben sollten ist die Idee von Strom.

* Nehmen wir ein Leiter, mit Leiterquerschnitt F.



- Man erzeugt eine Potentialdifferenz (also eine Spannung, siehe S. 110) zwischen den Enden der Leiters.

• Das ergibt eine geordnete Bewegung der elektrische Ladungen (mit Ladung q) in dem Leiter. Diese geordnete Bewegung vorwärts ist der Elektrische Strom.

* Die geladene Teilchen haben eine Teilchen-Dichte $n = \frac{N}{V}$, und die bewegen sich mit einer Mitteleren Geschwindigkeit v.

* Also in einem gewissen Zeitinterval dt fließt eine Ladung

$$dQ = (F v\, dt)\, n q$$

durch die Fläche F.

Bemerkung

$\equiv$ Volumen $F \cdot v dt$
Ladungsdichte = Teilchendichte × Ladung $= n \cdot q$

Also Ladungen im Volumen:
Volumen × Ladungsdichte =
$= (F \cdot v \cdot dt)\, n q$

* Man definiert die Stromstärke

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = nFvq$$

Die Einheit von Stromstärke ist das Ampere $1 A = 1\, C/s$

* Man definiete die Stromdichte als

$$j = \frac{I}{F} \quad \text{(also Strom pro Flächeneinheit)}$$

* Die Stromdichte ist eigentlich ein Vektor

$$\vec{J} = \underbrace{nq}_{\text{Ladungsdichte}} \vec{v}$$

(weil die Geschwindigkeit der Ladungen auch ein Vektor ist)

* Im allgemeinen Fall sind die Ladungsdichte und die Geschwindig-
-keit nicht homogen, und damit ist die Stromdichte ein zeitabhängiges Vektorfeld:

$$\boxed{\vec{J}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)}$$

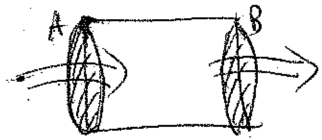
ρ → Ladungsdichte, $\vec{v}$ → Geschwindigkeitsfeld

* Die Ladungsdichte und die Stromdichte erfüllen die sogenannte

<u>Kontinuitätsgleichung</u>

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$$

Diese Gleichung hat <u>eine sehr einfache Interpretation</u>.



Nehmen wir ein Volumen. Wir integrieren die Kontinuitätsgleichung auf dem Volumen:

$$\underbrace{\int_V d^3r\,\frac{d\rho}{dt}}_{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\rho}_{\frac{d}{dt}Q}} = \underbrace{-\int_V d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\vec{J}}_{}$$

$$\downarrow \leftarrow \text{Gauß-Satz}$$

$$\underbrace{-\int_S d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}}_{-(j_B - j_A)}$$

Also $\dfrac{dQ}{dt} = j_A - j_B$

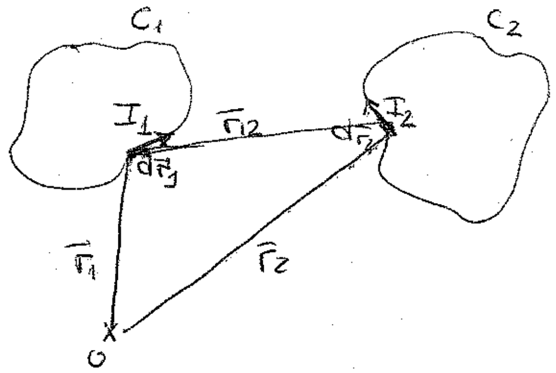
Also $\boxed{\text{Änderung der Ladung in } V = \text{Was reinkommt} - \text{Was rausgeht}}$

Logisch, <u>oder</u>?

• **Biot-Savart-Gesetz**

* Auf S. 106 haben wir das Coulomb-Gesetz eingeführt, das die Grundlage der Elektrostatik war. Diese Rolle übernimmt in der Magnetostatik das Ampère-Gesetz

· Seien 2 stromführenden Leitern (Stromfäden) mit Ströme $I_1 d\vec{r}_1$ und $I_2 d\vec{r}_2$. Die Kräfte zwischen den Leitern ist:
(Die Kraft die ② auf ① übt)



$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}}$$

$\mu_0 = 1.26 \frac{N}{A^2} \equiv$ magnetische Feldkonstante (Permeabilität des Vakuums)

* μ_0 und ε_0 (S. 107) sind miteinander verknüpft:

$$\boxed{\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}$$

$c \equiv$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

* Aus der Eigenschaften des x-Produkts:

$$d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}) = d\vec{r}_2 (d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}) - \vec{r}_{12} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)$$

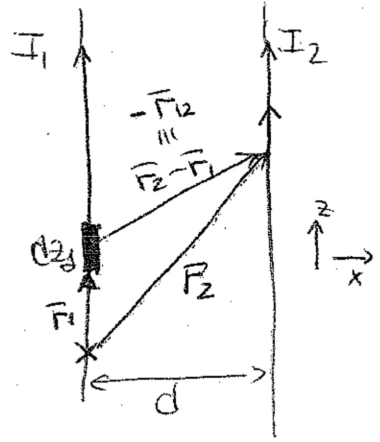
Also
$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[\oint_{C_2} d\vec{r}_2 \underbrace{\oint_{C_1} d\vec{r}_1 \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}}_{\underbrace{-\oint_{C_1} d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)}_{\underbrace{\overset{\text{Stokes}}{=} -\int_{S_1} d\vec{f}_1 \, \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r_{12}}\right)}_{0}}_{0}}} - \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \right]$$

Also $$\boxed{\vec{F}_{12} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}}$$

Es ist also klar, daß $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (also actio = reactio, s. ②)

---

* Sehen wir nun ein wichtiges Beispiel:



* Wir betrachten 2 lange, parallele, gerade Drähte mit dem Abstand d, durch die die Ströme I_1 und I_2 fließen (Bemerkung: Das ist äquivalent zu 2 Kreisen mit unendlich großen Krümmungsradius.
* Wir sind interessiert an der Kraft, die die Leitung ② auf ein infinitesimales Stück dz_1 der Leitung ① übt.

$\vec{r}_{12} = -d\,\vec{e}_x - (z_2 - z_1)\vec{e}_z$

$$d\vec{F}_{12} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} =$$

$$= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \frac{d\,\vec{e}_x + (z_2 - z_1)\vec{e}_z}{[d^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} =$$

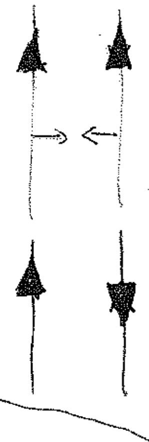
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} dz_1 (d\,\vec{e}_x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_2}{[d^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} dz_1 (d\,\vec{e}_x) \cdot \frac{1}{d^2} \underbrace{\left[\frac{z}{(d^2 + z^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{2}$$

Also $$d\vec{F}_{12} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} dz_1\, \vec{e}_x$$

Also die Kräfte pro Länge ist

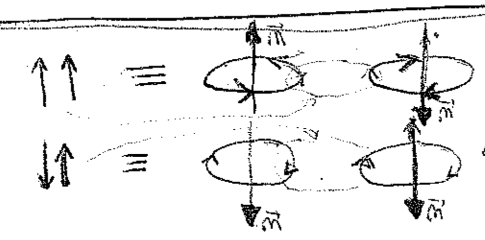
$$\boxed{\vec{f}_{12} = \frac{d\vec{F}_{12}}{dz_1} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}\, \vec{e}_x}$$



Anziehende Kraft für gleichgerichtete Ströme

Abstoßende Kraft für ~~ent~~ entgegen-gerichtete Ströme.

Bemerkung: $\uparrow\uparrow \equiv$



$\downarrow\uparrow \equiv$

← 2 unendliche Kreisen

$\vec{m}$ = Dipolmoment wird auf S. 156 definiert

* Wir kehren zurück an der Form von $\vec{F}_{12}$ von S. 147:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{r}_1 \times \frac{(d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$= I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \left[\mu_0 \frac{I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right] = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

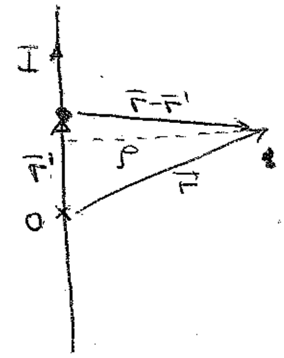
* Das bringt uns direkt zu <u>der Idee der magnetischen Induktion</u>:

$$\boxed{\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \mu_0 \frac{I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}} \equiv$$ magnetische Induktion die der Strom I_2 auf C_2 erzeugt (auf der Stelle $\vec{r}_1$).

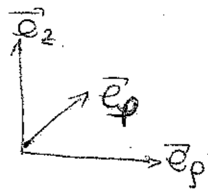
(* <u>Bemerkung</u>: Die magnetische Induktion ist also auch ein <u>Vektorfeld</u>)

Die Magnetische Induktion hat Einheiten <u>1 Tesla</u> $= 1 \, N/Am$

* <u>Beispiel</u>: Sei einer gerader Leiter:



$$\cdot \; \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



· In Zylinderkoordinaten:

$\vec{r}' = z' \vec{e}_z \longrightarrow d\vec{r}' = dz' \vec{e}_z$

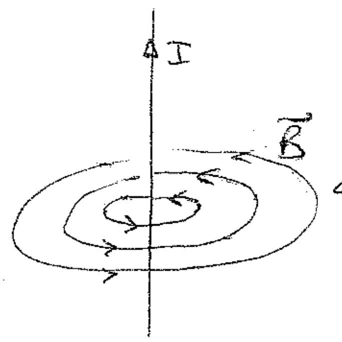
$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \vec{e}_\rho + (z - z') \vec{e}_z$

Also $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \rho \, dz' \, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \rho \, dz' \, \vec{e}_\varphi$

Ähnlich wie auf S. 148

· Also $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \, dz' \, \vec{e}_\varphi}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \rho \, \vec{e}_\varphi \frac{2}{\rho^2}$$

Also $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi}$$



$\vec{B}$-Feldlinien.

* Die Formel für $\vec{B}$ auf Seite 149 kann nun auf beliebige Stromdichten $\vec{J}(\vec{r})$ erweitert werden (ähnlich wie auf S. 109 in dem Übergang von Punktladungen auf Ladungsverteilungen):

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \; \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}} \equiv \text{BIOT-SAVART-GESETZ}$$

* Auf S. 109 haben wir das $\vec{E}$-Feld erzeugt von einer Ladungsverteilung hergeleitet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \; \rho(\vec{r}\,') \; \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Also es gibt eine ziemlich große Analogie zwischen Elektrostatik und Magnetostatik, aber nun anstatt $\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')$ hat man $\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')$ (Es gibt andere wichtige Differenzen, wie wir sofort sehen werden.)

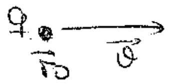
* Also die Kraft, die ein $\vec{B}$-Feld auf einer Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ übt, ist:

$$\boxed{\vec{F} = \int \left[\vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right] d^3r}$$

(Bemerkung: Das verallgemeinert unsere Formel auf S. 149)

---

* Beispiel: Nehmen wir eine Punktladung q, die sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt.



$$\vec{j}(\vec{r}) = q\,\vec{v}(\vec{r}_0)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

Also $\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v}(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}_0)}$ ⟷ Das ist die sogenannte Lorentz-Kraft

---

* Maxwell - Gleichungen

* Wir werden nun das Biot-Savart-Gesetz etwa umschreiben:

$$\vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\vec{\nabla}_r \times \vec{J}(\vec{r}\,')}_{\substack{0 \\ (\vec{J}(\vec{r}\,')\text{ hängt nicht von }\vec{r}\text{ ab})}} - \vec{J}(\vec{r}\,') \times \underbrace{\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\frac{-(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

Also
$$\vec{\nabla}_r \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = j(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Also
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\ \vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r\ \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

Also $\vec{B} = \vec{\nabla}_r \times (\text{Vektor}) \longrightarrow \vec{\nabla}_r \cdot \vec{B} = \vec{\nabla}_r \cdot (\vec{\nabla}_r \times \text{Vektor}) = 0$

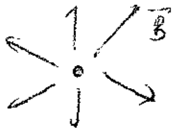
Also $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$

Also $\boxed{\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\ d^3r = \oint_{S(V)} \vec{B}\cdot d\vec{f} = 0}$ ← Integrale Form.

Der Fluss durch $S(V)$ für ein beliebiges Volumen V ist Null.
Das ist Ausdruck der Tatsache, daß es keine magnetische Ladungen gibt (es gibt keine magnetische Monopole!)

* Das ist eine entscheidende Differenz zwischen Elektro- und Magneto-statik. Es gibt zwar freie elektrische Ladungen (und deswegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$) aber es gibt keine freie magnetische Ladung (und deswegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$).

(Bemerkung: Also es gibt nichts wie



für das $\vec{B}$ feld

Wir werden gleich sehen, daß die Grundeinheit des Magnetismus ist eigentlich der Dipol. Also es gibt immer Nord und Südpol in einem Magnet!!)

* Mathematische Bemerkung

. Wir werden nun die folgende Eigenschaft benutzen.
Sei $\vec{a}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Wir können immer $\vec{a}(\vec{r})$ in der Form

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \vec{a}_t(\vec{r})$$

zerlegen, wobei $\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{a}_\ell = 0}_{\text{Wirbelfreies Feld}}$ und $\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_t = 0}_{\text{Quellfreies Feld}}$

Also
$$\vec{a}_\ell = \vec{\nabla}\alpha(\vec{r})$$
$$\vec{a}_t = \vec{\nabla}\times\vec{\beta}(\vec{r})$$

wobei
$$\alpha(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
$$\vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}\times\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

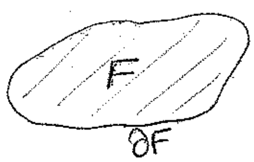
---

* Da $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$

Aber auch (aus S. 151) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$

Also $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$

* Wenn wir auf eine Kurve integrieren



$$\oint_{\partial F}\vec{B}\cdot d\vec{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F (\vec{\nabla}\times\vec{B})\, d\vec{f} = \mu_0\int_F \vec{J}\cdot d\vec{f} = \mu_0 I$$

(Bemerkung: Ich erinnere euch, daß $j = I/F$)

Also $\boxed{\oint_{\partial F}\vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I} \longrightarrow$ Ampère-Durchflutungsgesetz

. Dies Gesetz spielt eine ähnliche Rolle wie das Gauß-Satz für die Elektrostatik. Wenn wir den Strom durch eine Fläche kennen, kennen wir $\vec{B}$ am Rand der Fläche.

• VEKTORPOTENTIAL

* Wir haben gesehen, daß $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

* Das bedeutet (sieh S. 152) daß:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{A} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$\equiv$ Das ist das sogenannte Vektorpotential $\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}$

* Das Vektorpotential ist durch den obigen Ansatz allerdings nicht eindeutig bestimmt.

Die physikalisch relevante Feldgröße ist $\vec{B}$ und nicht $\vec{A}$.

Man kann eine Transformation:

$$\vec{A} \Longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

wobei $\chi \equiv$ beliebige skalare Funktion.

Dann $\vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\chi)}_{0}$

Also $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}'$

* Das ist ein Beispiel einer sogen. Eichtransformation.

(Bemerkung: Eichtransformationen findet man auch zB in der Lagrange-Mechanik, sieh S. 75.)

* Häufig wird die sogen. Coulomb-Eichung $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0}$ verwendet.

Dann $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A}$

Also $\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$

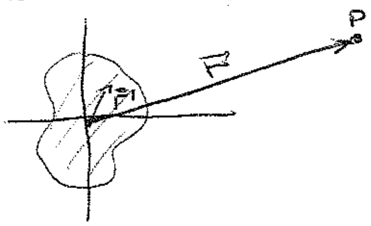
* Diese Gleichung spielt eine ähnliche Rolle in der Magnetostatik wie die Poisson-Gleichung in der Elektrostatik.
Also man kennt $\vec{J}(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$, und Randbedingungen auf $S(V)$ und man will $\vec{A}(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$.

---

* MULTIPOLENTWICKLUNG

* Auf S. 128 haben wir die Multipolentwicklung des $\vec{E}$-Feldes einer Ladungsverteilung eingeführt. Wir werden nun etwas ähnliches für den Potentialvektor $\vec{A}$ einer Stromdichtverteilung machen.

* Sei $\vec{J}(\vec{r})$ eine Stromdichtverteilung, die auf einem endlichen Raumbereich begrenzt ist. Diese Stromdichte verursacht eine magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$. Wir sind interessiert an Punkte P, solch daß $\vec{r}$ ist viel größer als die Ausdehnung des Gebietes, wo $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$.



* Wir haben gesehen (S. 133) daß $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
Wie für die Multipolentwicklung des skalaren Potentials, wir Taylor-entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$

Also:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}')}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}')}_{\text{Dipol}} + \dots$$

* Wir werden nun sehen, daß der Monopolglied eigentlich Null ist.

* Dafür brauchen wir erstmal folgendes zu beweisen.
Seien $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ skalare Felder. Sei $\vec{J}(\vec{r})$ die Stromdichte eines magnetostatischen Systems (in Magnetostatik $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{d\rho(\vec{r})}{dt} \underset{\text{Magnetostatik}}{=} 0$)

Dann:

$$\int d^3r \, [f(\vec{r})\, \vec{J}\cdot\vec{\nabla}g + g(\vec{r})\, \vec{J}\cdot\vec{\nabla}f] = 0$$

Das ist sehr einfach zu beweisen:

$$\vec{\nabla}[gf\vec{J}] = (gf)\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\vec{J}}}_{0} + \vec{J}\cdot\vec{\nabla}(gf) = f(\vec{r})\vec{J}\cdot\vec{\nabla}g + g(\vec{r})\,\vec{J}\cdot\vec{\nabla}f$$

Also

$$\int d^3r\, [f\,\vec{J}\cdot\vec{\nabla}g + g\,\vec{J}\cdot\vec{\nabla}f] = \int_{V=\infty} \vec{\nabla}(gf\vec{J})\, d^3r \overset{\text{gauß-Satz}}{=} \int_{S(V)\to\infty} d\vec{f}\,(gf\vec{J}) \underset{\vec{J}=0 \text{ in } \infty}{=} 0$$

---

* Dieser Ausdruck ist sehr nützlich.
  - Sei $f = 1$, und $g = x, y$ oder z.

Dann
$$\left.\begin{aligned} \int d^3r\, j_x &= 0 \\ \int d^3r\, j_y &= 0 \\ \int d^3r\, j_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') = 0}$$

Also der Monopolterm verschwindet!

* Das ist eine extrem wichtige Differenz zwischen Elektrostatik und Magnetostatik. Es gibt elektrische Ladungen, aber keine magnetische Ladung! (sowas haben wir schon auf S. 151 diskutiert)

* Quellen wir nun den Dipolterm: $A(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int d^3r' (\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')$
  - Wir nehmen nun oben: $f = x_i$, $g = x_j$ wobei $x_i, x_j = \{x, y, z\}$

$$0 = \int d^3r\,[x_i j_j + x_j j_i] \longrightarrow \int d^3r\, x_j j_i = -\int d^3r\, x_i j_j$$

- Also $\int d^3r' (\vec{r}\cdot\vec{r}') j_i(\vec{r}') = \sum_j \int d^3r' x_j x'_j j_i$

$$= \frac{1}{2}\sum_j x_j \left\{ \int d^3r' x'_j j_i + \int d^3r' x'_j j_i \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j x_j \left\{ \int d^3r' x'_j j_i - \int d^3r' x'_i j_j \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j x_j \int d^3r' (x'_j j_i - x'_i j_j) = -\frac{1}{2}\sum_{jk} x_j \int d^3r' (\vec{r}'\times\vec{j})_k \varepsilon_{ijk}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{r}\times\left[\int d^3r' (\vec{r}'\times\vec{j})\right]$$

Wir definieren nun $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')}$ $\equiv$ Magnetisches Moment $\vec{m}$

(Spielt eine ähnliche Rolle wie das Dipolmoment $\vec{p}$ für die Elektrostatik).

- Dann $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$ → Vektorpotential bis zum Dipolterm.

- Wir werden uns hier auf diese Ordnung beschränken.
- Nun kennen wir $\vec{A}$. Wir wollen aber $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\vec{\nabla}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{\nabla}\varphi$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] =$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r^3}\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r}) - (\vec{m}\times\vec{r})\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r^3}\left[(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{m} - (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} + \vec{m}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{m})\right] + \frac{3}{r^5}(\vec{m}\times\vec{r})\times\vec{r}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{1}{r^3}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} + \frac{1}{r^3}\vec{m}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - \frac{3}{r^5}\left[\vec{m}r^2 - \vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})\right]\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5}\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})\right]$$

Also $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]}$

Das hat genau dieselbe Form wie das $\vec{E}$-Feld eines elektrostatischen Dipols (s. 125)

* Also $\vec{B}(\vec{r})$ induziert von der Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ verhält sich (weit entfernt von $\vec{j}$) wie ein Dipolfeld, mit Dipolmoment $\vec{m}$.

Also, die Grundeinheit des Magnetismus ist nicht irgendeine Elementarladung (kein Monopol), sondern der magnetische Dipol $\vec{m}$.

• Gyromagnetisches Verhältnis: Beziehung zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls

• Nehmen wir nun eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an, die durch eine Anzahl von Ladungen (mit Ladung q) hervorgerufen wird. Die i-te Ladung bewegt sich zur Zeit t am Ort $\vec{R}_i(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$.

Dann $\vec{j}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \, \delta(\vec{r} - \vec{R}_i)$

Also der magnetische Moment dieser Stromdichte ist:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \, [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})] =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \vec{r} \times \left[q \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \, \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) \right]$$

$$= \frac{q}{2} \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \times \vec{v}_i \underset{\uparrow}{=} \frac{q}{2M} \left[\sum_{i=1}^{N} M \vec{R}_i \times \vec{v}_i \right] \overset{(s. ⑧)}{=} \frac{q}{2M} \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i$$

M = Masse des Teilchen (alle haben dieselbe Masse)

Drehimpuls des i-ten Teilchens

• Also $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i$ = Gesamtdrehimpuls des Ladungssystems

Also es gibt eine Beziehung zwischen magnetischem Moment und Gesamtdrehimpuls der Ladungen:

$$\vec{m} = \underbrace{\left(\frac{q}{2M}\right)}\vec{L}$$

↳ Das ist das sogen. gyromagnetische Verhältnis.

* Die Idee, daß ein Ladungssystem mit Drehimpuls ein magnetisches Moment verursacht, ist extrem wichtig! Diese Idee bleibt

bis in der <u>Quantenmechanik</u> gültig!
In der Quantenmechanik wird Ihr lernen, daß assoziiert mit dem <u>Bahndrehimpuls</u> (und auch dem sogen. <u>Spin</u>) des Elektrons gibt es ein magnetischer Moment.

- <u>Kraft auf einem magnetischen Dipol. Potentielle Energie</u>

Auf S. 150 haben wir gesehen, daß ein $\vec{B}$-Feld übt eine Kraft

$$\vec{F} = \int [\vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]\, d^3r$$

auf ~~einem~~ Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$. (um $\vec{r}=0$)

- Sagen wir nun, daß $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ nur auf einem kleinen Gebiet; Klein genug so daß $\vec{B}(\vec{r})$ auf diesem Gebiet sich nur wenig ändert.

Wir Taylor-entwicklen:

$$\vec{B}(\vec{r}) \simeq \vec{B}(0) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{B}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

Dann

$$\vec{F} \cong \underbrace{\left[\int \vec{J}(\vec{r})\, d^3r\right]}_{\overset{\text{S. 155}}{=}\,0} \times \vec{B}(0) + \int [\vec{J}(\vec{r}) \times (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(0)]\, d^3r + \dots$$

Also die i-Komponente der Kraft ist

$$F_i \simeq -\int d^3r\, \left[(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(0) \times \vec{J}(\vec{r})\right]_i$$

$$= -\sum_{j,k} \int d^3r\, \left[\varepsilon_{ijk} \left[(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})B_j(0)\right] J_k(\vec{r})\right]$$

$$= -\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left[\int d^3r\, \vec{r}\, J_k(\vec{r})\right]\cdot(\vec{\nabla}B_j(0)) \stackrel{!}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left\{(\vec{\nabla}B_j(0)) \times \left[\int d^3r\, \vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\right]\right\}_k$$

$$= -\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left\{\left[\frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\right] \times (\vec{\nabla}B_j(0))\right\}_k =$$

$$\int d^3r'\, (\underset{\text{Beliebig } \vec{a}}{\vec{a}}\cdot\vec{r}')\,\vec{J}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}\left\{\vec{a} \times \int d^3r'\, (\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}'))\right\}$$

hier $\vec{a} = \vec{\nabla}B_j(0)$

$$\int d^3r\, (\vec{\nabla}B_j(0))\cdot\vec{r}\, J_k(\vec{r}) =$$

$$= \left[\int d^3r\, ((\vec{\nabla}B_j)\cdot\vec{r})\,\vec{J}(\vec{r})\right]_k =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{(\vec{\nabla}B_j)\times\int d^3r\, (\vec{r}\times\vec{J}(\vec{r}))\right\}_k$$

$$= -\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left[\vec{m} \times \vec{\nabla} B_j(0)\right]_k = -\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left[\vec{m} \times \vec{\nabla}\right]_k B_j(0)$$

$$= -\sum_{j,k} \varepsilon_{ikj} \,(\vec{m} \times \vec{\nabla})_j\, B_k(0) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, (\vec{m} \times \vec{\nabla})_j\, B_k(0) = \left[(\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}(0)\right]_i$$

Also $\vec{F} \simeq (\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}(0)$

$$= -\vec{m}\,\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0))}_{\overset{\text{S. 151}}{=}\,0} + \vec{\nabla}\left[\vec{m} \cdot \vec{B}(0)\right]$$

Also $\boxed{\vec{F} \simeq \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}(0))}$

* ganz klar ist diese Kraft konservativ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, wobei dieser Ausdruck eine <u>potentielle Energie</u> V definiert:

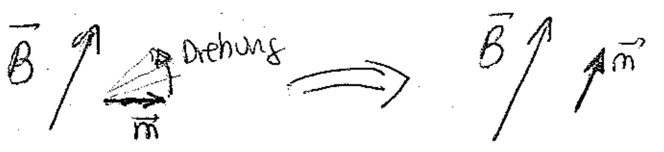
$$\boxed{V = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

(<u>Bemerkung</u>: in der Elektrostatik war es irgendwie ähnlich (S. 126). Da hatten wir $V = -\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})$ für den elektrischen Dipol $\vec{p}$).

* Also nun haben wir die potentielle Energie, die ein $\vec{B}$-Feld auf einen Dipol $\vec{m}$ verursacht.

Ganz klar <u>minimiert der Dipol die potentielle Energie wenn $\vec{m}$ parallel zu $\vec{B}$ ist</u>. Also ganz genau wie auf S. 120 mit dem elektrischen Dipol $\vec{p}$ und dem $\vec{E}$-Feld.

(<u>Bemerkung</u>: Auch wie auf S. 126 können wir finden, daß der <u>Drehmoment</u> $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \simeq \vec{m} \times \vec{B}(0)$. Für die Elektrostatik hatten wir $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. Also $\vec{M} = 0$ nur wenn $\vec{m}$ parallel zu $\vec{B}$ ist.



)

- *Magnetostatik in der Materie*

- Bisher haben wir nur Stromdichten $\vec{j}(\vec{r})$ im Vakuum studiert. Wenn wir die Magnetostatik in der Materie untersuchen wollen, ist es ein bisschen komplizierter. Die Elektronen der Materie bilden komplizierte mikroskopische Ströme, die einen Beitrag zur $\vec{B}$ liefern. Wie für die Elektrostatik der Dielektrika (S. 140) ist eine genaue mikroskopische Diskussion unmöglich, und deswegen muß man statistisch handeln.

- Nun haben wir zwei Sorten von Ströme:
  - * Freie ($\vec{j}_f$): Beitrag durch freie Ladungen
  - * Gebundener Strom: verursacht von gebundenen Ladungen die auf Felder reagieren.
    - * Ein Teil davon kommt aus der Zeitabhängigkeit der Polarisation (S. 142) des Mediums: $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Aber das ist Null in der Magnetostatik
    - * Ein anderes Teil kommt aus der sogen. Magnetisierung, die eine ähnliche Rolle wie die Polarisation der Elektrostatik jetzt in der Magnetostatik spielt.

- Die Magnetisierung resultiert aus den Bewegungen der Atomelektronen um die Kerne. Diese Bewegungen erzeugen Mikroströme, die kleinen magnetische Dipolen darstellen. Diese Dipole werden vom äußeren Feld orientiert, und erzeugen selbst ein Zusatzfeld.

Wir charakterisieren die Magnetisierung des Mediums durch einen Vektor $\vec{M}$. Das Zusatzfeld stellen wir uns durch eine Magnetisierungsstromdichte $\vec{j}_{mag} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ (Bemerkung: Die Magnetisierung $\vec{M}$ ist das verursachte mittelbar magnetisches Moment pro Volumen)

* Damit (und ohne mehrere Rechnung zu machen) handeln wir wie für die Elektrostatik, und finden wir eine makroskopische Maxwell-Gleichung für die Materie:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \underbrace{\mu_0 \vec{J}_f}_{\text{Freier Strom}} + \underbrace{\mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{\text{Zeitabhängigkeit von } \vec{P} \text{ (Null in der Magnetostatik)}} + \underbrace{\mu_0 \vec{\nabla}\times\vec{M}}_{\text{Magnetisierung}}$$

* Also in der Magnetostatik

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{J}_f$$

Wir führen nun eine neue Feldgröße ein:

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}} \longrightarrow \underline{\text{Magnetfeld}}$$

(Die Einheiten von $\vec{H}$ (und auch von $\vec{M}$) ist A/m)

Also $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f}$ (von nun an werden wir $\vec{J} = \vec{J}_f$ annehmen)

$\vec{H}$ ist also nun mit dem freien Strom verknüpft
$\vec{B}$ ist mit dem tatsächlichen Strom verknüpft

Bemerkung: wie auf S. 152 $\oint_{\partial F} \vec{H}\cdot d\vec{r} = I$ (Stokes-Satz)

* Also die Idee ist ganz ähnlich wie für den Verschiebungsvektor $\vec{D}$ und das $\vec{E}$-Feld in der Elektrostatik der Dielektrika.

* In der Elektrostatik hatten wir eine Beziehung zwischen Polarisation ($\vec{P}$) und $\vec{E}$-Feld, und zwar durch den dielektrischen Tensor ($\hat{\gamma}$) (sieh S. 143). Nun gibt es eine ähnliche Beziehung zwischen Magnetisierung ($\vec{M}$) und Magnetfeld ($\vec{H}$): $\vec{M} = \hat{\chi}\vec{H}$.

Für isotropen Media: $\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$, wobei

$$\boxed{\chi_m \equiv \text{magnetische Suszeptibilität}}$$

* Also $\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = \mu_0 \underbrace{(1+\chi_m)}_{\mu_r \,\equiv\, \text{relative Permeabilität}} \vec{H}}$

Im Vakuum $\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}}$

• FELDVERHALTEN AN GRENZFLÄCHEN

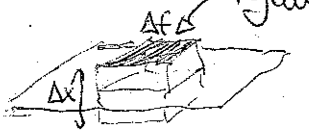
• Auf S. 117 haben wir studiert, was passiert mit dem $\vec{E}$-Feld an Grenzflächen. Wir können etwas ähnliches machen, aber diesmal mit $\vec{B}$ und $\vec{H}$.

* Die Maxwell-gleichungen der Magnetostatik sind

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (\text{S. } 151)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \qquad (\text{S. } 161)$$

* Wie für unsere Diskussion der Elektrostatik, benutzen wir den Gauß- und Stokes-Satz.



Gauß-Kästchen (wie auf S. 117)

$$0 = \int_{\Delta V} d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß-} \\ \text{-Satz}}}{=} \int_{S(\Delta V)} d\vec{f}\cdot\vec{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta x \to 0}}{=} \Delta f\, \vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$$

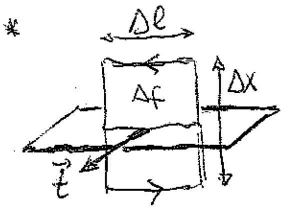
Dann $\boxed{\vec{B}_2\cdot\vec{n} = \vec{B}_1\cdot\vec{n}}$

Die Normalkomponente der magnetischen Induktion ist an der Grenzfläche stetig.

Bei unterschiedlichen Permeabilitäten $\mu_r^{(1)}, \mu_r^{(2)}$

$$\vec{n}\cdot\vec{H}_2 = (\mu_0\mu_r^{(2)})^{-1}(\vec{n}\cdot\vec{B}_2) = (\mu_0\mu_r^{(2)})^{-1}(\vec{n}\cdot\vec{B}_1) = (\mu_r^{(1)}/\mu_r^{(2)})\,(\vec{n}\cdot\vec{H}_1)$$

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{H}_2 = \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}}\, \vec{n}\cdot\vec{H}_1} \longrightarrow \vec{n}\cdot\vec{H} \text{ ist also nicht immer stetig}$$



$\vec{J}_F \equiv$ Flächenstromdichte

$$\int_{\Delta f} d\vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \int_{\Delta f} d\vec{f}\cdot\vec{J} \underset{}{\overset{\Delta x \to 0}{=}} (\vec{J}_F\cdot\vec{t})\,\Delta l$$

$\parallel \leftarrow$ Stokes-Satz

$$\oint_C d\vec{s}\cdot\vec{H} \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta x \to 0}}{=} \Delta l\, (\vec{t}\times\vec{n})\cdot(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

$$\boxed{(\vec{t}\times\vec{n})\cdot(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_F\cdot\vec{t}}$$

Nur wenn $\vec{J}_F\cdot\vec{t} = 0$ ist die tangentielle Komponente von $\vec{H}$ stetig.

Aber selbst für $\vec{J}_F\cdot\vec{t} = 0$ ist $\vec{B}$ nicht unbedingt stetig da

$$\boxed{\vec{B}_2\cdot(\vec{t}\times\vec{n}) = \left(\frac{\mu_r^{(2)}}{\mu_r^{(1)}}\right)\vec{B}_1\cdot(\vec{t}\times\vec{n}) \qquad (\text{wenn } \vec{J}_F\cdot\vec{t} = 0)}$$

• Damit ist unsere Diskussion der Magnetostatik am Ende. Wie Ihr sieht, Elektrostatik und Magnetostatik laufen irgendwie parallel zueinander. Sofort werden wir $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einer einzigen Theorie zusammen beschreiben.