Klassische Teilchen und Felder

Hausübung, Blatt 07 **WS 08/09 Abgabetermin: 02.12.2008**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Garu Gebreyesus & Tobias Wirth

[H19] Hamilton Formalismus **4 Punkte**

Zwei Teilchen mit Masse m bewegen sich in einer Dimension x.
Die Teilchen erfahren ein externes harmonisches Potential

$$V_{\mathrm{HO}}(x_1, x_2) = \frac{m}{2}\omega^2\,(x_1^2 + x_2^2)$$

und außerdem eine abstoßende Wechselwirkung zwischeneinander

$$V_{\mathrm{Int}}(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{|x_1 - x_2|} \qquad \text{mit } \gamma > 0 \quad .$$

a) Benutzen Sie als generalisierte Koordinaten die Schwerpunkt- und Relativkoordinaten $(X_{\mathrm{cm}}\,, x_r)$. Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion in 2 unabhängige Teile zerlegt werden kann:

$$H = H_{\mathrm{cm}}(X_{\mathrm{cm}}\,, P_{\mathrm{cm}}) + H_r(x_r\,, p_r) \quad ,$$

wobei P_{cm} und p_r die entsprechenden generalisierten Impulse von X_{cm} und x_r sind.

b) Zeichnen Sie die Bahnen in den Phasenräumen $(X_{\mathrm{cm}}\,, P_{\mathrm{cm}})$ und $(x_r\,, p_r)$.

c) Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen auf. Bestimmen Sie damit die Gleichungen für $\ddot{X}_{\mathrm{cm}}$ und $\ddot{x}_r$ (ohne diese zu lösen).

[H20] Teilchen auf Ebene **4 Punkte**

Eine Masse m bewegt sich auf der xy-Ebene im Potential $V(\rho) = -\gamma/\rho$ wobei $\gamma > 0$ eine Konstante ist und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion von der Form

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{\gamma}{\rho}$$

ist, wobei p_ρ und p_φ die kanonisch konjugierten Variablen von ρ bzw. φ (Polarkoordinaten) sind.

b) Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen auf.
Bestimmen Sie die Gleichung für $\ddot{\rho}$ (ohne diese zu lösen).

c) Berechnen Sie $\{A_x, H\}$ für

$$A_x = m\rho^2\,\dot{\varphi}\,(\dot{\varphi}\,\rho\,\cos\varphi + \dot{\rho}\,\sin\varphi) - \alpha\,\cos\varphi.$$

Für welche Wahl der Konstanten α ist A_x eine Erhaltungsgröße?
Bemerkung: A_x ist die x-Komponente des Runge-Lenz-Vektors $\vec{A} = \vec{L} \times \vec{v} - \alpha\,\vec{e}_\rho$ (vgl. [P7]).

Bitte wenden

[H21] Eigenschaften der Poisson-Klammer **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass aus der Definition der Poisson-Klammer

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}$$

(der Einfachheit halber benutzen Sie nur eine Koordinate) folgende Eigenschaften folgen (α, β Konstanten)

- Antisymmetrie $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- Linearität $\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}$
- Produktregel $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$
- Jacobi-Identität $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

Bitte geben Sie auf jeder Ausarbeitung der Hausübungen ihren Namen, Gruppe, Matrikelnummer, und Studiengang an!

Abgabe der Ausarbeitungen der Hausübungen ist Dienstags <u>VOR</u> der Vorlesung, d.h. bis <u>08:15 Uhr</u>. Eine spätere Abgabe ist nicht möglich!

Meldungszeitraum für Bachelorstudiengang beachten: 12.-28. November

Anmeldungen für die mündlichen Prüfungen möglich bei Fr. Schwebs (Appelstr. 2, nördlich gegenüber Raum 269)