Klassische Teilchen und Felder

Präsenzübung, Blatt 13 **WS 08/09 20.01.2009**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Garu Gebreyesus & Tobias Wirth

[P28] Liénard-Wiechert-Potentiale

Eine Punktladung q, die sich längs der Bahn $\vec{R}(t)$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bewegt, verursacht die retardierten Potentiale (Liénard-Wiechert-Potentiale)

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{1}{|\vec{D}_{\text{ret}}(\vec{r},t)|\kappa_{\text{ret}}(\vec{r},t)} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0\mu_r q}{4\pi}\frac{\vec{v}(t_{\text{ret}})}{|\vec{D}_{\text{ret}}(\vec{r},t)|\kappa_{\text{ret}}(\vec{r},t)} \quad ,\end{aligned}$$

wobei $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{u}|\vec{r} - \vec{R}(t_{\text{ret}})|$ (implizite Gleichung für die retardierte Zeit t_{ret}), $\vec{D}_{\text{ret}} = \vec{r} - \vec{R}(t_{\text{ret}})$ retardierter Abstandsvektor, und $\kappa_{\text{ret}}(\vec{r},t) = 1 - \frac{\vec{V}(t_{\text{ret}})}{u}\left(\frac{\vec{D}_{\text{ret}}(\vec{r},t)}{|\vec{D}_{\text{ret}}(\vec{r},t)|}\right)$.

Sei $\vec{V}(t) = \vec{v}_0 = \text{const}$, also $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$.

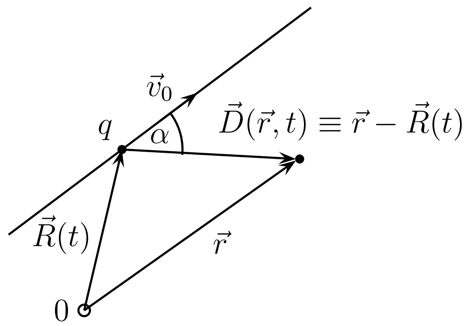
Finden Sie die folgende Gleichung für t_{ret}

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{D(\vec{r},t)}{u^2 - v_0^2}\left(v_0\cos\alpha + \sqrt{u^2 - v_0^2\sin^2\alpha}\right) \quad ,$$

wobei $\vec{D}(\vec{r},t)\cdot\vec{v}_0 = Dv_0\cos\alpha$.

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}D_{\text{ret}}\kappa_{\text{ret}} &= D_{\text{ret}} - \frac{1}{u}\vec{V}(t_{\text{ret}})\cdot\vec{D}_{\text{ret}} \\ &= |\vec{r} - \vec{R}(t)|\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{u^2}\sin^2\alpha}\end{aligned}$$



und damit

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r|\vec{r} - \vec{R}(t)|}\frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2\sin^2\alpha}} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{1}{u^2}\vec{v}_0\varphi(\vec{r},t).\end{aligned}$$

Was passiert für $\vec{v}_0 = 0$?

Bitte wenden

[P29] Wellenausbreitung in elektrischen Leitern

In einem so genannten Ohmschen Leiter sind die Stromdichte $\vec{j}$ und das $\vec{E}$-Feld miteinander über

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

verbunden. Hierbei ist σ die elektrische Leitfähigkeit.

Sei $\rho = 0$. Man betrachtet im Folgenden ein homogenes isotropes Medium ($\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$).

Schreiben Sie die Maxwell-Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf.

Finden Sie die modifizierten Wellengleichungen (Telegraphengleichungen)

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{E} &= 0 \, , \\ \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{B} &= 0 \, . \end{aligned}$$

Wir machen den Lösungsansatzes $\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)}$. Verifizieren Sie, dass k komplex sein muss und von der Form

$$k = \frac{\omega}{c} \bar{n} + \mathrm{i} \frac{\omega}{c} \gamma$$

ist. Dabei ist

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= \frac{n}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right)^2} \right) \\ \gamma^2 &= \frac{n}{2} \left(1 + \sqrt{-1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right)^2} \right) \, . \end{aligned}$$

Wie sieht $|\vec{E}|$ aus?

[P30] Kugelwellen

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die homogene Wellengleichung von der Form

$$\Box \vec{E} = 0$$

ist. Hierbei ist $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ mit der Phasengeschwindigkeit u.

Wir suchen nun nach kugelsymmetrischen Lösungen von der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(r, t).$$

Zeigen Sie, dass diese Lösungen die Form

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr \pm \omega t)}$$

haben – also $1/r$ mal eine ebene Welle. Diese Lösungen sind so genannte Kugelwellen.

Wie sehen die Flächen gleicher Phase aus?