Klassische Teilchen und Felder

Präsenzübung, Blatt 09 **WS 08/09 09.12.2008**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Garu Gebreyesus & Tobias Wirth

[P16] Mathematische Eigenschaften

In der Diskussion des Dipols in der Theorievorlesung wurden ein paar mathematische Eigenschaften ausgenutzt, mit denen Sie sich nun auseinandersetzen sollen.

a) Verifizieren Sie die in der Vorlesung benutzte Taylorentwicklung:

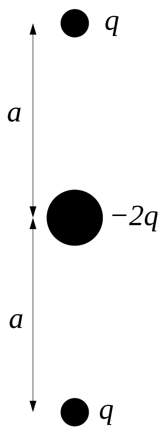
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{a})^2 - r^2a^2}{r^5}\right] + \mathcal{O}\left(\left(\frac{a}{r}\right)^3\right)$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Produktregel gültig ist

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} + \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \vec{b}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) + \vec{a}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right)$$

Hinweise: Benutzen Sie für a) die Taylorentwicklung von $(1+x)^{-1/2}$.
Für b) benutzen Sie, dass $\vec{a}\times\vec{b} = \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}a_j b_k \vec{e}_i$ ist und dass die Identität $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{km\ell} = \delta_{im}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jm}$ gilt.

[P17] Dipolmoment und Quadrupoltensor



Gegeben ist eine Ladungsverteilung der Form

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(x)\delta(y)\left[\delta(z) - 2\delta(z-a) + \delta(z-2a)\right] \quad .$$

a) Wie ist die Gesamtladung? Bestimmen Sie das Dipolmoment.

b) Finden Sie den Quadrupoltensor q_{ij}.

c) Wie lautet das skalare Potential?

d) Bestimmen Sie das $\vec{E}$-Feld.

Hinweis: Benutzen Sie die Kugelkoordinaten: $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$.