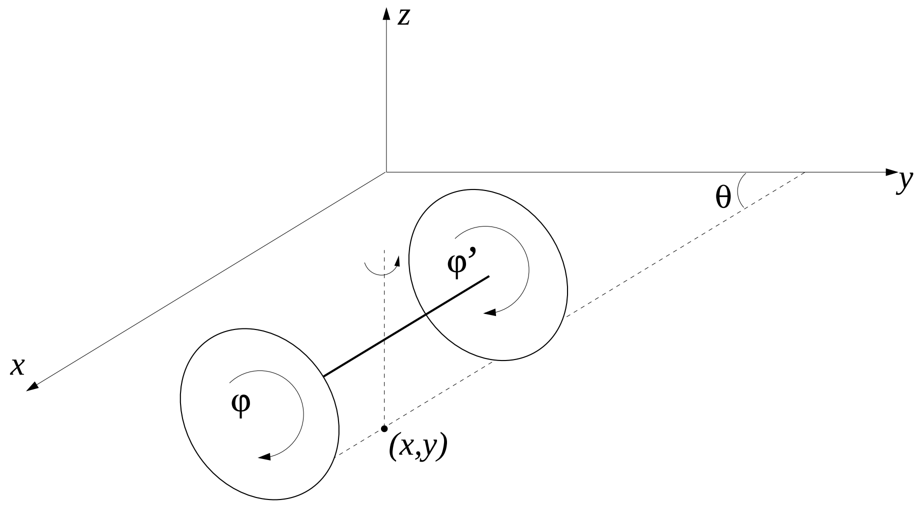
Klassische Teilchen und Felder

Hausübung, Blatt 06 **WS 08/09** **Abgabetermin: 25.11.2008**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Garu Gebreyesus & Tobias Wirth

[H16] rollende Hantel **6 Punkte**

Betrachten Sie zwei Räder der Masse m mit Radius a, die auf den Enden einer gemeinsamen masselosen Achse der Länge b montiert sind und sich unabhängig voneinander drehen können. θ sei der Winkel dieser Achse mit der y-Achse (siehe Abbildung). Die Drehwinkel der beiden Räder seien ϕ und ϕ' und der Mittelpunkt der Achse liege am Punkt (x, y). Diese Anordnung rollt ohne zu rutschen über die xy-Ebene.



a) Zeigen Sie, dass für das System 2 nicht-holonome Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned}\sin\theta\,\mathrm{d}x - \cos\theta\,\mathrm{d}y &= 0\\ \cos\theta\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,\mathrm{d}y &= a\,\mathrm{d}\Phi \qquad \text{mit } \Phi = \frac{\varphi+\varphi'}{2}\end{aligned}$$

sowie eine holonome Zwangsbedingung

$$\eta = c + \frac{b}{a}\theta \qquad \text{wobei } \eta = \varphi - \varphi' \text{ und } c \equiv \text{const}$$

existieren.

b) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der generalisierte Koordinaten $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \Phi$ und $q_4 = \theta$.

Lösungshinweis: $L = m(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2) + I_1\,\dot{q_3}^2 + \frac{3}{4}\,I_2\,\dot{q_4}^2$ mit $I_1 = \frac{m}{2}a^2$ und $I_2 = \frac{m}{2}b^2$

c) Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art mit 2 Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2.

Lösungshinweis: $2m\ddot{q}_1 = \lambda_1\sin q_4 + \lambda_2\cos q_4$; $2m\ddot{q}_2 = -\lambda_1\cos q_4 + \lambda_2\sin q_4$; $2I_1\ddot{q}_3 = -a\lambda_2$; $\frac{3}{2}I_2\ddot{q}_4 = 0$

d) Lösen Sie die Gleichungen.

Lösungshinweis: $x = x_0 + \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$ mit $x_0, v_0 \equiv$ Konstanten und $\Omega = \dot{\theta} =$ konst

Bitte wenden

[H17] System von Massepunkten **1 Punkte**

Gegeben ist ein System von N Massepunkten $\{m_i\}_{i=1\dots N}$ mit Koordinaten $\{\vec{r}_i\}$. Es gibt $S = 3N - P$ tatsächliche Freiheitsgrade ($P \equiv$ Anzahl holonomer Zwangsbedingungen). Dann ist $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_S, t)$ wobei $(q_1, \dots, q_S)$ die generalisierten Koordinaten sind. Die Massepunkte erfahren ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$.

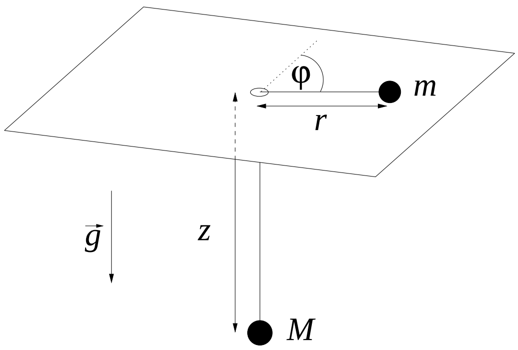
Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion von der Form

$$L(q_1, \dots, q_S; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S; t) = \sum_{j,\ell=1}^{S} \mu_{j\ell} \dot{q}_j \dot{q}_\ell + \sum_{j=1}^{S} \alpha_j \dot{q}_j + \alpha - V(q_1, \dots, q_S; t)$$

ist und geben Sie die Koeffizienten $\mu_{j\ell}$, α_j und α an.

[H18] Zentral gezogene Kugel **3 Punkte**

Eine Punktmasse m kann sich in der xy-Ebene reibungsfrei bewegen und ist über einen masselosen Faden der Länge c durch ein Loch in der Ebene vernachlässigbarem Durchmessers mit einer Masse M verbunden, welche sich nur in z-Richtung bewegen kann.



a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L = L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi})$.
Hinweis: Benutzen Sie $r + z = c =$ konstant, dabei ist c die (konstante) Länge des Fadens. Als Ergebnis müssen Sie $L = T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) - V(r)$ erhalten.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass eine der Gleichungen der Erhaltung des Drehimpulses der Masse m entspricht. Schreiben Sie damit $\dot{\varphi}$ als Funktion von $|\vec{r}|$ für die Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = (a, 0), \vec{v}_0 = (0, v_0)$.

c) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für r (ohne sie zu lösen) in der Form $m\ddot{r} = F(r)$, wobei F eine Funktion ist.

Bitte geben Sie auf jeder Ausarbeitung der Hausübungen ihren Namen, Gruppe, Matrikelnummer, und Studiengang an!

Abgabe der Ausarbeitungen der Hausübungen ist Dienstags VOR der Vorlesung, d.h. bis 08:15 Uhr. Eine spätere Abgabe ist nicht möglich!

Meldungszeitraum für Bachelorstudiengang beachten: 12.-28. November