• ELEKTRODYNAMIK

* Bisher haben wir die Elektrostatik und die Magnetostatik studiert. In der Elektrostatik hatten wir elektrische Felder, und die entsprechenden Maxwell-gleichungen waren (S. 142):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho(\vec{r})$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

In der Magnetostatik hatten wir magnetische Felder, und die entsprechenden Maxwell-gleichungen waren (S. 161):

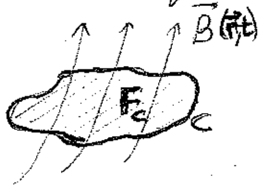
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}(\vec{r})$$

* Also, elektrische und magnetische Felder würden unabhängig eingeführt. Wir werden sofort sehen, daß für zeitabhängigen (also nicht-statischen) die elektrische und magnetische Problemen nicht mehr unabhängig voneinander sind, sondern $\vec{E}$ Felder verursacht $\vec{B}$ und umgekehrt. Wir reden nun von elektromagnetischen Feldern.

---

* Faraday-Induktionsgesetz

* Am Anfang des XIX-Jahrhunderts beobachtete Faraday, daß zeitabhängige Magnetfelden erzeugen ein Strom in einen Leiterkreis.



* Mathematisch wird diese experimentelle Beobachtung vom Faraday-Induktionsgesetz ausgedrückt:

$$\underbrace{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r}}_{\text{sogen. Elektromotorische Kraft}} = -K \frac{d}{dt}\underbrace{\int_{F_c} \vec{B}\cdot d\vec{f}}_{\text{Magnetischer Fluss durch die Fläche } F_c}$$

Bemerkung: Wenn es ein Strom (I) gibt, d.h. dass es ein Spannung (U) gibt (Ohm-Gesetz) $U = I \cdot$ WIDERSTAND. Eine Spannung bedeutet ein E-Feld (Seite 110).

sogen. Elektromotorische Kraft (diese Integral war Null in der Elektrostatik!)

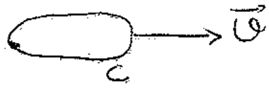
K: Proportionalitätskonstante

Magnetischer Fluss durch die Fläche F_c

* Also es gibt doch eine Abhängigkeit zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aber die taucht nur auf, wenn der magnetische Fluss zeitabhängig ist.

* Wir werden sofort die Konstante k festlegen.

Wir werden erstmals einen ~~Leiter~~kreis C annehmen, der mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ sich im Laborsystem bewegt. Sei $\vec{E}$ das Feld bei $\vec{r}$ im mitbewegten Bezugssystem des Leiterkreises.



Also im mitbewegten System eine einzige Ladung q (in Ruhe im mitbewegten System) erfährt eine Kraft:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

(das ist nur ein elektrostatisches Problem, S. 108)

Im Laborsystem, stellt die Punktladung q ein Strom dar,

$$\vec{J}(\vec{r}) = q\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{R}_0)$$

und deswegen übt ~~eine~~ eine magnetische Induktion eine magnetische Kraft (S. 150): $q\vec{v}\times\vec{B}$

Galileische Invarianz fordert, daß die Kraft $\overset{\text{Ruhe}}{\vec{F}} = \overset{\text{Labor}}{\vec{F}'}$.

Verallgemeinerte Form der Lorentz-Kraft

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}' &= q\cdot(\vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B}) \\ \vec{F} &= q\vec{E} \end{aligned}\right\}$$ das definiert das $\vec{E}'$-Feld im Laborsystem

Also $\boxed{\vec{E} = \vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B}}$

~~Diese Transformation~~ Diese Beziehung ist sehr wichtig, da sie deutlich die Verknüpfung zwischen magnetischen und elektrischen Feldern macht! (Irgendwie ob wir eine Ladung oder ein Strom haben ist nur eine Frage der Perspektive!!)

(Bemerkung: man fordert hier Galilei-Invarianz. Das ist nur gültig für $v \ll$ Lichtgeschwindigkeit)

* Wir bleiben nun bei dem bewegenden Kreis C, und wir kehren am ~~Faraday~~-Induktionsgesetz zurück

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -k \frac{d}{dt}\int_{F_C} \vec{B}\cdot d\vec{f}$$

wobei $\vec{E}$ das Feld in mitbewegten Bezugssystem ist.

* Mit dem Kettenregel:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

(Ich erinnere euch an unserer Diskussion der inertialen Systemen, S. 11)

Andeerseits

$\vec{v}$ ist Konstant, $\vec{\nabla}\vec{B}=0$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

Also $\frac{d}{dt}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})$

Stokes-Satz

$$\frac{d}{dt}\int_{F_C}\vec{B}\cdot d\vec{f} = \int_{F_C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} + \int_{F_C}[\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})]\cdot d\vec{f} = \int_{F_C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} + \oint_C d\vec{r}\cdot(\vec{B}\times\vec{v})$$

Dann $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -k\left\{\int_{F_C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} - \oint_{F_C} d\vec{r}(\vec{v}\times\vec{B})\right\}$

Also $\oint_C (\vec{E} - k\vec{v}\times\vec{B})d\vec{r} = -k\int_{F_C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f}$

* Wenn der Leiter-Kreis sich nicht bewegt ($\vec{v}=0$) sind Labor- und Ruhesystem gleich. In diesem Fall $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, und damit

$$\oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{r} = -k\int_{F_C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f}$$

Damit $\oint_C (\vec{E} - k\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r} = \oint_C \vec{E}'\,d\vec{r}$

· Das gilt für alle beliebige Leiter C, also

$$\vec{E} = \vec{E}' + k\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Aber von unserer Diskussion auf S. 164 hatten wir

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}$$

also $\boxed{k = 1}$

· Also die endgültige Form des Faraday-Induktionsgesetzes ist:

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int_{F_C} \vec{B} \cdot d\vec{f}}$$

Stokes $\longrightarrow$ $\parallel$

$$\int_{F_C} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{f}$$

Wir nehmen nun als Bezugssystem das Ruhesystem des Leiters (also $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} = \dot{B}$)

Also $\int_{F_C} d\vec{f} \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] = 0$

* Das gilt für alle C, also

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \longrightarrow \text{differentielle Form des Induktionsgesetzes}$$

* Ich erinnere euch, daß in der Elektrostatik (S. 115) wir hatten $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Wir bekommen das noch mal wenn $\partial \vec{B}/\partial t = 0$.

---

* Verschiebungsstrom

· In der Magnetostatik hatten wir das Ampère-Durchflutungsgesetz $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ (S. 161). Diese Beziehung ist für nicht-stationäre Probleme nicht mehr gültig. Das ist einfach zu verstehen:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}.$$

Aber wegen der Kontinuitätsgleichung wissen wir, daß (S. 146): $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

* Also die Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}$ muss ergänzt werden (<u>Maxwellsche Ergänzung</u>)

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\vec{j}_0$$

wobei $0=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

* Aus der Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho(\vec{r}) \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}=\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{D}} \longrightarrow \vec{j}_0=\dot{\vec{D}} \equiv \underline{\text{Verschiebungs-Strom}}$$

$(\dot{\vec{D}}\equiv\partial\vec{D}/\partial t)$

Also $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\dot{\vec{D}}}$

(<u>Bemerkung</u>: diese Verschiebung kommt mikroskopisch aus der Zeitabhängigkeit der Polarisation $(\partial\vec{P}/\partial t\neq 0)$, die einen zusätzliche Strom verursacht (S. 160))

---

* Nun haben wir <u>die endgültige Form der Maxwell-Gleichungen</u>

Homogene Gleichungen:
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \longrightarrow \underline{\text{Keine magnetische Monopole}}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\dot{\vec{B}}=0 \longrightarrow \underline{\text{Faraday-Induktion}}$$

Inhomogene Gleichungen:
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \longrightarrow \underline{\text{Coulomb-Gesetz}}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\dot{\vec{D}}=\vec{j} \longrightarrow \underline{\text{Ampère-Gesetz}}\ \text{(mit Verschiebungsstrom)}$$

Materialgleichungen (S. 143 und S. 161):
$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \xrightarrow[\text{Media}]{\text{isotropische}} \mu_0\mu_r\vec{H}$$
$$\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P} \xrightarrow[\text{Media}]{\text{isotropische}} \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$$

* Aus diese Gleichung kommt den gesamten Elektromagnetismus. Die vereinigen die Elektrizität und den Magnetismus, und die sind deswegen einige der <u>wichtigsten Gleichungen der Physik</u> überhaupt!

* Vektor- und Skalarpotential

* In unserer Diskussion der Elektrostatik haben wir schon die Idee von Skalarpotential ($\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$) getroffen (S. 109), genauso haben wir die Idee von Vektorpotential ($\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$) in unserer Diskussion des Magnetostatik getroffen (S. 153). Wir werden nun diese Idee für die Elektrodynamik verallgemeinern.

* Die homogene Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ ist trivialerweise gelöst, wenn wir den Vektorpotential $\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}$ einführen (da $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$).

Nehmen wir nun die 2. homogene Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\dot{\vec{B}}=0$.

Dann $\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\dot{\vec{A}})=0$

(Ich erinnere euch, daß $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi)=0$)

Also $\boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)-\dot{\vec{A}}(\vec{r},t)}$

* Ganz klar, wenn $\dot{\vec{A}}=0 \rightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$ und wir bekommen die elektrostatische Definition des Skalarpotentials.

* Wie für unsere Diskussion der Magnetostatik (S. 153) gibt es eine gewisse Freiheit bei der Wahl von $\vec{A}$.

<u>Eichtransformation</u>: $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)$ wobei $\chi(\vec{r},t)$ ist eine beliebige skalare Funktion

Ganz klar $\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

Aber $\vec{E}$ muss auch erhalten werden, d.h. daß $\varphi(\vec{r},t)$ muss auch mittransformiert werden

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dot{\vec{A}} \Longrightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi'-\dot{\vec{A}}'=-\vec{\nabla}\varphi'-\dot{\vec{A}}-\vec{\nabla}\dot{\chi}$$

Also $\vec{\nabla}\varphi=\vec{\nabla}\varphi'+\vec{\nabla}\dot{\chi} \longrightarrow \varphi'(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r},t)-\dot{\chi}(\vec{r},t)$

* Also, die gesamte <u>Eichtransformation in der Elektrodynamik</u> ist

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A}'(\vec{r},t) &= \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)\\ \varphi'(\vec{r},t) &= \varphi(\vec{r},t) - \dot{\chi}(\vec{r},t)\end{aligned}}$$

So eine Transformation erhaltet $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die die physikalisch bedeutende Größe sind.

* Also nun haben wir $\begin{cases}\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}\end{cases}$

und wir stecken diese Ausdrücke in den inhomogenen Gleichungen: (wir konzentrieren uns hier auf den Vakuumfall, also $\mu_r = \varepsilon_r = 1$)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \longrightarrow -\nabla^2\varphi - \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dot{\vec{E}} \longrightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\left[-\vec{\nabla}\dot{\varphi} - \ddot{\vec{A}}\right]$$

Auf S. 147 haben wir gesehen, daß $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Also: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j} - \frac{1}{c^2}(\vec{\nabla}\dot{\varphi} + \ddot{\vec{A}})$

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}\right] = -\mu_0\vec{j}}$$

und aus der ersten Gleichung:

$$\boxed{\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\rho/\varepsilon_0}$$

* Auf S. 153 haben wir die sogen. Coulomb-Eichung benutzt ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$). Für die jetzige Diskussion ist es aber besser, die sogen. Lorentz-Eichung $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0}$ zu benutzen.

* Diese Eichung führt zu einer vollständigen Entkopplung der beiden Differentialgleichungen für $\phi(\vec{r},t)$ und $\vec{A}(\vec{r},t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi$$

Also die 1. Gleichung ist der Form:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

und die 2. Gleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

. Die beide Gleichungen haben damit eine wunderschöne symmetrische Form:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\,\phi(\vec{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t) \\ \Box\,\vec{A}(\vec{r},t) &= -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t) \end{aligned}} \quad \Bigg\} \quad \underline{\text{Symmetrische Form der Maxwell-Gleichungen}}$$

wobei $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow$ <u>d'Alembert Operator</u>

(<u>Bemerkung</u>: diese Form geht schon in die Richtung eines 4-dimensionalen Raumes. Mehr darüber in unserer Diskussion der speziellen Relativitätstheorie).

* Wir kehren zurück an dem d'Alembert Operator und den Maxwell-Gleichungen später in unserer Diskussion der elektromagnetischen Wellen.

* Energiesatz der Elektrodynamik: Poynting-Vektor

* Nehmen wir eine Punkladung q, die sich in einem Elektromagnetischen Feld mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Die Ladung erfährt also die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

* Bei der Verschiebung um $d\vec{r}$ leistet das Feld am Teilchen eine (positive) Arbeit

(S. 4): $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ ← $d\vec{r}$ und $\vec{v}$ sind parallel zueinander. Aber $\vec{v} \times \vec{B}$ ist senkrecht zu $\vec{v}$, und damit zu $d\vec{r}$. Dann $q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = 0$

$$= q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Dabei wird Feldenergie in Kinetische Energie des Teilchens umgewandelt. Die entsprechende Leistung ist also:

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow \frac{dW}{dt} = \underbrace{(q\vec{v})}_{\substack{\text{Strom} \\ \text{(S. 145)}}} \cdot \underbrace{\vec{E}}_{\vec{E}\text{-Feld}}$$

Nur $\vec{E}$ ~~nimmt~~ am Energieaustausch teil (weil $\vec{v} \times \vec{B}$ immer senkrecht zu $\vec{v}$ ist).

* Wir können diese Diskussion für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r},t)$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$, verallgemeinern.

Kraftdichte: $\vec{f}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)\right]$

Leistungsdichte: $\vec{f}(\vec{r},t) \cdot \vec{v}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\, \vec{v}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t) \overset{\text{S. 146}}{=} \vec{J}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t)$

* Aus der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$, haben wir daß

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}$$

Außerdem: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \overset{\text{Maxwell-Gleichungen}}{=} -\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$

Also $\boxed{\vec{J} \cdot \vec{E} = -\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})}$ ← Leistungsdichte

• Für linearen homogenen Medien $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$

also $$\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D})$$

Damit $$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

Wir führen nun zwei wichtige Definitionen

* Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\boxed{w(\vec{r},t) \equiv \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D})}$$

* Poynting-Vektor

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r},t) \equiv \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)}$$

(wir werden sofort die physikalische Bedeutung von $\vec{S}$ diskutieren)

Dann $$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} w - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \vec{S}}$$ → Kontinuitätsgleichung (sogen. Poynting-Theorem)

Wenn wir über ein Volumen V integrieren, bekommen wir

$$\int_V d^3r \frac{\partial w}{\partial t} = -\overbrace{\int_V d^3r \, \vec{J} \cdot \vec{E}}^{(i)} - \overbrace{\int_V d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{S}}^{(ii)}$$

Also, die Feldenergie $\left(W_V^{Feld} \equiv \int w \, d^3r\right)$ ändert sich durch

(i) Umwandlung in mechanische Teilchenenergie (W_V^{mech})
(und letztendlich in Wärme)

(ii) Strahlung durch die Oberfläche von V

$$\Rightarrow \int_V d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \underset{\text{Gauß-Satz}}{\uparrow}{=} \int_{S(V)} \vec{S} \cdot d\vec{f}$$

* Also $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(W_V^{\text{Feld}} + W_V^{\text{Mech}}\right) = -\int_{S(V)} \vec{S}\cdot d\vec{f}}$$

* Der Poyntingvektor hat also die Bedeutung einer <u>Energiestromdichte</u>.

Also das Feld ⇒ [* Bewegt die Teilchen
* Verursacht eine Strahlung

---

* <u>Impulssatz der Elektrodynamik. Spannungstensor.</u>

* Aus dem 2. Newtonschen Gesetz (S. 2) können für ein Teilchensystem die Änderung des gesamten Impulses ($\vec{P}_V^{(\text{mech})}$) gleich die Kraft ist. Für geladene Teilchen haben wir die Lorentz-Kraft. Für kontinuierliche Verteilungen haben wir also:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_V^{(\text{mech})} = \int_V d^3r\, \rho\, [\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}] = \int_V d^3r\, [\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}]$$

wir addieren $\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$ (es ist sowieso Null)

Gucken wir das genauer:

$$\dot{\vec{D}}\times\vec{B} = \frac{d}{dt}(\vec{D}\times\vec{B}) - \underbrace{\vec{D}\times\dot{\vec{B}}}_{\vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})} \leftarrow \text{Maxwell-gl}$$

$$\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \overset{\text{Maxwell-gl.}}{=} \vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + [\vec{\nabla}\times\vec{H} - \dot{\vec{D}}]\times\vec{B} = \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{\nabla}\times\vec{H})\times\vec{B} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{D} - \frac{d}{dt}(\vec{D}\times\vec{B})$$

* Wir führen nun die <u>Definition des Impulses des elektromagnetischen Feldes</u>

(wir werden sofort sehen warum heißt das so)

$$\vec{P}_V^{(\text{Feld})} = \int_V d^3r\, (\vec{D}\times\vec{B})$$

Also
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_V^{(\text{mech})} + \vec{P}_V^{(\text{Feld})}\right) = \int_V d^3r \left\{ \left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right] + \left[\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right] \right\}$$

An der rechten Seite haben wir eine schöne symmetrische Kombination von $(\vec{E},\vec{D})$ und $(\vec{H},\vec{B})$.

* Wir setzen noch mal ein lineares homogenes Medium.

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Man kann ziemlich einfach beweisen, daß in diesem Fall:

$$\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_i = \varepsilon_r \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[E_i E_j - \frac{1}{2}E^2 \delta_{ij}\right]$$

$$\left[\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right]_i = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}B^2 \delta_{ij}\right]$$

Dann

$$\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right]_i$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\varepsilon_r \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left[\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^2\right]\right\}$$

Das bringt uns direkt an der Definition des Maxwell-Spannungstensors

$$\boxed{T_{ij} \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^2\right)}$$

Sei $\vec{T}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$, dann $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \vec{\nabla}\cdot\vec{T}_i$

Also $\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) - \vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right]_i = \vec{\nabla}\cdot\vec{T}_i$

Dann
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_V^{(\text{Feld})} + \vec{P}_V^{(\text{mech})}\right)_i = \int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{T}_i \overset{\text{Gauß-Satz}}{=} \underbrace{\int_{S(V)} d\vec{f}\cdot\vec{T}_i}}$$
$\Rightarrow$ Impulssatz

$\hookrightarrow$ i-te Komponente des Impulsflusses auf $S(V)$

* Wenn wir über den gesamten Raum integrieren

$$\oint_{S(\infty)} d\vec{f} \cdot \vec{T}_i = 0 \Leftarrow$$

ρ und $\vec{J}$ sind nur in V nicht Null.
Weit entfernt von V (Multipolentwicklung)
$|\vec{E}| \sim 1/r^2$ (Monopol), $|\vec{B}| \sim 1/r^3$ (Dipol)
Also $T \sim E^2, B^2 \sim 1/r^4, 1/r^6$. Aber
die Fläche geht mit r^2, also $\oint_{S(\infty)} d\vec{f} \cdot \vec{T}_i = 0$

* Dann

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\vec{P}_\infty^{(mech)} + \epsilon_0\epsilon_r \int_\infty d^3r\,(\vec{E}\times\vec{B})}_{\text{Das hier ist eine Konstante}}\Big] = 0$$

→ Aber das ist genau die Form eines Erhaltungssatzes für das gesamten Impuls. Das gesamte Impuls hat also 2 Komponenten:

* Mechanische Impuls der Teilchen
* Impuls des elektromagnetischen Feldes (deswegen unsere vorherige Definition)

$$\vec{P}^{\,Feld} = \varepsilon_0\varepsilon_r \int d^3r\,(\vec{E}\times\vec{B}) = (\varepsilon_0\varepsilon_r)(\mu_0\mu_r)\int d^3r\,\underbrace{(\vec{E}\times\vec{H})}_{\vec{S}}$$

Also wir können eine Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes definieren:

$$\boxed{\vec{P}^{(Feld)} = (\varepsilon_0\mu_0)(\varepsilon_r\mu_r)\,\vec{S}}$$

Also die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes zeigt in Richtung des Poyntingvektors.

Elektromagnetische Wellen

* Zu den bedeutendsten Erfolgen der Maxwell-Theorie gehört die Erkenntnis, dass sich elektromagnetische Felder unabhängig von irgendwelchen Ladungen und Strömen selbst im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Eigentlich ist die Licht nichts anders als diesen elektromagnetischen Feldern (man braucht kein Äther oder sowas, wie man vorher sich gedacht hatte).
* Wir werden nun die Idee der elektromagnetischen Wellen für den besonders einfachen Fall eines ungeladenen Insulators (z.B. Vakuum), wobei $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$.

Außerdem nehmen wir ein lineares homogenes Medium an,

also
$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

Damit lauten die Maxwell-gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \longrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \ddot{\vec{E}}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \dot{\vec{E}} \longrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 (\vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}}) = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \ddot{\vec{B}}$$

Also
$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \ddot{\vec{E}} = 0$$
$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \ddot{\vec{B}} = 0$$

Die Konstante $u \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$

hat die Dimension einer Geschwindigkeit.

Man nennt $\boxed{n \equiv \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \equiv \text{Brechungindex}}$

* Also für $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ haben wir dieselbe Gleichung.

Sei $\vec{\Psi} = \vec{E}$ oder $\vec{B}$. Dann

$$\boxed{\Box \vec{\Psi}(\vec{r},t) = 0} \longrightarrow$$ <u>homogene Wellengleichung</u>

wobei $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ist der d'Alembert-Operator (S. 170)
aber anstatt c haben wir
die Geschwindigkeit u.

* Die <u>Lösungen der homogenen Wellengleichung</u> sind der Form:

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t) = \vec{f}_-(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \vec{f}_+(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)$$

wobei $\vec{f}_\pm$ sind beliebige Funktionen der Phase $\varphi_\pm(\vec{r},t) = \vec{k}\vec{r} \pm \omega t$.

Wir nehmen $\omega \geq 0$.

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\Psi} &= +k^2 \vec{\Psi} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\Psi} &= \omega^2 \vec{\Psi} \end{aligned}\right\} \quad \Box\vec{\Psi} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{u^2}\right)\vec{\Psi} = 0$$

Dann $\boxed{\omega = uk}$ ← k und ω müssen diese Bedingung erfüllen, um $\vec{\Psi}$ eine Lösung zu sein.

* Bei konstanter Phase $\varphi_-(\vec{r},t)$ ist $\vec{f}_-$ konstant.

Bei einer gewissen Zeit $t = t_0$

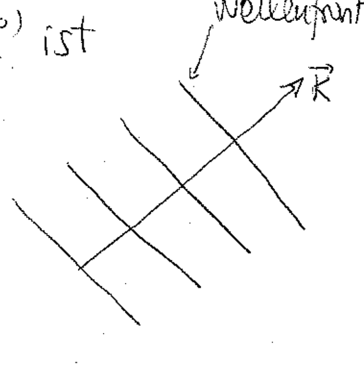
$$\varphi_-(\vec{r},t_0) = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t_0 = \text{const} \quad \text{wenn} \quad \vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const} \Rightarrow$$ Das ist die Gleichung einer Ebene

Diese Ebene ist der sogen. <u>Wellenfront</u>, und ist senkrecht zu $\vec{k}$.

* Die Bedingung für eine Ebene mit konstanter Phase $\varphi_-^{(0)}$ ist

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = \varphi_-^{(0)} + \omega t \longrightarrow r_\parallel = \frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{k} = \frac{\varphi_-^{(0)}}{k} + \frac{\omega}{k}t$$

Projektion von $\vec{r}$ auf die Richtung von k



Dann $\frac{dr_\parallel}{dt} = \frac{\omega}{k} = u \longrightarrow$ <u>Phasengeschwindigkeit</u>

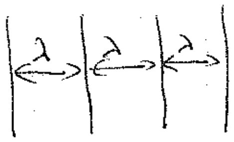
* Eine spezielle Lösung der Wellengleichung sind die sogen.

<u>Ebene Wellen</u>: $f_\pm(\vec{r},t) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)}$

die eine raum-zeitliche Periodizität aufweisen.

(<u>Bemerkung</u>: Wir benutzen eine komplexe Schreibweise, aber die physikalisch relevante Größen sind nur die Realteile)

* <u>Räumliche Periodizität</u>: $\vec{k}\cdot\Delta\vec{r}_n = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$
  * Zwei nächstbenachbarten Wellenfronten mit denselben $f_\pm$-Wert haben ein Abstand



$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \Rightarrow \text{Wellenlänge}$$

$$\boxed{\vec{k} \equiv \text{Wellenvektor}}$$

* <u>Zeitliche Periodizität</u> $\omega t = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$
  * Also es gibt eine Schwingung mit <u>Periode</u> $\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega}}$
  * $\omega \equiv$ <u>Kreisfrequenz</u>

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} \equiv \text{Frequenz}}$$ (wird in Hz (Hertz) gemessen)

* Da $\omega = uk$, gibt es eine Beziehung zwischen räumlichen und zeitlichen Periodizität: $\boxed{u = \frac{\lambda}{\tau}}$

---

* <u>Transversale elektromagnetischen Wellen</u>
* Wir haben bisher allgemeine Resultate der ebenen Wellen begleitet. Wir sind aber natürlich an der besonderen Eigenschaften der Wellen in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ interessiert. Dabei lernen wir alles Wesentliche bereits bei der Betrachtung der Teillösungen

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}$$

und der Anwendung der Maxwell-Gleichungen.

* Aus $\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B} \Rightarrow \vec\nabla\times\left(\vec E_0 e^{i(\vec k\vec r-\omega t)}\right) = i(\vec k\times\vec E_0)e^{i(\vec k\vec r-\omega t)}$

$$-\dot{\vec B} = -\vec B_0(-i\omega')\,e^{i(\vec k'\cdot\vec r-\omega' t)}$$

Also $i(\vec k\times\vec E_0)\,e^{i(\vec k\vec r-\omega t)} = i\vec B_0\omega'\,e^{i(\vec k'\cdot\vec r-\omega' t)}$

Das muss für alle $\vec r$ und t gültig sein, also $\left\{\begin{matrix}\vec k=\vec k'\\ \omega=\omega'\end{matrix}\right\}$

und damit auch $\boxed{\vec k\times\vec E_0=\omega\vec B_0}$

* Aus $\vec\nabla\cdot\vec E=0 \to \vec\nabla\cdot\left[\vec E_0 e^{i(\vec k\vec r-\omega t)}\right] = i(\vec k\cdot\vec E_0)e^{i(\vec k\vec r-\omega t)}=0$

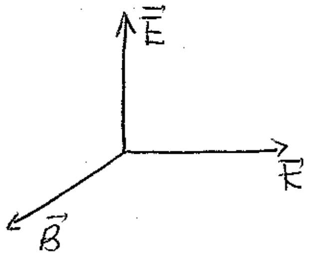
$$\longrightarrow \boxed{\vec k\cdot\vec E_0=0}$$

* Aus $\vec\nabla\cdot\vec B=0 \longrightarrow \boxed{\vec k\cdot\vec B_0=0}$
* Aus $\vec\nabla\times\vec B=\frac{1}{u^2}\dot{\vec E} \longrightarrow \boxed{\vec k\times\vec B_0=-\frac{\omega}{u^2}\vec E_0}$

* Also $\vec k$ ist senkrecht zu $\vec E_0$ und $\vec B_0$ $\quad(\vec k\cdot\vec E_0=\vec k\cdot\vec B_0=0)$

und außerdem $\vec E_0$ ist senkrecht zu $\vec k$ und $\vec B_0$ $\left(\begin{matrix}\vec k\times\vec B_0=-\frac{\omega}{u^2}\vec E_0\\ \vec k\times\vec E_0=\omega\vec B_0\end{matrix}\right)$

Also $\vec E_0$, $\vec B_0$ und $\vec k$ bilden ein orthogonales System:



Man spricht deshalb von transversalen Wellen.

* Sei z.B. $\vec k=k\vec e_z$, dann $\vec E_0=E_{0x}\vec e_x+E_{0y}\vec e_y$

Da $\vec B_0=\frac{1}{\omega}(\vec k\times\vec E_0) \longrightarrow \vec B_0=\frac{1}{u}(-E_{0y}\vec e_x+E_{0x}\vec e_y)$

Also $\quad\vec E=(E_{0x}\vec e_x+E_{0y}\vec e_y)\,e^{i(kz-\omega t)}$

$$\vec B=\frac{1}{u}(-E_{0y}\vec e_x+E_{0x}\vec e_y)\,e^{i(kz-\omega t)}$$

Wir sehen, daß für die Beschreibung der elektromagnetischen Wellen ($\vec E$ und $\vec B$)

brauchen wir nur $\vec{E}$ allein (oder $\vec{B}$ allein).

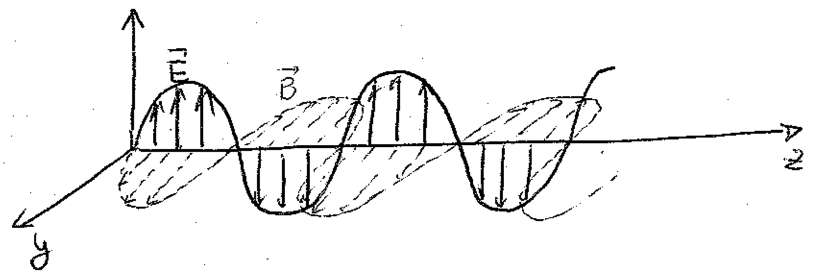
* Wie sieht die Welle aus?

  * Sehen wir ein Beispiel: $E_{0y} = 0$

$$\vec{E} = E_0\, \vec{e}_x\, e^{i(kz-\omega t)} \xrightarrow{\text{Realteil}} E_0\, \vec{e}_x \cos(kz-\omega t)$$

$$\vec{B} = \frac{+E_0}{u}\, \vec{e}_y\, e^{i(kz-\omega t)} \longrightarrow \frac{E_0}{u}\, \vec{e}_y \cos(kz-\omega t)$$

Bei einer gewissen Zeit t, diese Lösung sieht so aus:



---

* Polarisation

* Die Koeffizienten E_{0x} und E_{0y} sind im Allgemeinen komplexe Größen

$$\left.\begin{aligned} E_{0x} &= |E_{0x}|\, e^{i\varphi} \\ E_{0y} &= |E_{0y}|\, e^{i(\varphi+\delta)} \end{aligned}\right\}$$ die Phasenverschiebung δ zwischen E_{0x} und E_{0y} spielt eine wichtige Rolle wie wir sofort sehen werden.

* Dann $\vec{E} = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y)\, e^{i(kz-\omega t)} = |E_{0x}|\, e^{i(kz-\omega t+\varphi)}\vec{e}_x + |E_{0y}|\, e^{i(kz-\omega t+\varphi+\delta)}\vec{e}_y$

$\Rightarrow$ Realteil $\Rightarrow \vec{E} = E_x\, \vec{e}_x + E_y\, \vec{e}_y$ mit $E_x = |E_{0x}| \cos[kz-\omega t+\varphi]$ und $E_y = |E_{0y}| \cos[kz-\omega t+\varphi+\delta]$

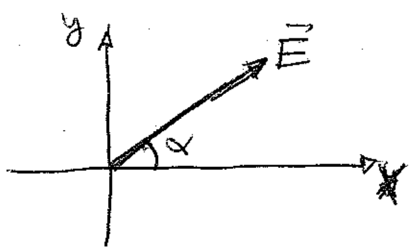
* Die relative Phase δ definiert verschieden Sorten von POLARISATIONEN:

Bemerkung: man spricht auch von π-Polarisation.

* Lineare Polarisation: $\delta = 0, \pm\pi \Longrightarrow \cos(kz-\omega t+\varphi) = \pm\cos(kz-\omega t+\varphi+\delta)$

Dann $\vec{E} = (|E_{0x}|\,\vec{e}_x \pm |E_{0y}|\,\vec{e}_y)\cos(kz-\omega t+\varphi)$

$$\vec{E} = |\vec{E}|\cos(kz-\omega t+\varphi)\,\vec{e}$$



wobei $|\vec{E}|^2 = |E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2$

$$\vec{e} = \cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y \quad \text{mit } \tan\alpha = \frac{\pm|E_{0y}|}{|E_{0x}|}$$

Also $\vec{E}$ zeigt in einer bestimmten festen Richtung $\vec{e} \Rightarrow$ Polarisationsrichtung

* Zirkulare Polarisation $\begin{cases}\delta=\pm\pi/2\\ |E_{0x}|=|E_{0y}|=E\end{cases} \longrightarrow \cos(kz-\omega t+\varphi+\delta)=\pm\sin(kz-\omega t+\varphi)$

$$\Longrightarrow \vec E = E\left[\cos(kz-\omega t+\varphi)\,\vec e_x \underset{+\pi/2}{\overset{-\pi/2}{\pm}} \sin(kz-\omega t+\varphi)\,\vec e_y\right]$$

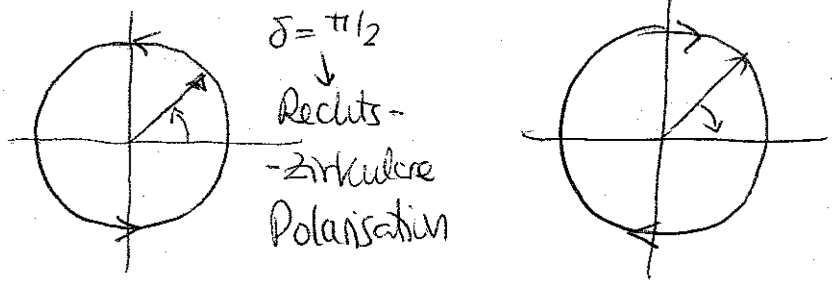
Also für eine gewisse Zeit t, $\vec E_{(z,t)}$ zeigt in der Richtung des Vektors

$$\vec e(z,t) = \cos(kz-\omega t+\varphi)\,\vec e_x \pm \sin(kz-\omega t+\varphi)\,\vec e_y$$

Für einen festen Raumpunkt z, sei $\Delta_z = kz+\varphi$

$$\vec e(t) = \cos(\Delta_z-\omega t)\,\vec e_x \pm \sin(\Delta_z-\omega t)\,\vec e_y$$

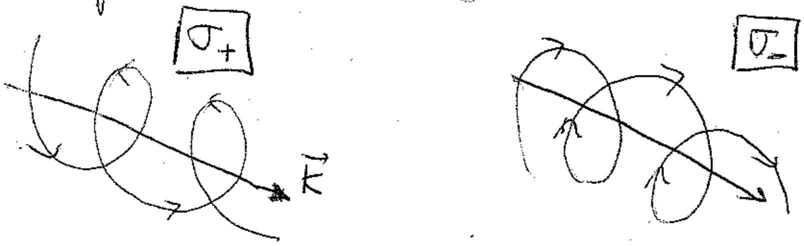
Der $\vec e(t)$ Vektor durchläuft einen Kreis von Radius 1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω:



$\delta=\pi/2$ ↓ Rechts-Zirkulare Polarisation

$\delta=-\pi/2$ ↓ Links-Zirkulare Polarisation

Man spricht auch von σ_+- und σ_-- Polarisation.



* Wenn $\delta=\pm\pi/2$ aber $|E_{0x}|\neq|E_{0y}|$ spricht man von elliptischen Wellen

* Wenn δ beliebig ist $\quad \vec e_\pm = 1/\sqrt2\,(\vec e_x \pm i\vec e_y)$

$$\underbrace{E_{0x}\vec e_x + E_{0y}\vec e_y}_{\text{2 senkrecht zu einander linear polarisierte Wellen}} = \frac{1}{\sqrt2}(E_{0x}-iE_{0y})\,\vec e_+ + \frac{1}{\sqrt2}(E_{0x}+iE_{0y})\,\vec e_- \qquad \vec e_+\cdot\vec e_-=0$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}E_+e^{i\delta_+}\,\vec e_+ + \frac{1}{\sqrt2}E_-e^{i\delta_-}\,\vec e_-$$

2 senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen noch mal äquivalent können wir sehen, daß ⇒

Also $\boxed{\vec E = \frac{1}{\sqrt2}E_+e^{i(kz-\omega t+\delta_+)}\,\vec e_+ + \frac{1}{\sqrt2}E_-e^{i(kz-\omega t+\delta_-)}\,\vec e_-}$

$$\xrightarrow{\text{Real Teil}} \underbrace{\frac12E_+\left[\cos(kz-\omega t+\delta_+)\vec e_x + \sin(kz-\omega t+\delta_+)\vec e_y\right]}_{\sigma_-\text{-Welle}} + \underbrace{\frac12E_-\left[\cos(kz-\omega t+\delta_-)\vec e_x - \sin(kz-\omega t+\delta_-)\vec e_y\right]}_{\sigma_+\text{ Welle}}$$

Also eine Welle mit beliebiger Polarisation kann auch immer als die Summe zweier zirkular polarisierten Wellen verschiedener Amplituden dargestellt werden.

* Also, zusammengefaßt, eine ebene Welle mit einer linearen Polarisation ist der Form:

$$\vec{E} = \underbrace{E}_{\text{Amplitude}}\; e^{\overbrace{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi)}^{\text{Phase}}}\; \underbrace{\vec{e}}_{\text{Polarizationsrichtung}}$$

Transversalität
⇑
(immer senkrecht zu $\vec{k}$)

Phase → Die hängt von Wellenvektor $\vec{k}$, Frequenz ω } $\omega = ck$ ab.

* Wie schon erwähnt, ~~...~~ eine ebene Welle mit beliebigen Polarisation kann immer als eine lineare Überlagerung zweier Wellen mit linearen Polarisation (die beide müssen orthogonale Polarisationen zu $\vec{k}$ und zueinander haben).

* Wir werden nun sehen, daß eine allgemeine Lösung der Wellengleichung als eine lineare Überlagerung von ebenen Wellen dargestellt werden kann, also die gesamte Physik ist irgendwie schon klar von der Betrachtung einer ebenen Wellen mit linearen Polarisation.

---

* Interferenz

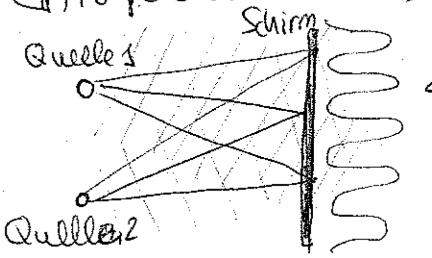
• Eine wichtige Eigenschaft der ebene Wellen ist die Interferenzfähigkeit.

Nehmen wir 2 ebene Wellen

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_1\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi_1)}\,\vec{e}\\ \vec{E}_2 &= E_2\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi_2)}\,\vec{e}\end{aligned}\right\}\; |\vec{E}_1+\vec{E}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + \underbrace{2E_1E_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}_{\text{Interferenzmuster}}$$

• Die Detektion des Licht ~~...~~ hängt von $|\vec{E}|^2$, also 2 (gleichpolarisierte) ebene Wellen zeigen ein Interferenzmuster.

• Die Interferenz kann konstruktiv ($\cos(\varphi_2-\varphi_1)>0$) oder destruktiv ($\cos(\varphi_2-\varphi_1)<0$) sein.



Interferenzmuster!

* Allgemeine Lösung der Wellengleichung

* Bisher haben wir nur eine spezielle Lösung der Wellengleichung gesehen, nämlich die Ebenewellen. Wir können aber die ebene Wellen benutzen, um eine allgemeine Lösung der Wellengleichung zu finden, und zwar mit Hilfe der Fourier-Transform.

* Wir wollen also die homogene Wellengleichung

$$\Box \vec{\Psi} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\Psi} = 0$$

lösen, und zwar mit Anfangsbedingungen $\begin{cases} \vec{\Psi}(\vec{r}, t=0) = \vec{\Psi}_0(\vec{r}) \\ \dot{\vec{\Psi}}(\vec{r}, t=0) = \vec{v}_0(\vec{r}) \end{cases}$

* Sei $\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega)$ die Fourier-Transformierte von $\vec{\Psi}(\vec{r}, t)$

$$\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \vec{\Phi}(\vec{k}, \omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Das ist eine Überlagerung von ebenen Wellen

(Bemerkung: wir benutzen $f(t) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, F(\omega) e^{-i\omega t}$ als Definition der Fourier-Transform.)

* Dann

$$\Box \vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{u^2} \right) \vec{\Phi}(\vec{k}, \omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = 0$$

Also $\left(\frac{\omega^2}{u^2} - k^2 \right) \vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) = 0$

Dann $\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) \neq 0$ nur wenn $\omega = \pm uk$ (S. 177)

Dies führt auf den Ansatz:

$$\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) = \vec{a}_+(\vec{k})\, \delta(\omega + uk) + \vec{a}_-(\vec{k})\, \delta(\omega - uk)$$

und damit

$$\boxed{\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \left\{ \vec{a}_+(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + kut)} + \vec{a}_-(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - kut)} \right\}}$$

Überlagerung von ebenen Wellen mit Gewichtsfunktionen $\vec{a}_\pm(\vec{k})$

* Diese Lösung muß die Anfangsbedingungen erfüllen:

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t=0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \left\{ \vec{a}_+(\vec{k}) + \vec{a}_-(\vec{k}) \right\} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{\Psi}_0(\vec{r})$$

$$\dot{\vec{\Psi}}(\vec{r},t=0) = \frac{i}{(2\pi)^2}\int d^3k \left\{ \vec{a}_+(\vec{k}) - \vec{a}_-(\vec{k}) \right\} ku\, e^{i\vec{k}\vec{r}} = \vec{v}_0(\vec{r})$$

Wir kehren die (3D) Fourier-Transform um:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\vec{a}_+(\vec{k}) + \vec{a}_-(\vec{k})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\, \vec{\Psi}_0(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\vec{a}_+(\vec{k}) - \vec{a}_-(\vec{k})\right) = \frac{-i}{ku}\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\, \vec{v}_0(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Also $\vec{a}_\pm(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\left[\vec{\Psi}_0(\vec{r}) \mp \frac{i}{ku}\vec{v}_0(\vec{r})\right]$

und damit

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3k \int d^3r'\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \left[\begin{matrix} e^{ikut}\left[\vec{\Psi}_0(\vec{r}') - \frac{i}{ku}\vec{v}_0(\vec{r}')\right] \\ + e^{-ikut}\left[\vec{\Psi}_0(\vec{r}') + \frac{i}{ku}\vec{v}_0(\vec{r}')\right] \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3k \int d^3r'\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\left[\left(e^{ikut}+e^{-ikut}\right)\vec{\Psi}_0(\vec{r}') - \frac{i}{ku}\left(e^{ikut}-e^{-ikut}\right)\vec{v}_0(\vec{r}')\right]$$

$$= \int d^3r' \left[\begin{matrix} \left\{ \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3}\left(e^{ikut}+e^{-ikut}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \right\} \vec{\Psi}_0(\vec{r}') \\ + \left\{ \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3}\left(\frac{-i}{ku}\right)\left(e^{ikut}-e^{-ikut}\right) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \right\} \vec{v}_0(\vec{r}') \end{matrix} \right]$$

$$= \int d^3r' \left\{ \dot{D}(\vec{r}-\vec{r}',t)\,\vec{\Psi}_0(\vec{r}') + D(\vec{r}-\vec{r}',t)\,\vec{v}_0(\vec{r}') \right\}$$

wobei $D(\vec{r},t) = \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int d^3k\, \frac{\left(e^{ikut}-e^{-ikut}\right)}{ku}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$\int_0^\pi \sin\theta d\theta\, e^{ikr\cos\theta} = \int_{-1}^{1} ds\, e^{ikrs} = \frac{\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)}{kr}$

$$= \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin\theta d\theta\, 2\pi\, \frac{\left(e^{ikut}-e^{-ikut}\right)}{ku}\, e^{ikr\cos\theta} =$$

$$= \frac{-1}{2(2\pi)^2 ur}\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(e^{ik(r+ut)} - e^{-ik(r-ut)}\right) = \frac{-1}{4\pi ur}\left[\delta(r+ut) - \delta(r-ut)\right]$$

* Dispersive Medien. Gruppengeschwindigkeit

* Wir haben gesehen (S. 182), daß eine allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung ist der Form:

$$\vec{\Psi}_\pm(\vec{r},t) = \int d^3k \, \frac{\vec{a}_\pm(\vec{k})}{(2\pi)^2} e^{i(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)}$$

wobei $\omega = ku$. Die lineare Überlagerung von Ebenenwellen baut ein sogen. Wellenpaket.

* Für die so genannte dispersive Medien $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$, und damit $\boxed{\omega = \omega(k)}$ aber nicht genau ku.

Damit
$$\vec{\Psi}_\pm(\vec{r},t) = \int d^3k \, \frac{\vec{a}_\pm(\vec{k})}{(2\pi)^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega(k)t)} \quad \vec{k} = k\vec{e}_z$$

$$= \int d^3k \, \frac{\vec{a}_\pm(k)}{(2\pi)^2} e^{i(kz \pm \omega(k)t)} \, \delta(k_x)\,\delta(k_y)$$

Nehmen wir eine lineare Polarisation der Welle $\rightarrow \vec{\Psi}_\pm = \Psi_\pm(z,t)$

Dann
$$\Psi_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \, b(k) \, e^{i(kz \pm \omega(k)t)}$$

Sagen wir, daß die Gewichtsfunktion $b(k) \neq 0$ nur in einem relativ schmalen Bereich um ein bestimmtes k_0.

Dann wir Taylor-entwickeln: $\omega(k) \simeq \omega(k_0) + (k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} + \dots$

Wir schreiben $\omega(k_0) = \omega_0$

$$\left.\begin{aligned} &\omega(k_0) = \omega_0 \\ &\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} = v_g \equiv \text{Gruppengeschwindigkeit} \end{aligned}\right\} \text{ sei } q = k - k_0$$

Dann
$$\Psi_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, b(k_0+q) \, e^{i[k_0+q]z \pm i[\omega_0 + q v_g]t}$$

$$= \underbrace{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}}_{\text{Ebene Welle mit } k_0,\,\omega_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dq \, b(k_0+q) \, e^{iq(z \pm v_g t)}}_{f(z \pm v_g t) \text{ ← Modulationsfunktion}}$$

* **Beispiel**: gaußsches Wellenpaket

$$b(k) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \, e^{-4(k-k_0)^2/\Delta k_0^2}$$

$$f(z \pm v_g t) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{-4q^2/\Delta k_0^2} \, e^{iq(z \pm v_g t)}$$

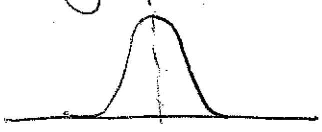
$$= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \, e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z \pm v_g t)^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{-\left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z \pm v_g t)\right)^2}}$$

$$s \equiv \frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z \pm v_g t)$$

$$\frac{\Delta k_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \, e^{-s^2} = \sqrt{\pi}$$

$$= e^{-\Delta k_0^2/16 \, (z \pm v_g t)^2}$$

Also
$$\boxed{\psi(z,t) = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \underbrace{e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z \pm v_g t)^2}}_{\text{gaußsche Funktion um der Stelle } \mp v_g t}}$$



---

* **Kugelwellen**

· Eine andere Klasse von speziellen Lösungen der homogener Wellengleichung sind die Kugelwellen.

Wir nehmen Felder der Form $\vec{\Psi}(\vec{r},t) = \vec{\Psi}(r,t)$ $\qquad r \equiv |\vec{r}|$

Dann $\square \vec{\Psi} = \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \vec{\Psi}(r,t)$

Sei $\vec{\eta}(\vec{r},t) = r\,\vec{\Psi}(r,t)$, dann $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\eta}(r,t) = 0$

und wie auf S. 177: $\vec{\eta}(\vec{r},t) = \vec{\eta}_+(kr + \omega t) + \vec{\eta}_-(kr - \omega t)$

wobei $\omega = ku$ $(\omega \geq 0)$.

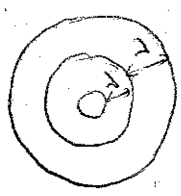
* Dann $\vec{\Psi}(r,t) = \frac{1}{r}\left\{ \vec{\eta}_+(kr+\omega t) + \vec{\eta}_-(kr-\omega t) \right\}$

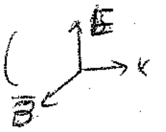
Nehmen wir daß $\vec{\eta}_\pm$ Ebenewellen sind, dann

$$\vec{\Psi}_\pm(r,t) = \frac{1}{r}\vec{e}_\pm \, e^{i(kr\pm\omega t)} \equiv \underline{\text{Kugelwellen}}$$

Wir sehen daß:

* Die Flächen der gleichen Phase bilden für jeder Zeit t eine Kugelfläche. Daher die Name Kugelwellen!
* Die Amplitude nimmt als $\frac{1}{r}$ mit r ab.
* Kugelflächen der Phase $\varphi_\pm^{(0)}$ erfüllen $r = \frac{\varphi_\pm^{(0)}}{k} \mp \frac{\omega}{k}t$ und damit ist die Phasengeschwindigkeit $u = \frac{\omega}{k}$ wie für eine Ebenewelle.
* Wie für eine Ebenewelle benachbaren Kugelflächen derselben Phase haben ein Abstand $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $\equiv$ also die Wellenlänge von S. 178.

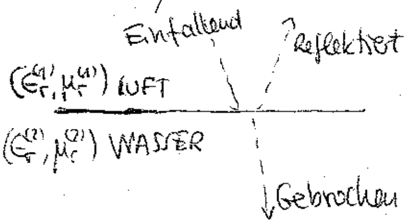


* Man kann auch zeigen daß die Kugelwellen auch Transversale Wellen () sind

* Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen

* Eine wichtige Anwendung der Maxwell-gleichungen und der Theorie der elektromagnetischen Wellen ist die Analyse der Brechung und der Reflexion der Licht.

* Wir betrachten eine ebene Grenzfläche zwischen 2 Dielektrika (z.B. Luft und Wasser). Die Dielektrika haben im Prinzip verschiedene $(\varepsilon_r^{(1)}, \mu_r^{(1)})$ und $(\varepsilon_r^{(2)}, \mu_r^{(2)})$, und damit auch verschiedene Brechungsindices (S. 176) n_1 und n_2.



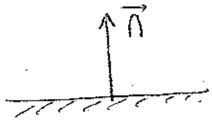
* Das Verhalten der Elektromagnetischen Wellen an der Grenzfläche hängt natürlich vom Verhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an der Grenzfläche. Das geht ähnlicherweise wie unsere Diskussionen der Elektrostatik (S. 117) und der Magnetostatik (S. 162).

* Wie für unsere Diskussion auf S. 176 werden wir lineare homogene Medien ($\vec{B} = \mu_r^{(1,2)} \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon_r^{(1,2)} \varepsilon_0 \vec{E}$) betrachten.

Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, und mit Hilfe des Gauß-Satzes (die Rechnungen sind genau wie die auf S. 117 und 162) bekommen wir

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \sigma_F \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Bedingungen für die normale Komponenten der feldern.

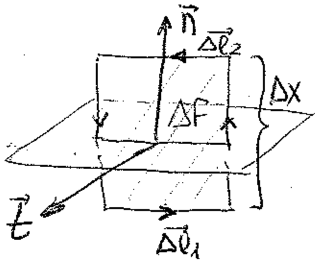


Wobei: $\vec{n}$ = Normalvektor der Grenzfläche

$\sigma_F \equiv$ Flächenladungsdichte

* Die andere 2 Maxwell-gleichungen sind für die Elektrodynamik anders, und deswegen müssen wir ein bisschen vorsichtiger sein.

* Wir machen die Rechnung wie auf S. 119



$$\vec\nabla\times\vec H = \vec J + \dot{\vec D}$$

$$\int_{\Delta F} d\vec f\cdot(\vec\nabla\times\vec H) = \int_{\Delta F} d\vec f\cdot\vec J + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{\Delta F} d\vec f\cdot\vec D}_{} \underset{\Delta x\to 0}{=} \vec J_F\cdot\vec t\cdot\Delta\ell$$

$d\vec f = df\,\vec t$; Flächenstromdichte

$\vec D$ ist auf der Grenzfläche endlich, und damit $\int_{\Delta F} d\vec f\cdot\vec D = 0$ wenn $\Delta x\to 0$

$\Vert \leftarrow$ Stokes

$$\int_{\partial\Delta F} d\vec r\cdot\vec H \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \vec H_2\cdot\Delta\vec\ell_2 + \vec H_1\cdot\Delta\vec\ell_1$$

$$\Vert \leftarrow \Delta\vec\ell_2 = (\vec t\times\vec n)\Delta\ell = -\Delta\vec\ell_1$$

$$(\vec H_2-\vec H_1)\cdot(\vec t\times\vec n)\Delta\ell$$

Damit $\quad (\vec t\times\vec n)\cdot(\vec H_2-\vec H_1) = \vec J_F\cdot\vec t$

$$\Vert$$

$$[\vec n\times(\vec H_2-\vec H_1)]\cdot\vec t = \vec J_F\cdot\vec t$$

Also $\quad \boxed{\vec n\times(\vec H_2-\vec H_1) = \vec J_F}$

Und ganz analog kommt aus $\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B}$

$$\boxed{\vec n\times(\vec E_2-\vec E_1) = 0}$$

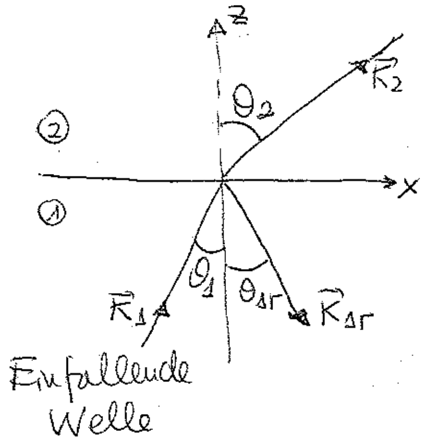
* Für ungeladene Dielektrika $\sigma_F = 0$, $\vec J_F = 0$, und damit kriegen wir die <u>Stetigkeitsbedingungen</u>:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec n\times(\vec E_2-\vec E_1)=0 & \\ \vec n\cdot(\vec D_2-\vec D_1)=0 & \\ \vec n\times(\vec H_2-\vec H_1)=0 & \\ \vec n\cdot(\vec B_2-\vec B_1)=0 & \end{array}}$$

<u>Tangentiale Komponenten</u> ($\vec E$, $\vec H$)

<u>Normale Komponenten</u> ($\vec D$, $\vec B$)

* Wir werden nun diese Gleichungen anwenden, um die Brechung und die Reflexion an der Grenzfläche zu verstehen.



* Wir betrachten eine einfallende ebene Welle, die aus Medium ① kommt.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}\, e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Aus unserer Diskussion der S. 179: $\hat{k}_1 = \frac{\vec{k}_1}{|\vec{k}_1|}$

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\omega_1}\left(\vec{k}_1 \times \vec{E}_1\right) = \frac{1}{u_1}\left(\hat{k}_1 \times \vec{E}_1\right)$$

$$\left(\text{wie immer } \omega_1 = |\vec{k}_1| u_1, \text{ wobei } u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_r^{(1)}\varepsilon_r^{(1)}}}\right)$$

* Die Welle wird teilweise <u>reflektiert</u>

$$\vec{E}_{1r} = \vec{E}_{01r}\, e^{i(\vec{k}_{1r}\cdot\vec{r} - \omega_{1r} t)}$$

$$\vec{B}_{1r} = \frac{1}{u_1}\left(\hat{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r}\right)$$

und teilweise gebrochen:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}\, e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega_2 t)}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{u_2}\left(\hat{k}_2 \times \vec{E}_2\right) \qquad \text{wobei } u_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_r^{(2)}\varepsilon_r^{(2)}}}$$

* Wie in der Abbildung da oben, nehmen wir $\vec{e}_z$ als Normalvektor, also die Grenzfläche ist die xy-Ebene. Wir nehmen an, dass $\vec{k}_1$ auf dem xz-Ebene liegt. Dann

$$\hat{k}_1 = \sin\theta_1\,\vec{e}_x + \cos\theta_1\,\vec{e}_z$$

$$\hat{k}_{1r} = \sin\theta_{1r}\cos\varphi_{1r}\,\vec{e}_x + \sin\theta_{1r}\sin\varphi_{1r}\,\vec{e}_y - \cos\theta_{1r}\,\vec{e}_z$$

$$\hat{k}_2 = \sin\theta_2\cos\varphi_2\,\vec{e}_x + \sin\theta_2\sin\varphi_2\,\vec{e}_y + \cos\theta_2\,\vec{e}_z$$

(<u>Bemerkung</u>: $\hat{k}_{1r}$ und $\hat{k}_2$ liegen im Prinzip nicht unbedingt auf xz, aber wir werden sofort sehen, dass das eigentlich der Fall ist.)

* Die Randbedingungen der S. 188 müssen für alle Punkte der Grenzfläche und für alle Zeiten erfüllt werden. Das ist eigentlich nur möglich wenn die Phasen der drei Wellen auf der xy-Ebene gleich sind:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t = \vec{k}_{1r} \cdot \vec{r} - \omega_{1r} t = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t \qquad \text{für } z = 0$$

Das ist richtig für alle Zeiten wenn

$$\omega = \boxed{\omega_1 = \omega_{1r} = \omega_2} \longrightarrow$$ An der Grenzfläche findet keine Frequenzänderung statt.

und richtig für alle $\vec{r} = (x, y, z=0)$

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_{1r} \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}$$

also für $x \rightarrow$ $k_1 \sin\theta_1 = k_{1r} \sin\theta_{1r} \cos\varphi_{1r} = k_2 \sin\theta_2 \cos\varphi_2$

für $y \rightarrow$ $0 = k_{1r} \sin\theta_{1r} \sin\varphi_{1r} = k_2 \sin\theta_2 \sin\varphi_2 \Longrightarrow \boxed{\varphi_{1r} = \varphi_2 = 0} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Also $\vec{k}_1$, $\vec{k}_{1r}$ und $\vec{k}_2$ liegen in ein- und derselben Ebene (Einfallebene)

Also $k_1 \sin\theta_1 = k_{1r} \sin\theta_{1r} = k_2 \sin\theta_2$

Aber
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega}{c} n_1 = k_{1r} \\ k_2 &= \frac{\omega}{u_2} = \frac{\omega}{c} n_2 \end{aligned}\right\}$$

Also $k_1 \sin\theta_1 = k_1 \sin\theta_{1r} \longrightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_{1r}} \Rightarrow$ Reflexionsgesetz

$\longrightarrow$ Der Reflexionswinkel ist gleich der Einfallendewinkel.

und $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \longrightarrow \boxed{\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{n_2}{n_1}}$ Brechungsgesetz (Snellius-Gesetz)

* Wenn $n_2 > n_1 \longrightarrow \theta_1 > \theta_2$ $\quad (0 \leq \theta_{1,2} \leq \pi/2)$

$\boxed{n_2 < n_1} \longrightarrow \theta_1 < \theta_2$

~~Wenn~~ Es gibt ein Grenzwinkel $\theta_1 = \theta_{1g}$ solch daß $\theta_2 = \pi/2$

$$\boxed{\sin \theta_{1g} = \frac{n_2}{n_1}}$$

$\downarrow$
Totalreflexion

(Bemerkung: für $\theta_1 > \theta_{1g}$ kann man zeigen, dass die Reflexion total ist).

* Bisher sind diese ~~Gesetze~~ ~~[illegible]~~ ein Ergebnis ziemlich allgemeiner Betrachtungen. Wir können nun aber die volle Kraft der Randbedingungen benutzen um die reflektierte und gebrochene Feldern zu bestimmen.

$$\left\{\begin{array}{l}
\vec{n} \times \left[\vec{E}_2 - (\vec{E}_1 + \vec{E}_{1r})\right] = 0 \\
\vec{n} \times \left[\varepsilon_r^{(2)} \vec{E}_2 - \varepsilon_r^{(1)} \left[\vec{E}_1 + \vec{E}_{1r}\right]\right] = 0 \\
\vec{n} \times \left[\frac{1}{\mu_r^{(2)}} (\vec{k}_2 \times \vec{E}_2) - \frac{1}{\mu_r^{(1)}} (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r})\right] = 0 \\
\vec{n} \cdot \left[(\vec{k}_2 \times \vec{E}_2) - (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r})\right] = 0
\end{array}\right\}$$

* Auf S. 181 haben wir gesehen, dass sich jede elliptisch polarisierte ebene Welle in zwei senkrecht zueinander polarisierte Wellen zerlegt lässt. Wir nehmen also
  * Wellen solch dass $\vec{E}_1$ senkrecht zur Einfallsebene (xz) ist
  * $\vec{E}_1$ ist in der Einfallsebene linearpolarisiert.

Wir nennen diese 2 Fälle $\perp$ und $\parallel$.

* Wegen Stetigkeit wenn $\vec{E}_1$ $\perp$ ist dann auch $\vec{E}_{1r}$ und $\vec{E}_2$ und genauso für $\parallel$.

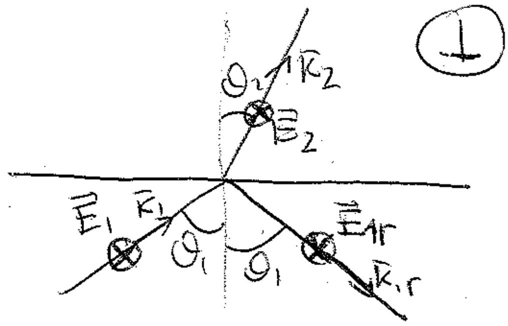
* Wir werden hier nicht alle die Rechnungen machen, aber die Ergebnisse kommen ziemlich einfach aus der Randbedingungen, und die Reflektionsgesetz und Snellius-Gesetz, erreicht werden.

Wir nehmen $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$ (das ist häufig der Fall), dann bekommt man die so genannten <u>Fresnel-Formeln</u> (ohne weitere Rechnungen)

* <u>$\perp$-Konfiguration</u>

$$\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)}$$

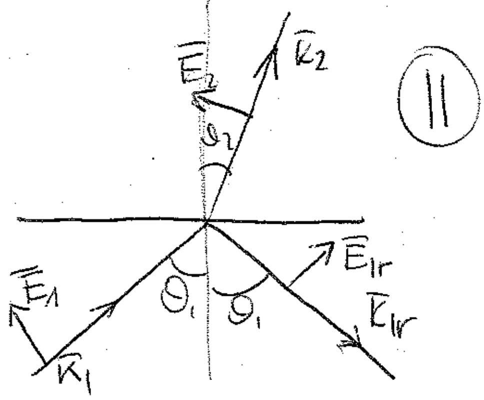
$$\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_2+\theta_1)}$$



* <u>||-Konfiguration</u>

$$\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{||} = \frac{\tan(\theta_2-\theta_1)}{\tan(\theta_2+\theta_1)}$$

$$\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{||} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_2+\theta_1)\cos(\theta_1-\theta_2)}$$



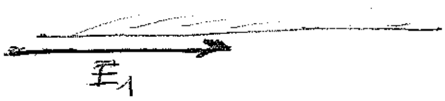
Also mit Hilfe der Reflektion- und Snellius-Gesetze finden wir θ_{1r} und θ_{2r} wenn wir n_1, n_2 und θ_1 kennen, und mit Hilfe der Fresnel-Formeln, finden wir außerdem E_{01r} und E_{02} wenn wir außerdem E_{01} kennen.

Also $\begin{bmatrix}\text{Reflektionsgesetz}\\ \text{Snellius-gesetz}\\ \text{Fresnel-Formel}\end{bmatrix} \longrightarrow$ bestimmen $\vec{E}_{1r}$ und $\vec{E}_{2r}$ wenn wir $\vec{E}_1$ kennen!

* Suchen wir nun ein Paar <u>Folgen der Fresnel-Formeln</u>

Sei $n_2 > n_1$ (also $\theta_2 < \theta_1$)

* Sei $\theta_1 = \pi/2$



dann, wie man erwarten kann, $\vec{E}_2 = 0$

- Da $\theta_2 < \theta_1 \rightarrow \left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp < 0 \longrightarrow \pi$- Sprung bei der Reflexion
(Änderung des Vorzeichens)

- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\parallel = 0$ wenn $\tan(\theta_2 - \theta_1) = 0$

mit Hilfe der Snellius-gesetz sieht man, dass das passiert wenn $\theta_1 = \theta_B$ mit $\boxed{\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}}$

Also wenn $\theta_1 = \theta_B \equiv$ Brewster-winkel, $(E_{01r})_\parallel = 0$,
und damit $\vec{E}_r$ ~~wird~~ ist vollständig linear polarisiert und zwar senkrecht zu der Fläche.

(Bemerkung: guck mal die Reflexion der Licht auf einem polierten Boden. Mach das mit polarisierten Brillen (die lassen die Licht nur mit einer gewissen linearen Polarisation durch). Dreh die Brillen. Für eine gewisse Winkel siehst Du keine Reflexion! Das ist der Brewster-Winkel!).

* Elektromagnetische Wellen in elektrischen Leitern

* Bisher haben wir $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ angenommen. Wir werden nun homogene, isotrope, ladungsfreie, elektrische Leiter studieren.
* In einem elektrischen Leiter hat man ein Strom (I) wenn man eine Spannung (U) hat. In sogenann. Ohmsche Leitern $I = \frac{1}{R} U$. ($R \leftarrow$ Widerstand) Die Spannung entspricht ein $\vec{E}$-Feld, und I entspricht eine Stromdichte $\vec{J}$. Die beide sind durch die elektrische Leitfähigkeit (σ) verbunden:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

* Für einen elektrischen Leiter $\Rightarrow \sigma \neq 0$, aber $\rho = 0$ (keine Ladungsdichte).

Damit Maxwell gleichungen

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \sigma \vec{E} + \frac{1}{u^2} \dot{\vec{E}} \end{cases}$$

(Bemerkung: Dass $\rho = 0$ für alle t ist nicht so selbstverständig. Wenn $\rho \neq 0$
$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_r \mu_0 \sigma (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{u^2} \vec{\nabla} \dot{\vec{E}} = \frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \sigma \rho + \mu_r \mu_0 \dot{\rho} \rightarrow \dot{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \rho$
$\rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t=0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} t}$. Also wenn wir nehmen $\rho(\vec{r}, t=0) = 0$, dann $\rho(\vec{r}, t) = 0 \ \forall t$)

* Also $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\mu_r \mu_0 \sigma \dot{\vec{E}} - \frac{1}{u^2} \ddot{\vec{E}}$

Also

$$\left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{E} = 0$$

Ebenfalls kann man zeigen daß

$$\left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{B} = 0$$

* Sei eine Lösung der Form: $\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

* Dann

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{u^2} + i\mu_r\mu_0\sigma\omega = 0$$

Also:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_r\varepsilon_r + i\mu_r\mu_0\omega = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_r \underbrace{\left[\varepsilon_r + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right]}_{\text{Komplexe Dielektrizität-Konstante}}$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2$$

wobei n_c ist ein Komplexes Brechungindex solch daß

$$n_c = \bar{n} + i\gamma \longrightarrow \bar{n}^2 - \gamma^2 + 2i\bar{n}\gamma = \mu_r\varepsilon_r + i\frac{\mu_r\sigma}{\omega\varepsilon_0} = n^2 + i\frac{\mu_r\sigma}{\omega\varepsilon_0}$$

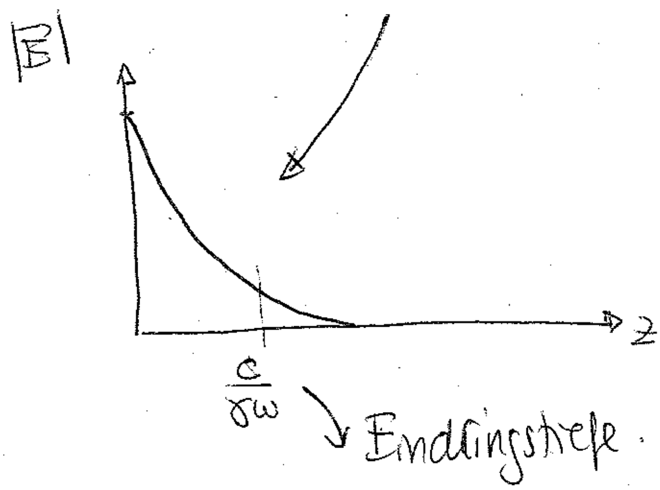
Also

$$\left.\begin{aligned} \bar{n}^2 - \gamma^2 &= n^2 \\ 2\bar{n}\gamma &= \frac{\mu_r\sigma}{\omega\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \bar{n}^2 &= \frac{n^2}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)}\right\} \equiv \text{verallgemeinerter Brechungsindex} \\ \gamma^2 &= \frac{n^2}{2}\left\{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)}\right\} \equiv \text{Extinktionskoeffizient} \end{aligned}$$

Also ~~sei~~ $\vec{k} = k\vec{u}_z \longrightarrow \cancel{k} = \frac{\omega}{c}\bar{n} + \frac{i\omega}{c}\gamma$

Also

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \underbrace{e^{-\frac{\gamma\omega}{c}z}}_{\text{Dämpfung der Amplitude}} \underbrace{e^{i\omega\left[\frac{\bar{n}}{c}z - t\right]}}_{\text{Ebene Welle}}$$



$\frac{c}{\gamma\omega}$ ↘ Eindringstiefe.

* Erzeugung elektromagnetischer Wellen

* Bisher haben wir nur die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen betrachtet. Wir werden nun die Erzeugung von EM-Wellen studieren. Diese wird durch zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilung bewirkt, und deswegen müssen wir nun die inhomogene Maxwell-Gleichungen lösen.

* In der Lorentz-Eichung (S. 170) haben wir (homogenes isotropes Medium)

$$\square \vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_r \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\square \varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \rho(\vec{r},t)$$

(wir benutzen, wie auf S. 77, die Definition $\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$)

(Die Lösungen müssen die Lorentz-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi \overset{!}{=} 0$ erfüllen)

* Diese inhomogene Gleichungen können mit Hilfe der entsprechenden Greensche Funktionen gelöst werden.

(Bemerkung: Ähnlicherweise wie in unserer Diskussion der Poisson-Gleichung auf S. 133)

* Wir werden diese Rechnung hier nicht machen. Am wichtigsten aber ist die physikalische Bedeutung der Lösungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{aligned}}$$

Retardierte Potentialen

$$t_{ret} \equiv t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{u}$$

↑ retardierte Zeit

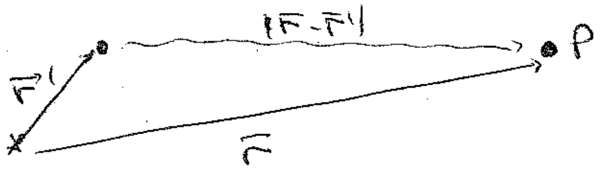
(Bemerkung: die sind die spezielle Lösungen. Die allgemeine Lösungen einer inhomogenen Differentialgleichung sind immer der Form homogene Lösung + spezielle Lösung. Die homogene Lösung sind die Lösungen von $\square\Psi = 0$, und die haben wir schon gesehen).

(Bemerkung (II): Man kann zeigen, dass diese Lösungen die Lorentz-Eichung erfüllen)

* Wo kommt physikalisch diese retardierte Zeit her?

Ganz einfach, wegen der Kausalität. Das Signal, das zur Zeit t am Ort $\vec{r}$ beobachtet wird, ist bedingt durch eine Störung bei $\vec{r}\,'$ in der Entfernung $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ vom Beobachtungsort, die zur früheren, zur retardierten Zeit t_{ret} gewirkt hat.

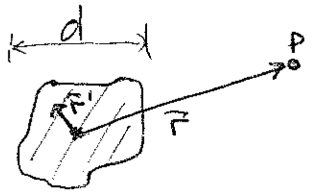
$\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{u}$ = die Zeit, die das Signal benötigt hat, um von $\vec{r}\,'$ nach $\vec{r}$ zu gelangen.



* Wir sehen, daß die retardierte Potentiale eine schon bekannte Form haben, und zwar aus der Elektrostatik (Definition von φ auf S. 109) und aus der Magnetostatik (Definition von $\vec{A}$ auf S. 153). Die Differenz liegt natürlich auf der retardierten Zeitabhängigkeit.

* Zeitlich oszillierende Quellen

* Wir betrachten ein zeitlich oszillierendes System von Ladungen und Strömen in einem abgeschlossenen Raumbereich (mit typischer Größe d). Wir sind interessiert an den Felder für $\vec{r}$ außerhalb des Bereiches. (außerhalb $\rho = \vec{J} = 0$).



Für das zeitlich oszillierende System können wir Fourier-transformieren

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega\, \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega\, \vec{J}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

* Da die Maxwell-Gleichungen linear sind, dann können wir jede Fourier Komponente unabhängig betrachten. Nehmen wir also $\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

* Also die retardierte Lösung für $\vec{A}$ ist der Form:

$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$$

$$= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{u}|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \left[\frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] e^{-i\omega t}$$

$$\equiv \vec{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

(<u>Bemerkung</u>: da $k = \frac{\omega}{u}$, $\vec{A}(\vec{r})$ ist auch eine Funktion von ω)

Also, <u>das elektromagnetische Potential oszilliert mit derselben Frequenz wie die Quelle.</u>

* Da $\vec{r}$ ausserhalb des Bereiches der Ladungen und Ströme liegt, dann $\rho = \vec{J} = 0$ da, und damit sind dort die homogene Maxwell-Gleichung gültig. Also $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \dot{\vec{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\dot{\vec{E}}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}(\vec{\nabla}\times\vec{B}), \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \;\text{ (homogenes isotropes Medium)}$$

Damit

$$\dot{\vec{E}} = u^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B} = u^2\,\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)) = u^2 e^{-i\omega t}\,\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}))$$

Also wenn wir $\vec{A}(\vec{r})$ kennen, kennen wir $\vec{B}$ aber auch $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = i\,\frac{u^2}{\omega}\,e^{-i\omega t}\,\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}))}$$

(<u>Bemerkung</u>: wir brauchen $\varphi(\vec{r},t)$ nicht gesondert zu bestimmen)

* Die Formel für $\vec{A}(\vec{r})$ ist im Allgemeinen nicht direkt integrierbar, aber man kann nützliche Approximationen benutzen, die für physikalisch bedeutenden Fällen nützlich sind.

Wir werden hier nur die sogenannte <u>Strahlungszone</u> studieren.
Wir studieren das Feld weit entfernt von der Quelle, solch dass $d \ll r \ll \lambda$ (d war die typische Größe des Quellenbereiches auf S. 197)

* Damit ist $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$, $k|\vec{r}'| \ll 1$, $k|\vec{r}| \gg 1$

Also $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$ $\simeq$ ← $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'} \simeq r\left[1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right]$ ← Sei $\vec{n} = \vec{r}/r$

$\simeq e^{ikr} e^{-i\vec{n}\cdot(k\vec{r}')} \;\; \underset{\text{aber } k|\vec{r}'| \ll 1}{\simeq}$

$\simeq e^{ikr}$ bis zum 1. Ordnung (nicht verschwindeten)

Also $\dfrac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \dfrac{e^{ikr}}{r}$

Und damit

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}')}$$

Das ist die sogenannte <u>elektrische Dipolstrahlung</u>. Wir werden sofort sehen warum.

* Auf S. 155 haben wir gesehen, daß für stationäre Stromdichten (Magnetostatik) $\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}') = 0$, und damit gab es keine magnetische Monopolen. Das gilt hier nicht mehr.

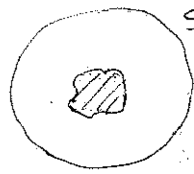
Prüfen wir es. Erstmals:

$$\vec{\nabla}(x_i'\vec{J}) = x_i'\,\vec{\nabla}\vec{J} + \underbrace{\vec{J}\cdot\vec{\nabla}x_i'}_{j_i} \Rightarrow j_i = \vec{\nabla}(x_i'\vec{J}) - x_i'\,\vec{\nabla}\vec{J}$$

Also $\int j_i(\vec r\,')\, d^3r' = \int d^3r'\, \vec\nabla(x_i'\vec J) - \int d^3r'\, x_i'(\vec\nabla\cdot\vec J)$

$$\begin{array}{c} \| \\ \int_S d\vec f\,(x_i'\vec J) \\ \| \\ 0 \end{array}$$

$\longleftarrow$ Für eine Fläche S die das $(\vec J\neq 0)$-Bereich umschließt.



S

- Also

Kontinuitätsgleichung

$$\int \vec J(\vec r\,')\, d^3r' = -\int d^3r'\, \vec r\,'\,(\vec\nabla\cdot\vec J) =$$

$$= -\int d^3r'\, \vec r\,'\, \frac{\partial\rho(\vec r\,',t)}{\partial t} = \qquad \rho(\vec r\,',t) = \rho(\vec r\,')\, e^{i\omega t}$$

$$= -i\omega \underbrace{\int d^3r'\, \vec r\,'\, \rho(\vec r\,')}_{\text{Elektrische Dipolmoment } \vec p}$$

(sieh S. 132)

(Bemerkung: für eine stationäre Strom, dann $\omega=0$, und damit $\int \vec J(\vec r\,')\, d^3r' = 0$, wie wir ~~für~~ die Magnetostatik gesehen haben)

Also $$\boxed{\vec A(\vec r) \simeq -i\omega \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\, \vec p\, \frac{e^{ikr}}{r}}$$

Deswegen heißt dies $\vec A$-Feld die elektrische Dipolstrahlung.

- Aus $\vec B(\vec r) = \vec\nabla\times\vec A(\vec r)$ und $\vec E(\vec r) = i\frac{u^2}{\omega^2}\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A(\vec r))$ (S. 198)

finden wir (ohne Rechnungen):

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\, u k^2 \frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)(\vec n\times\vec p) \overset{kr\gg 1}{\simeq} \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\, u k^2\, \frac{e^{ikr}}{r}(\vec n\times\vec p)$$

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\, \frac{e^{ikr}}{r}\left\{k^2[(\vec n\times\vec p)\times\vec n] + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-ik\right)[3\vec n(\vec n\cdot\vec p)-\vec p]\right\}$$

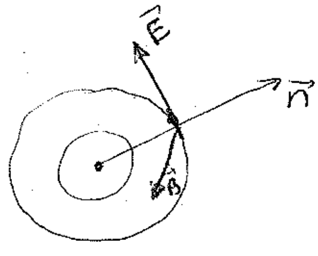
$$\overset{kr\gg 1}{\simeq} u\,[\vec B(\vec r)\times\vec n]$$

* Also für die Strahlungszone bekommen wir

$$\vec{E} = \left[\frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi}\,\omega^2\,[(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}]\right]\frac{e^{ikr}}{r} \equiv \vec{E}_0\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

und $\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}$ bilden lokal ein orthogonales System.

* Also $\vec{E}(\vec{r},t) \simeq \vec{E}_0\,\dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$



also eine Kugelwelle (S. 185).

* Es ist interessant zu sehen wie ist die Energiestromdichte also der Poynting-Vektor, und die Energiedichte des EM-Feldes.

Auf S. 172 haben wir die Energiedichte

$$w(\vec{r},t) = \frac{1}{2}(\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{D})$$

definiert. Jetzt müssen wir ein bisschen aufpassen. Wir haben $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einer komplexen Form geschrieben, aber wir haben gesagt dass nur der Realteil physikalisch bedeutend ist.

also z.B. in der Stromdichte

Komplex

$$\vec{E}\cdot\vec{D} \quad \text{heißt eigentlich} \quad Re(\vec{E})\cdot Re(\vec{D}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{E}+\vec{E}^*)\cdot\frac{1}{2}(\vec{D}+\vec{D}^*) = \frac{1}{4}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{E}\cdot\vec{D}^* + \vec{E}^*\vec{D} + \vec{E}^*\vec{D}^*)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r})\,e^{-i2\omega t} + \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}^*(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r})\cdot\vec{D}^*(\vec{r})\,e^{2i\omega t}\right]$$

Wenn wir ein Zeitmittel über eine Periode $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ machen,

dann $\displaystyle \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} e^{\pm 2i\omega t'}\,dt' = 0$

Komplex

Also die zeitgemittelte Werte $\overline{(\vec{E}\cdot\vec{D})} \Rightarrow \frac{1}{2}Re\left[\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}^*(\vec{r})\right]$

* Also $\overline{w}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left(\vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}^*(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r}) \right)$

· Ähnlicherweise, der Poyntingvektor (S. 172)

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t) \longrightarrow \overline{\vec{S}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})\right]$$

* Für homogene isotrope Media

$$\overline{w}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left\{ (\mu_0\mu_r)^{-1} |B(\vec{r})|^2 + \varepsilon_0\varepsilon_r |E(\vec{r})|^2 \right\} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{|\vec{E}(\vec{r})|^2}{2\mu_0\mu_r u^2}$$

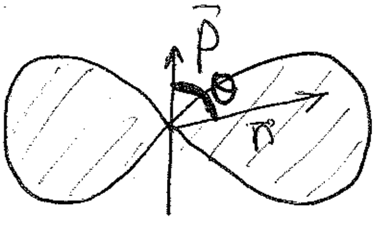
Und

$$\overline{\vec{S}}(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})^*\right] = \frac{u}{2\mu_0\mu_r} \mathrm{Re}\left[[\vec{B}(\vec{r}) \times \vec{n}] \times \vec{B}(\vec{r})^* \right]$$

$$= \vec{n} \frac{u}{2\mu_0\mu_r} |\vec{B}(\vec{r})|^2 = \vec{n}\, u\, \overline{w}(\vec{r}) = \vec{n} \frac{|\vec{E}(\vec{r})|^2}{2\mu_0\mu_r u}$$

* Also $\boxed{\overline{\vec{S}}(\vec{r}) = \underbrace{S_0}_{\text{Konstante}} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \vec{n}}$ $\quad \theta \equiv$ Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{p}$

Die Strahlung ist also anisotropisch ($\sin^2\theta$) und die Intensität der Strahlung zerfällt wie $1/r^2$.



Also je weiter entfernt von der Dipolantenne desto schwächer das Signal. Logisch, oder?

(Bemerkung: Die Energie der Welle hängt also von $|\vec{E}|^2$ ab. $|\vec{E}|^2$ ist also mit der Intensität der Welle verknüpft.
($I \propto |\vec{E}|^2$, außer eine Konstante)

* Liénard-Wiechert-Potenziale

* Eine spezielle Anwendung der retardierten Potenziale entspricht eine Ladung q, die sich längs der Bahn $\vec{R}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{V}(t)$ bewegt.

Ladungsdichte $\rightarrow \rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{R}(t))$

Stromdichte $\longrightarrow \vec{j}(\vec{r},t) = q\,\vec{V}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{R}(t))$

Also die retardierte Potenzialen sind

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int \frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{u}\right) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\,q\int dt'\,\vec{V}(t')\,\frac{\delta\left[\frac{1}{u}|\vec{r}-\vec{R}(t')| - t + t'\right]}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}$$

(ohne weitere Rechnungen)

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\mu_r\,\vec{V}(t_{ret})}{4\pi\left[|\vec{r}-\vec{R}(t_{ret})| - \frac{1}{u}(\vec{r}-\vec{R}(t_{ret}))\cdot\vec{V}(t_{ret})\right]}}$$

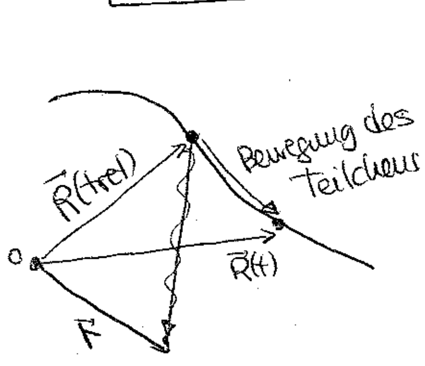
Ähnlicherweise kann man $\varphi(\vec{r},t)$ bestimmen:

$$\boxed{\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\left[|\vec{r}-\vec{R}(t_{ret})| - \frac{1}{u}(\vec{r}-\vec{R}(t_{ret}))\cdot\vec{V}(t_{ret})\right]}}$$

Liénard-Wiechert Potenziale

wobei die retardierte Zeit t_{ret} wird durch die folgende Gleichung bestimmt

$$\boxed{t_{ret}(\vec{r},t) = t - \frac{1}{u}|\vec{r}-\vec{R}(t_{ret})|}$$



• Was heißt das physikalisch? Suchen wir die Abbildung. Wir detektieren die Strahlung in $\vec{r}$ in der Zeit t. Wo kommt diese Strahlung her? Anders gesagt, wo war die Punktladung als die Strahlung erzeugt wurde? Wir müssen "rückwärts" in der Zeit, und zwar beide die Ausbreitung der Strahlung und die Bewegung des Teilchens. Das ergibt die Definition von $t_{ret}(\vec{r},t)$.

* Sei $\vec{D}_{ret}(\vec{r},t) = \vec{r} - \vec{R}(t_{ret}) \Rightarrow$ retardierter Abstandsvektor

$$\vec{n}_{ret}(\vec{r},t) = \frac{\vec{D}_{ret}(\vec{r},t)}{|\vec{D}_{ret}(\vec{r},t)|}$$ $\Rightarrow$ Einheitsvektor in Richtung des retardierten Abstandsvektor

$$K_{ret}(\vec{r},t) = 1 - \frac{1}{u}\vec{n}_{ret}\cdot\vec{V}(t_{ret})$$

Dann

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{D_{ret}(\vec{r},t)\,K_{ret}(\vec{r},t)} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0\mu_r q}{4\pi}\frac{\vec{V}(t_{ret})}{D_{ret}(\vec{r},t)\,K_{ret}(\vec{r},t)} \end{aligned}}$$

* Wir können nun $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}$ und $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ rechnen.

Ohne weitere Rechnungen:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{K^3_{ret}(\vec{r},t)}\left[\frac{(\vec{n}_{ret}(\vec{r},t) - \vec{\beta}(t_{ret}))(1 - |\vec{\beta}(t_{ret})|^2)}{|\vec{D}_{ret}(\vec{r},t)|^2} + \frac{\vec{n}_{ret}(\vec{r},t)\times\left[(\vec{n}_{ret}(\vec{r},t) - \vec{\beta}(t_{ret}))\times\left(\frac{\vec{a}(t_{ret})}{u}\right)\right]}{u\,|\vec{D}_{ret}(\vec{r},t)|}\right]}$$

wobei $\vec{\beta}(t_{ret}) \equiv \frac{\vec{V}(t_{ret})}{u}$

$\vec{a}(t_{ret}) \longrightarrow$ Beschleunigung

und $$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{u}\left[\vec{n}_{ret}(\vec{r},t)\times\vec{E}(\vec{r},t)\right]}$$

* Also in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gibt es 2 Gliedern
  * Beschleunigungsunabhängig $\rightarrow$ zerfallen wie $1/r^2$
  * Beschleunigungsabhängig $\longrightarrow$ zerfallen wie $1/r$

* Wir sind hier an der Energieabstrahlung interessiert, also am Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{E} \times \vec{B}$$

Die Energiestrahlung durch eine Fläche ist (S. 177) $\oint \vec{S} \cdot d\vec{f}$. Wenn die Fläche zu ∞ geht, geht die Fläche wie r^2. Also alle Gliedern von $\vec{S}$ die schneller als $1/r^2$ zerfallen tragen zur Energiestrahlung nicht bei. Also nur die beschleunigungs-abhängige Gliedern sind hier wichtig.

Also
$$\boxed{\vec{S} = \frac{q^2 \vec{n}_{ret}}{16\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r u} \frac{\left[\vec{n}_{ret} \times \left[(\vec{n}_{ret} - \vec{\beta}_{ret}) \times (\vec{a}_{ret}/u)\right]\right]}{k_{ret}^6 |\vec{D}_{ret}|^2}}$$

* Der entscheidende Punkt ist hier, dass nur beschleunigte Teilchen ($\vec{a} \neq 0$) Energie abstrahlen (die Energieströmung hat die Richtung von $\vec{n}_{ret}$.)

* Das war irgendwie zu erwarten. Wenn q sich mit einer konstante Geschwindigkeit bewegt, dann können wir das Problem als Elektrostatik verstehen (und zwar im Ruhesystem der Ladung) (sieh Diskussion auf S. 164).

* Die Tatsache, dass beschleunigte Teilchen ~~Energie~~ abstrahlen, ist extrem wichtig. z.B. in einem Teilchenbeschleuniger (wie am CERN) hat man Elektronen die sich in Kreisen bewegen. Diese Bewegung ist natürlich nicht uniform, sondern beschleunigt, und daher erzeugen die Elektronen eine Strahlung (so genannte Synchrotronstrahlung) und verlieren damit Energie (die korrigiert sein muss).

* Bemerkung: Diese Strahlung spielt auch eine entscheidende Rolle in den späteren Überlegungen von Bohr über das Atom-Modell. Das spielt eine fundamentelle Rolle in der Entstehung der Quantenmechanik!