Klassische Teilchen und Felder

Präsenzübung, Blatt 12 **WS 08/09 13.01.2009**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Garu Gebreyesus & Tobias Wirth

[P25] Allgemeine Lösung der Wellengleichung

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die ebene Welle eine spezielle Lösung der homogenen Wellengleichung $\Box\,\vec{\psi} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\psi} = 0$ ist. Man kann aber ebene Wellen benutzen, um eine allgemeine Lösung der Wellengleichung mit Hilfe der Fouriertransformation zu finden.

Sei $\Box\,\vec{\psi} = 0$ mit $\vec{\psi}(\vec{r}, t = 0) = \vec{\psi}_0(\vec{r})$ und $\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}(\vec{r}, t = 0) = \vec{v}_0(\vec{r})$.

a) Benutzen Sie die 4-dimensionale Fouriertransformation

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\,\omega\,\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

und zeigen Sie, dass $\omega = \pm ku$ mit $k \equiv |\vec{k}|$. Welche Bedeutung hat u?

b) Sei $\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega) = \vec{a}_+(\vec{k})\delta(\omega + ku) + \vec{a}_-(\vec{k})\delta(\omega - ku)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation, dass

$$\vec{a}_\pm(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r\,\mathrm{e}^{-\vec{k}\cdot\vec{r}}\left[\vec{\psi}_0(\vec{r}) \mp \frac{\mathrm{i}}{ku}\vec{v}_0(\vec{r})\right] \quad .$$

c) Schreiben Sie dann $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$ als

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \int \mathrm{d}^2r'\,\{\dot{D}(\vec{r} - \vec{r}\,', t)\vec{\psi}_0(\vec{r}\,') + D(\vec{r} - \vec{r}\,', t)\vec{v}_0(\vec{r}\,')\} \quad .$$

Wie sieht D aus?

Hinweis: Wir benutzen als Definition der Fourier-Transformation (in 1D)

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

und in der Zeit

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad , \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad .$$

[P26] Dispersive Medien, Gruppengeschwindigkeit

Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung ist von der Form

$$\vec{\psi}_\pm(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3k \, \frac{\vec{a}_\pm(\vec{k})}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}\pm\omega t)} \quad .$$

Sei $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und $\vec{e}$ eine lineare Polarisationsrichtung, so dass $\vec{\psi}_\pm(\vec{r},t) = \psi_\pm(z,t)\vec{e}$. Dann ist

$$\psi_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, b(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz\pm\omega t)}$$

mit einer Gewichtsfunktion $b(k)$.

Für die so genannten dispersiven Medien ist $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$ und damit $\omega = \omega(k)$ aber nicht unbedingt $\omega = ku$.

Sei $b(k) \neq 0$ nur auf einem schmalen Bereich um $k = k_0$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass

$$\psi_\pm(z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z\pm\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \, b(k_0+q) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(z\pm v_g t)}$$

ist, wobei $q \equiv k - k_0$, $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$ und $v_g \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\,(k = k_0)$.
v_g ist die so genannte Gruppengeschwindigkeit.

b) Sei $b(k) = \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-4(k-k_0)^2/\Delta k_0^2}$.
Zeigen Sie

$$\psi(z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z\pm\omega_0 t)} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z\pm v_g t)} \quad .$$

Wie sieht $|\psi|^2$ aus? Wie verhält sich $|\psi(z,t)|^2$ in der Zeit?

[P27] Maxwell-Gleichungen in verschiedenen Einheitensystemen

Gegeben seien die Maxwellgleichungen

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \kappa\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \mathrm{rot}\,\vec{B} - \kappa\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \kappa\mu_0\vec{j}$$

sowie die Kraftgleichung

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \kappa\vec{v}\times\vec{B}) \quad .$$

Wie lauten die Gleichungen in den reskalierten Größen

$$\vec{B}_G = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\vec{B},\ \vec{E}_G = \sqrt{4\pi\epsilon_0}\vec{E},\ \rho_G = \frac{\rho}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}},\ \vec{j}_G = \frac{\vec{j}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad ?$$

Benutzen Sie dazu $\kappa\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \frac{1}{c}$.