## MOTIVATION

- In dieser Vorlesungsreihe werden wir die "Welt" der nichtlinearen Dynamik und des Chaos erforschen. Diese "Welt" wird typischerweise in der Vorlesungen über Klassischer Physik nicht behandelt. Trotzdem spielt die nichtlineare Dynamik eine sehr wichtige Rolle in der Physik (und nicht nur in der Physik, wie wir bald sehen werden).

- Bevor wir mit der Diskussion der dynamischen Systemen anfangen, sollten wir einige Begriffe klar haben.

- Ein dynamisches System wird durch eine Differenzialgleichung beschrieben

(Bemerkung: Wir betrachten kontinuierliche Zeit, für diskreten Zeitschritten hat man die sogen. Abbildungen („maps" auf Englisch), aber die werden wir nur viel später in dieser Vorlesungsreihe behandeln).

- In dieser Vorlesungsreihe sind wir nur in Zeitentwicklungen interessiert, und daher nur an gewöhnlichen Differenzialgleich. Wir wissen (aus RdPI), dass alle gewöhnlichen Differenzialgleich. (GDG) als ein System GDG erster Ordnung geschrieben werden können:

$$\dot{x}_1 = f_1(x, \dots x_n)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x, \dots x_n)$$

$$\left( \text{z.B. } \ddot{x} = -\gamma \dot{x} - k x \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x} \equiv x_2 \\ x \equiv x_1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 - k x_1 \end{matrix} \right)$$

- Die GDG ist linear, wenn die $x_j$'s nur mit Potenz 1 auftauchen

(z.B. $\ddot{x} = -\gamma \dot{x} - k x$ ist linear)

- Die GDG ist nichtlinear wenn das nicht der Fall ist.

z.B. $\ddot{x} = -k \sin x \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k \sin x \end{cases} \leftarrow$ Pendulum-Gleichung.

Nichtlineare Gleichungen sind viel schwieriger als lineare Gleichungen. Für lineare Gleichungen man kann das Problem in "Teilen" spalten, und dann die individuelle Lösungen kombinieren (z.B. Fourier-Transfo.). Für nichtlineare Gleichungen ist das leben viel komplizierter (aber vielleicht auch interessanter!)

* In dieser Vorlesungsreihe werden wir erstmal Probleme der Form $\dot{x} = f(x)$ untersuchen (also $n=1$ in S. 1), wo wir wichtige Ideen (Fixpunkt, Bifurkation) lernen werden. Später werden wir $n=2$ Probleme (wie z.B. der harmonischer Oszillator, der Pendulum, Lotka-Volterra Systeme, usw). Nur später werden wir $n \geq 3$ Probleme untersuchen, wo Chaos auftauchen kann (z.B. Lorenz-Modell).

* Wir werden in dieser Vorlesungsreihe mehrere Beispiele untersuchen, und zwar nicht nur in der Physik, sondern auch in der Biologie, Chemie, Soziologie(!!), und mehr. Wir werden sehen, dass Dynamische Systeme viele viele Anwendungen haben können.

## • PROBLEME IN 1D

* Wir werden unsere Diskussion mit dynamischen Systemen, die durch eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = f(x)$$

beschrieben werden.

(Bemerkung: f weisst keine explizite Zeitabhängigkeit auf, sonst hätten wir ein 2D Problem $x_1 = x,\ x_2 = t \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases}$ )

* Nehmen wir ein Beispiel:

$$\dot{x} = \sin x$$

Diese Gleichung ist relativ einfach zu lösen:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x \longrightarrow dt = \frac{dx}{\sin x} \longrightarrow t = -\ln\left|\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\tan x}\right| + \underset{\text{Konstante}}{C}$$

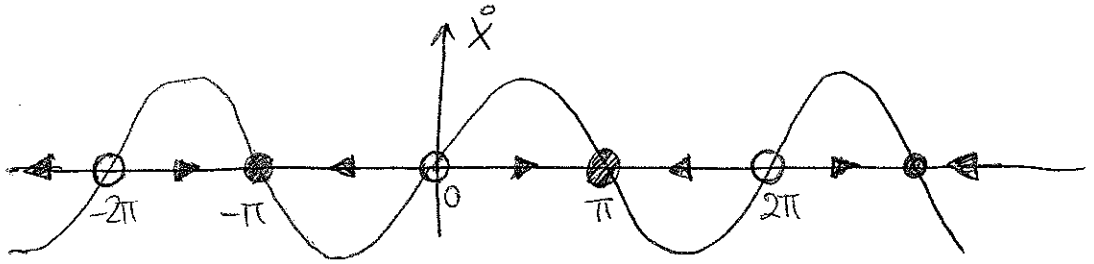
Wenn $x(t=0) = x_0 \Rightarrow C = \ln\left|\frac{1}{\sin x_0} + \frac{1}{\tan x_0}\right|$

$$\Rightarrow \boxed{t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x_0}\right|} \qquad \left(\begin{array}{l}\csc \equiv 1/\sin \\ \cot \equiv 1/\tan\end{array}\right)$$

Gut, nun haben wir die Lösung, aber es ist schwierig eine gute Ahnung zu kriegen, was eigentlich mit dem System passiert.

* Der Punkt ist, dass man eine gute grobe Ahnung kriegen kann, und zwar einfach aus der grafischen Analyse der Gleichung $\dot{x} = \sin x$. Das ist nützlich, und wir werden das mehrmals benutzen, also gucken wir, wie das geht.

$\dot{x} = f(x)$ ← diese Funktion spielt die Rolle eines Vektorfeldes auf der x-Achse. Das Vektorfeld sagt uns wie ist $\dot{x}$ auf jedem Punkt $x$.




* Die Pfeilen zeigen in welche Richtung $\dot{x}$ geht (wenn $\dot{x}>0$ ist, dann zeigt der Pfeil nach Rechts, und wenn $\dot{x}<0$ dann ←).
Wenn $\dot{x}=0$ dann hat man ein <u>Fixpunkt</u>. Aber Fixpunkte können stabil (●) oder instabil (○) sein. Ein Fixpunkt ist stabil, wenn die Pfeilen zeigen innerwärts, und instabil wenn die nach außen zeigen.

* Also z.B., wenn $x_0 = \pi/4$, dann $x$ bewegt sich nach Rechts schneller bis $\pi/2$ und dann langsamer bis $\pi$, wo es ein stabiler Fixpunk gibt.


Also qualitativ $x(t)$ sieht so aus

* So ein Bild erlaubt uns, eine große Ahnung über die Dynamik zu haben, sogar ohne das Problem exakt zu lösen (!!)

* Das gilt für beliebige Funktion $f(x)$.
Sehen wir nun ein Problem der Biologie als Beispiel.

## * Die logistische Gleichung

* Wir sind nun an dem Problem des Wachstums von Populationen interessiert. Sei $N \equiv$ Anzahl von Organismen in einer Population.
* Eine erste Näherung für die Wachstumsgleichung wäre etwas der Form:

$$\dot{N} = rN \quad (\text{wobei } r \equiv \text{Wachstumsrate ist}) \leftarrow r > 0$$

Die Lösung wäre $N(t) = e^{rt} N_0 \quad (N_0 = N(0))$

Die Lösung ist aber nicht sehr realistisch. Das Wachstum wird eventuell abgebremst, weil die Ressourcen irgendwie endlich sind (z.B. die Nahrungsmitteln sind endlich)

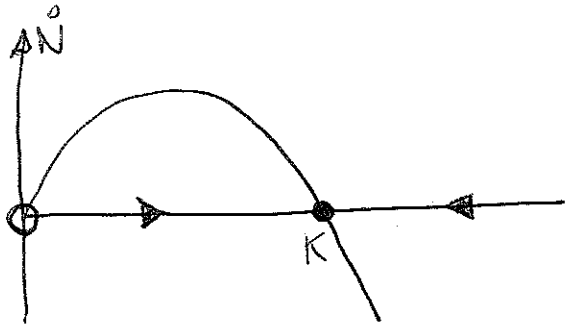
* Eine beste Näherung sollte also 2 Punkten berücksichtigen:
  - Wenn $N$ klein ist $\rightarrow$ exponentielles Wachstum
  - Wenn $N$ wächst über eine gewisse Grenze ($K$) wird die Wachstumsrate negativ (also mehr Organismen werden sterben als geboren) ($K \equiv$ Kapazität)

Das bringt uns zur logistischen Gleichung

$$\boxed{\dot{N} = rN\left[1 - \frac{N}{K}\right]}$$

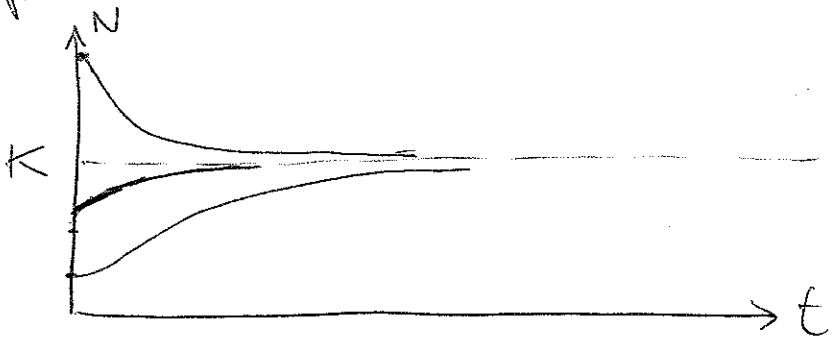
$\rightarrow$ Man kann diese Gleichung analytisch lösen, aber das ist eigentlich nicht unser Punkt hier.

* Diese Gleichung ist noch mal der Form $\dot{x} = f(x)$, wobei nun $x = N$ und $f(x) = rN(1 - N/K)$. Wir analysieren die Gleichung graphisch, wie auf S. 4.




Wir identifizieren 2 Fixpunkte:
- Stabil ($N^* = K$)
- Instabil ($N^* = 0$)

- Also für alle Anfangspopulationen ($N_0$), man hat, dass die Population die Kapazität $K$ asymptotisch annähert.




* <u>Lineare Stabilitätsanalyse</u>

* Bisher haben wir die Stabilität der Fixpunkte graphisch studiert, aber manchmals will man etwas quantitativer sein. Das geht relativ einfach mit der Idee der linearen Stabilitätsanalyse.

* Sei $x^*$ einer Fixpunkt

Sei $\eta(t) = x(t) - x^*$ $\longrightarrow$ eine kleine Störung um $x^*$

Dann $\dot{\eta}(t) = \dot{x}(t) = f(x) = f(\eta + x^*) \underset{\text{Taylor}}{\simeq} \underbrace{f(x^*)}_{\text{Null, weil } x^* \text{ ein Fixpunkt ist.}} + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$

Also $\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$

Wenn $f'(x^*) \neq 0$ $\longrightarrow$ $\dot{\eta} \simeq \eta f'(x^*)$ für kleine Störungen $\eta$.

und damit $\eta(t) = \eta_0 e^{f'(x^*)t}$

- Also wenn
  - $f'(x^*) > 0$ $\longrightarrow$ $\eta(t)$ wächst exponentiell $\rightarrow$ <u>instabiler Fixpunkt</u>
  - $f'(x^*) < 0$ $\longrightarrow$ $\eta(t)$ zerfällt exponentiell $\rightarrow$ <u>stabiler Fixpunkt</u>

Also die Steigerung von $f(x)$ am Fixpunkt $x^*$ bestimmt die Stabilität des Fixpunktes.

* <u>Beispiel</u> (logistische Gleichung):

$$f(N) = rN\left(1 - N/K\right) \longrightarrow f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

$$N^* = 0 \longrightarrow f'(0) = r > 0 \longrightarrow \text{instabiler Fixpunkt}$$

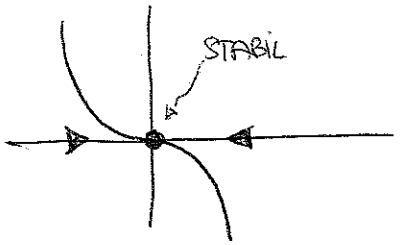
$$N^* = K \longrightarrow f'(K) = -r < 0 \longrightarrow \text{stabiler Fixpunkt}$$

---

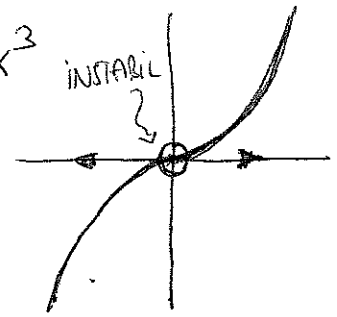
* <u>Bemerkung</u>: <u>Was passiert wenn $f'(x^*) = 0$</u> ??

Dann, in allgemeinen, können wir nichts sagen, und man muss die verschiedene Fälle individuell untersuchen. Zum Beispiel:

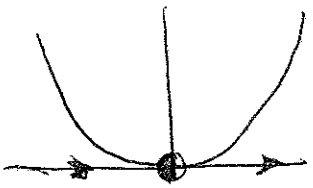
$\dot{x} = -x^3$ :




$\dot{x} = x^3$




$\dot{x} = x^2$



← hier $x^* = 0$ ist halbstabil. Diese komische Fälle spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der <u>Bifurkationen</u>, wie wir bald sehen werden!

* <u>Bemerkung</u> (II):

* Für 1D Probleme ($n = 1$) gibt es im Prinzip keine Oszillationen, d.h. die Lösung geht in Richtung stabiler Fixpunkte und raus von instabiler Fixpunkte, aber es gibt kein Umkehr.

* Man kann aber periodische Lösungen finden, wenn $x$ auf einem Kreis ist $\longrightarrow \dot{\theta} = f(\theta)$ wobei $\theta \in [0, 2\pi]$. Wir werden diese Probleme später untersuchen.

## • BIFURKATIONEN

* Wir haben gerade gesehen, daß die $n=1$ Probleme $\dot{x}=f(x)$ durch den 1D-Fluß (die Pfeilen) beschrieben werden können. Die Funktion $f(x)$ kann eine Funktion von Parametern sein, und in Abhängigkeit von diesen Parametern kann man die Natur des 1D-Flusses ändern. Fixpunkte können erzeugt oder zerstört werden, oder die Stabilität kann sich ändern. Das bringt uns zu der Idee der Bifurkation.
* Wir werden nun mit der einfachsten aller Bifurkationen anfangen.

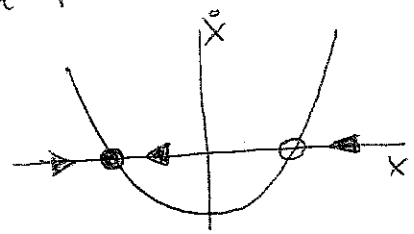
## * SADDLE-NODE BIFURKATION

* In diesen Bifurkationen werden 2 Fixpunkte aneinander gebracht und zerstört.
* Der Prototyp dieser Bifurkation wird von der Gleichung

$$\dot{x} = r + x^2$$

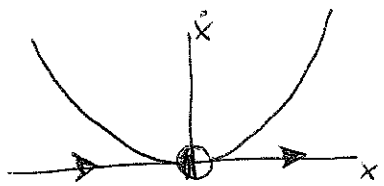
gegeben, wo sei $r$ ein Parameter ist.

Sei $r<0$:



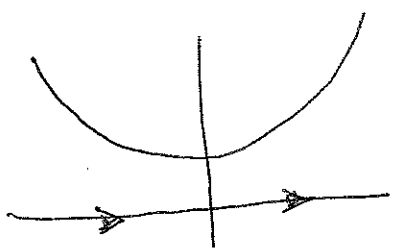

$\Rightarrow$ Es gibt 2 Fixpunkte (stabil und instabil)

Sei $r=0$



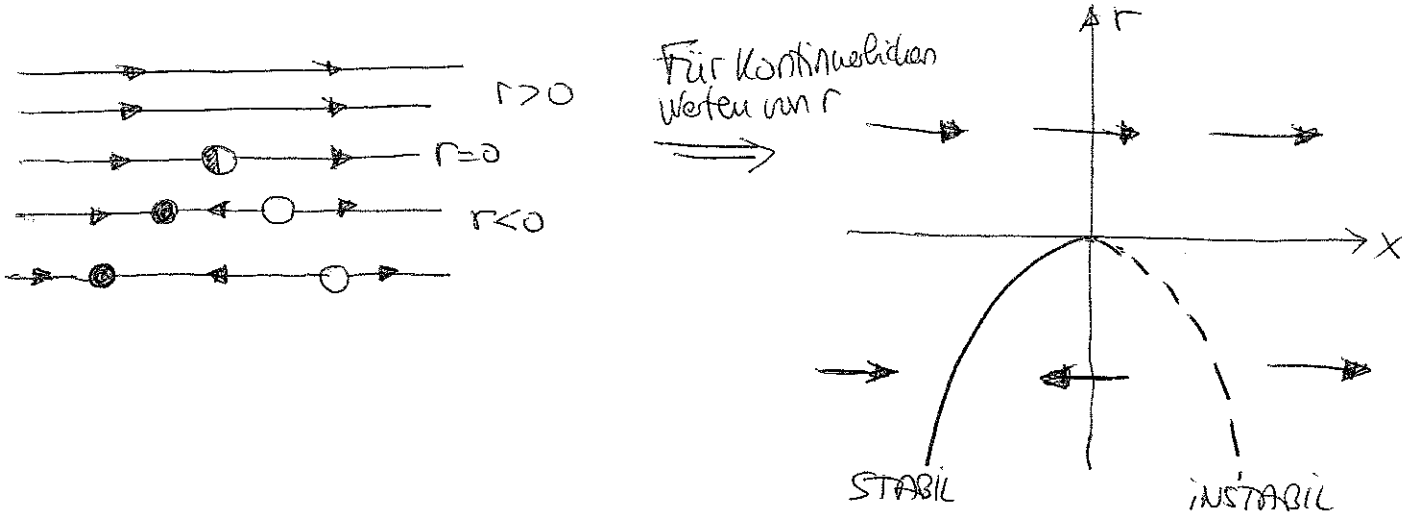

$\Rightarrow$ Ein halbstabiler Fixpunkt

Sei $r>0$

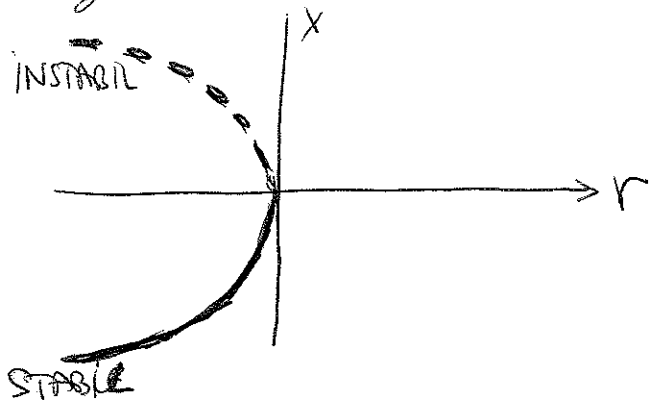


$\Rightarrow$ Kein Fixpunkt mehr!

* Also, wenn wir $r$ ändern, ändert sich die Natur des 1D-Flusses!

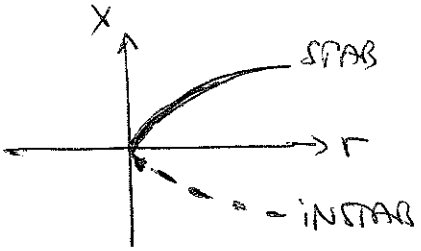



* Die typische Abbildung dieser Bifurkationen ist allerdings 90° gedreht:



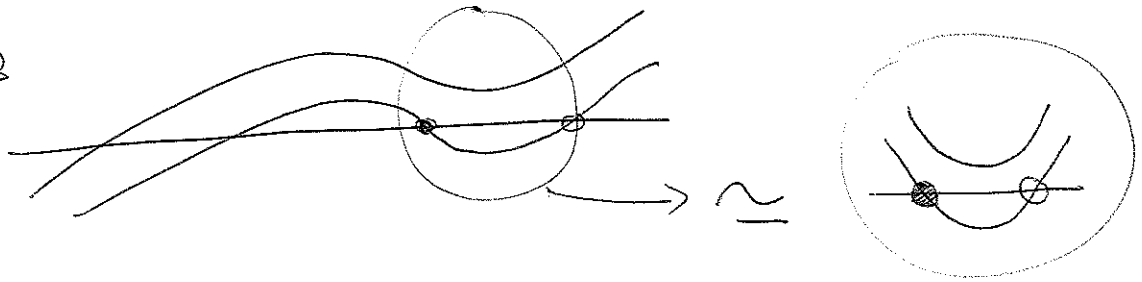

Die Bifurkationen sind die sogen. <u>Saddle-Node Bifurkationen</u>

* Für $\dot{x} = r - x^2$ hätte man:
(beweis es!)




* Die Beispiele $\dot{x} = r \pm x^2$ sind eigentlich prototypisch, weil in der Nähe einer Saddle-Node-Bifurkation, die Funktion $f(x)$ als $r \pm x^2$ angenähert werden kann.

z.B



Das ist, weil Saddle-Node Bifurkationen mit einem Minimum der $f(x)$ Funktion verknüpft sind, und $f(x)$ in der Nähe einer Minimum ist immer der Form $f(x) = f(x^*) + c(x-x^*)^2 + \dots$ (harmonische Näherung).

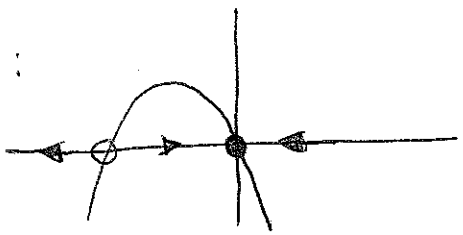
## * TRANSKRITISCHE BIFURKATION

* gucken wir nun eine andere Art von Bifurkation. In dieser Bifurkation werden die Fixpunkte zwar nicht zerstört, die werden aber ihre Stabilität ändern.

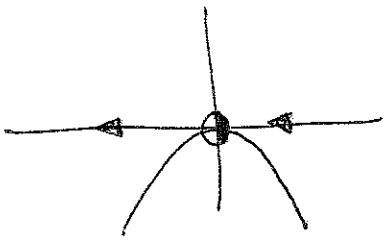
* Der Prototyp wäre

$$\dot{x} = rx - x^2$$ (das sieht wie die logistische Gleichung von S. 5)

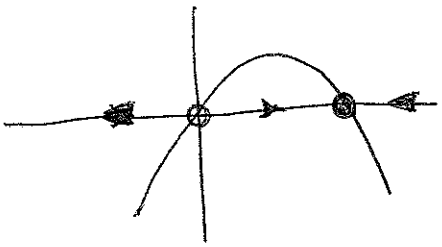
Sei $r<0$:

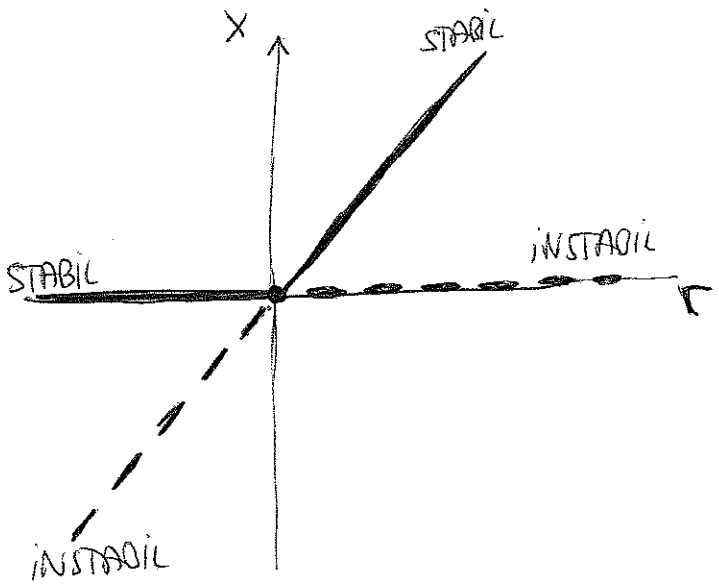


Sei $r=0$



Sei $r>0$



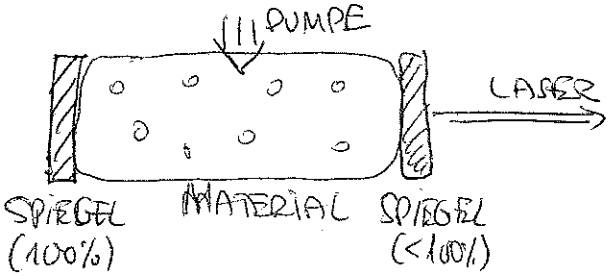



Die instabile und stabile Fixpunkte werden ihre Stabilität austauschen.

Das ist eine sogen. transkritische Bifurkation

# * BEISPIEL: LASER-SCHWELLE

* Wir werden **nun** die Idee von Bifurkation in einem Beispiel studieren. Wir sind nun an einem Laser interessiert.




* Die Pumpe (äußere Energiequelle) regt Atome des Materials auf.

* Für schwache Pumpen emitieren die angeregte Atomen unabhängig voneinander. Die Licht, die Laser durch den Spiegel fließt, ist also normale Licht.

* Jenseits eine gewisse Pumpenstärke die angeregte Atome "oszillieren in Phase", und Laserlicht wird ausgestrahlt.

* Es gibt ein Art <u>Selbstorganisierung</u> in dem System.

Wir können hier eine rigurose Erklärung des Lasers nicht geben. Das würde Quantenmechanik verlangen. Wir können aber die Physik der <u>Laserschwelle</u> mit einem einfachen Model verstehen.

Sei $n(t)$ die Anzahl von Photonen in dem Laserfeld. Also wenn es keine Laserlicht gibt $n(t)$ ist also Null.

Die Zeitänderung von $n(t)$ wird von einer Gleichung der Form

$$\dot{n}(t) = GnN - Kn$$

gegeben, wobei:

* $GnN \equiv$ "gain" → das beschreibt wie die Photonen erzeugt werden. Das hängt von der Anzahl $N(t)$ von angeregten Atomen ab. Die Konstante $G>0$ ist die Wachstumsrate

* $-Kn \equiv$ Verluste durch den Spiegel, mit einer Konstante $K>0$

$\tau = 1/K$ → typisches Lebensdauer eines Photons in dem Laser.

* Der entscheidende Punkt kommt nun.

Ein angeregter Atom emitiert ein Photon, aber wenn das passiert, danach ist der Atom nicht mehr angeregt. Dann N nimmt ab, wenn Photonen emitiert werden. Das können wird in einer Gleichung ausdrücken:

Emissionsrate

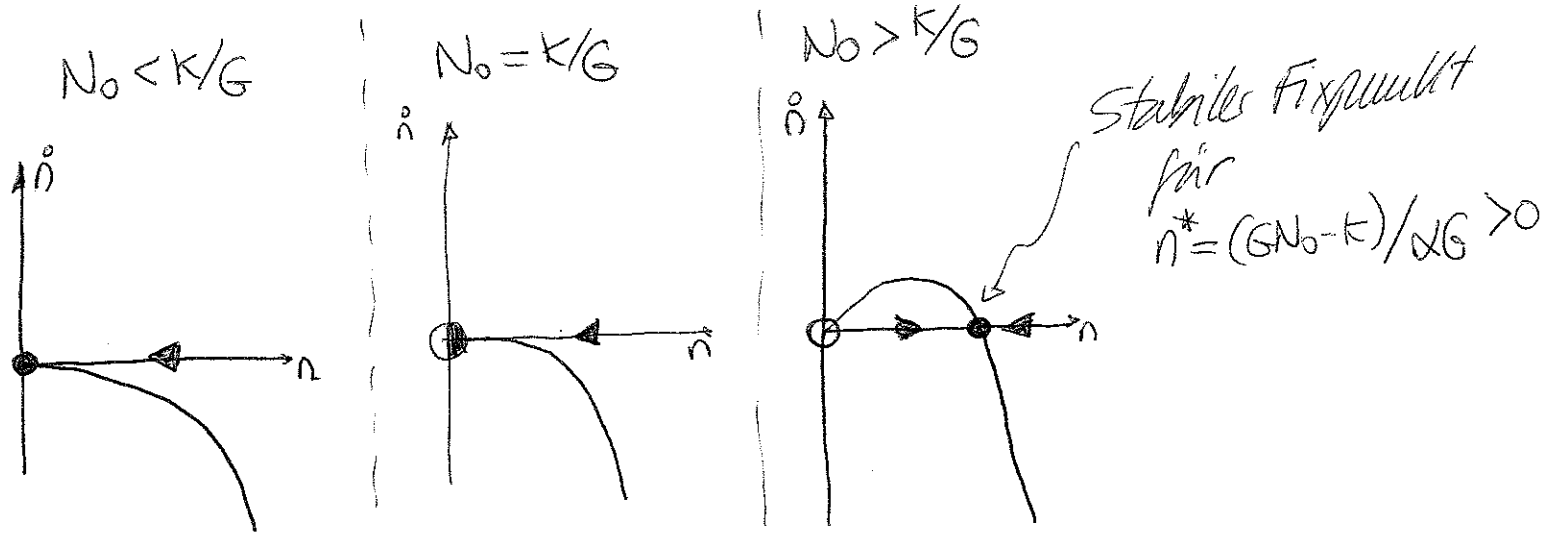
$$N(t) = N_0 - \alpha n$$

Anzahl von gepumpte Atomen wenn es keine Laserlicht gibt (No misst die Pumpenstärke)

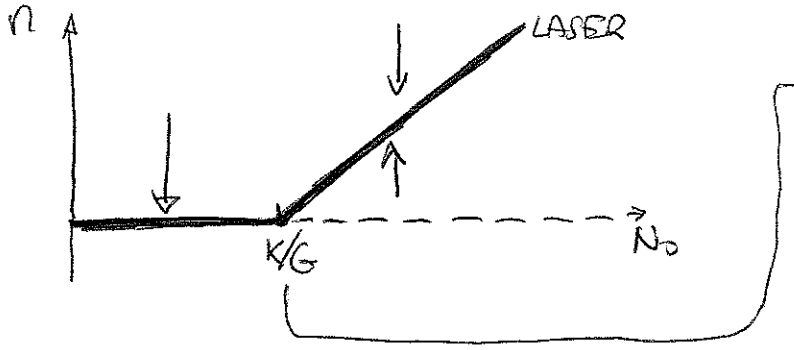
* Das ist extrem wichtig, weil nun die Gleichung von $\dot{n}$ nichtlinear ist:

$$\left.\begin{aligned} \dot{n} &= Gn(N_0 - \alpha n) - Kn \\ &= (GN_0 - K)n - (\alpha G)n^2 \end{aligned}\right\}$$ das ist noch mal eine Version der logistischen Gleichung (!!) (S. 5)

Gucken wir wie $\dot{n}$ aussieht für verschiedene Werte von $N_0$:



* Dann die Fixpunkte sehen so aus




→ Laserschwelle!
Also nur wegen der Tatsache dass $N(t) \propto -n$, haben wir eine Schwelle zur Selbstorganisierung!!

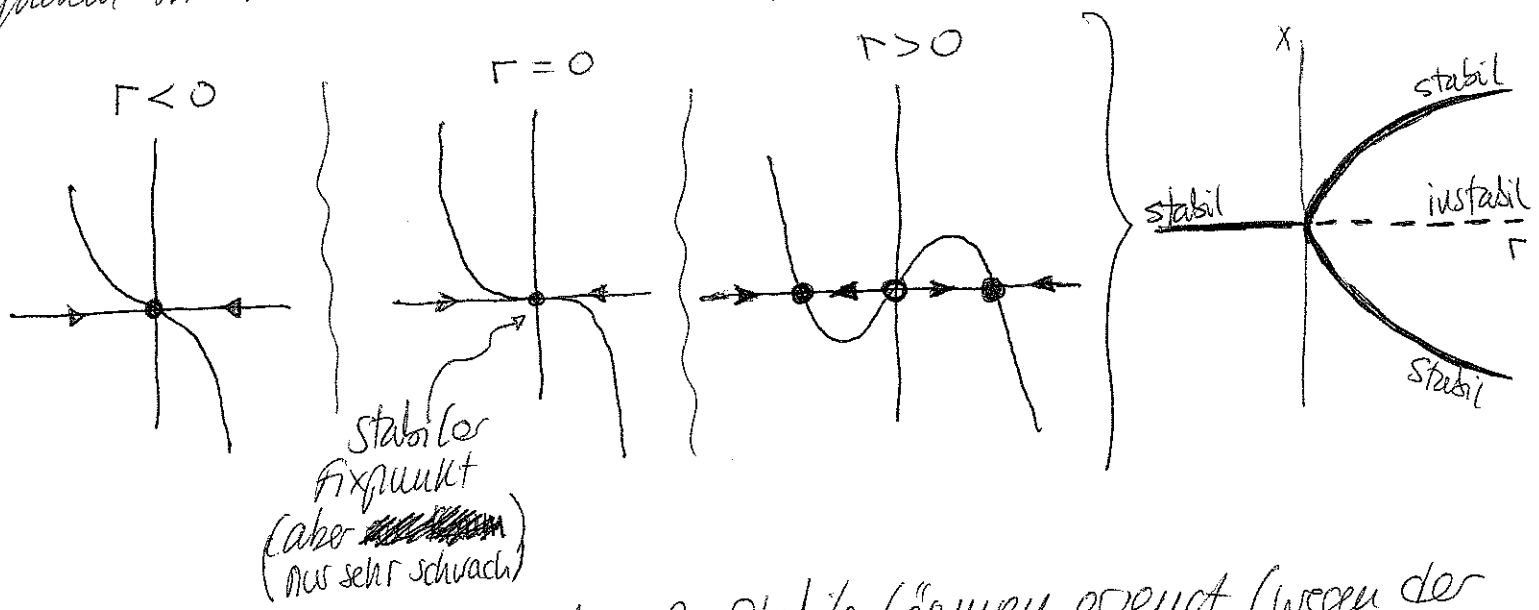
## * PITCHFORK-BIFURKATION

* Wir untersuchen nun noch ein anderes Typ von Bifurkation, die sogen. Pitchfork-Bifurkation. Diese Bifurkation ist typisch für Probleme mit Symmetrien. Gucken wir das mit einem Beispiel:

* Nehmen wir die Gleichung:

$$\dot{x} = rx - x^3 \longrightarrow \text{diese Gleichung ist invariant gegen } x \leftrightarrow -x$$

Gucken wir uns die Funktion $\dot{x}(x)$ für verschiedene Werte von r aussieht.

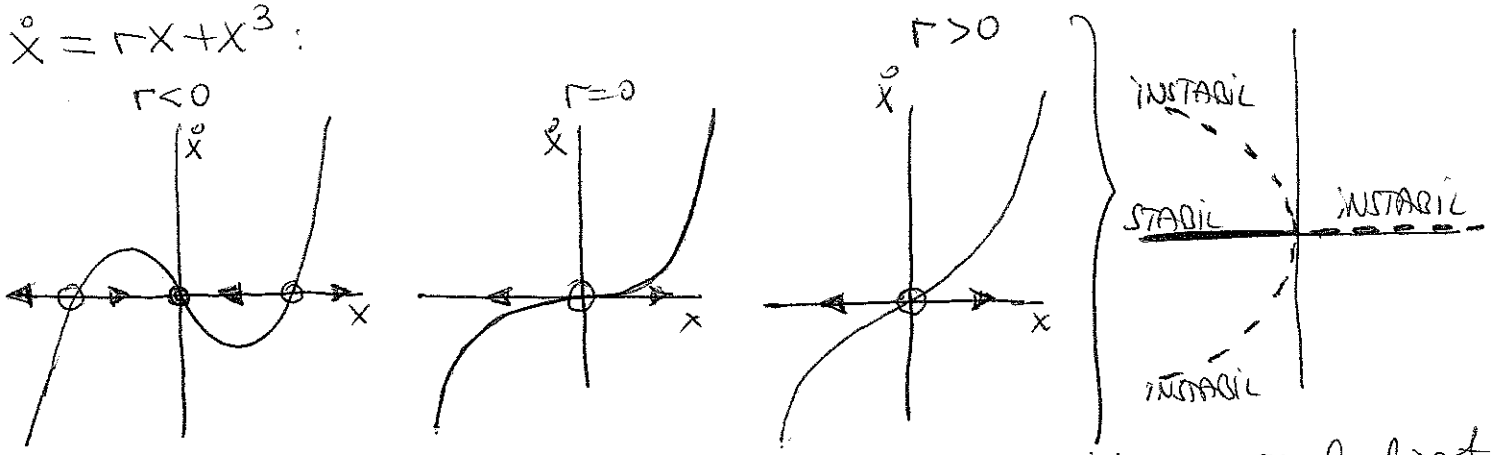



* In der Bifurkation werden 2 stabile Lösungen erzeugt (wegen der $x \leftrightarrow -x$ Symmetrie). Die Name "Pitchfork" (≡ Forke) ist also einfach zu verstehen!

* Eigentlich ist $\dot{x} = rx - x^3$ ein guter Beispiel einer sogen. <u>Superkritische Pitchfork-Bifurkation</u>.

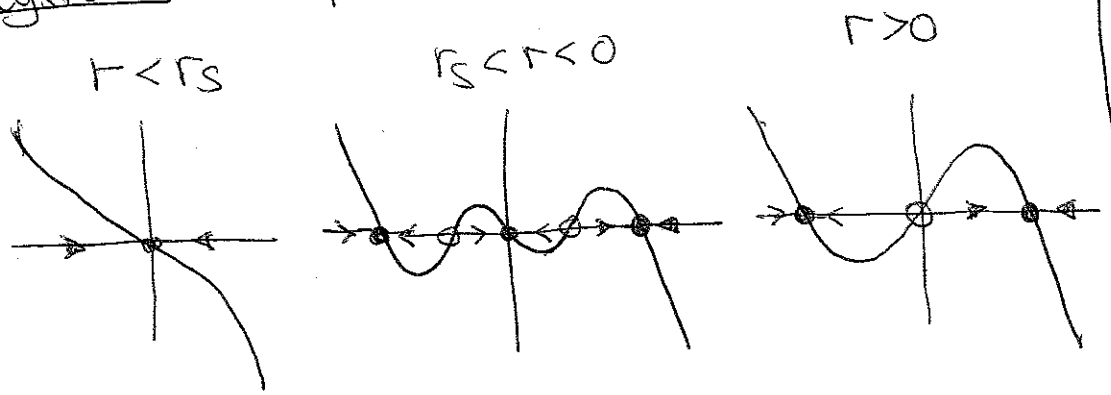
Ein Beispiel einer sog. <u>subkritische Bifurkation</u> wäre

$\dot{x} = rx + x^3$:



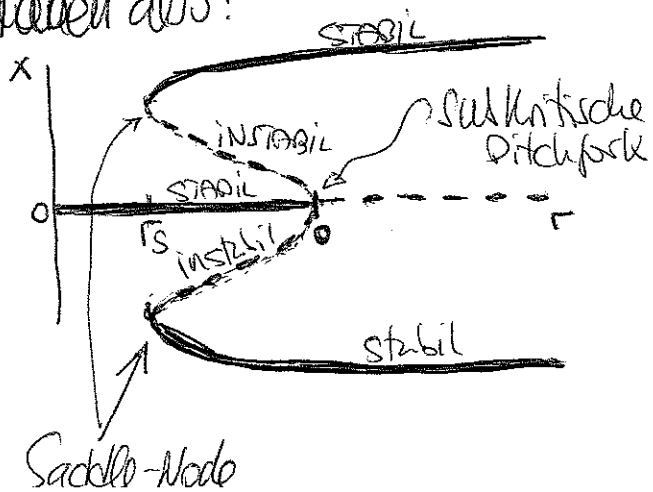

Für $r>0$, für alle $x_0 \neq 0$ $x(t) \longrightarrow \pm\infty$ (die Lösung explodiert!)

* Gucken wir noch ein Beispiel: $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$, also nun haben wir ein $-x^5$ extra. Dies Beispiel erlaubt uns, die Idee von <u>Hysterese</u> einzuführen:



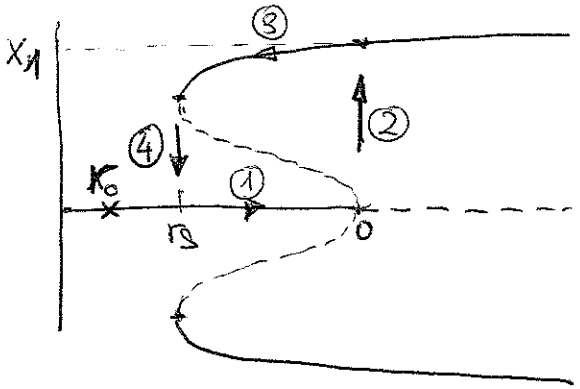

* <u>Bemerkung</u>:
$r_s + x^2 - x^4 = 0$
$x^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4r_s} = 0$
$\Rightarrow 1+4r_s = 0 \rightarrow r_s = -\frac{1}{4}$

Wir haben also:




* für $r_s < r < 0$ ist $x^* = 0$ stabil gegen kleine Störungen, aber nicht gegen größere, weil man noch andere stabile Fixpunkte hat.

* Gucken wir nun die Idee von Hysterese:



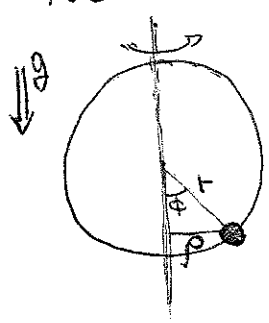

* Fangen wir mit $r=r_0$ in $x=0$ an.
① Wir machen nun $r$ größer bis $r=0$
② Der Fixpunkt ist instabil und $x(t)$ fließt bis $x=x_1$ (äußerer stabiler Fixpunkt)
③ Nun machen wir $r$ kleiner. Nun folgt $x(t)$ die obere Lösung und nicht die $x(t)=0$ Lösung (!!)
④ Wenn $r=r_s$ die obere Lösung verschwindet, und $x(t)$ fließt bis $x=0$ zurück.

* Das Verhalten von $x(t)$ wenn $r$ wird geändert ist also nicht reversible (!!)

Die Abwesenheit von Reversibilität nennt man Hysterese. Und so ein Zyklus ①-②-③-④ nennt man ein Hysterese-Zyklus.

* BEISPIEL (PITCHFORK-BIFURKATION)

• Nehmen wir eine Perle auf einem kreisförmigen Draht. Die Perle kann sich nur auf dem Draht bewegen (also nur $\phi$ ist wichtig, siehe die Abbildung). $(-\pi < \phi \leq \pi)$




* Der Draht rotiert wie in der Abbildung.
* Auf der Perle wirken also 3 Kräften:

1) Schwerkraft: $-mg\sin\phi$ (wir sind hier nur an den Komponente der Kräfte entlang $\vec{e}_\phi$)

2) Reibungskraft: $-b\dot{\phi}$ (wobei $b$ der Reibungskoeffizient ist. Wir werden annehmen, dass die Reibung ziemlich stark ist.)

3) Zentrifugalkraft: $m\omega^2\rho$ nach aussen, also: $m\omega^2 r\sin\phi\cos\phi$ (Projektion entlang $\vec{e}_\phi$)

Die Bewegungsgleichung ist also der Form:

$$mr\ddot{\phi} = -b\dot{\phi} - mg\sin\phi + mr\omega^2\sin\phi\cos\phi$$

Es ist immer eine gute Idee alles in einer <u>dimensionslosen Form</u> zu schreiben (die Analyse wird so viel einfacher!)

· Wir nehmen eine charakteristische Zeit $T$ (wir werden $T$ später genauer auswählen), und wir definieren

$$\tau = t/T \quad (\tau \text{ ist nun dimensionslos})$$

dann $\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d\phi}{d\tau}$ ; $\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{T^2}\frac{d^2\phi}{d\tau^2}$ ; also:

$$\underbrace{\frac{mr}{T^2}\frac{d^2\phi}{d\tau^2}}_{} = \underbrace{\frac{-b}{T}\frac{d\phi}{d\tau} - mg\sin\phi + mr\omega^2\sin\phi\cos\phi}_{}$$

Die sind alle Kräfte

$mg$ ist eine Kraft, also wir dividieren alles durch $mg$

$$\left(\frac{mr}{T^2 mg}\right)\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = \frac{-b}{Tmg}\frac{d\phi}{d\tau} - \sin\phi + \left(\frac{mr\omega^2}{mg}\right)\sin\phi\cos\phi$$

Nun ist alles dimensionslos. Jetzt wählen wir $T = \frac{b}{mg}$, und damit kriegen wir die Gleichung

$$\epsilon\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{d\phi}{d\tau} - \sin\phi + \gamma\sin\phi\cos\phi$$

wobei $\epsilon = \frac{m^2 g r}{b^2} > 0$

$$\gamma = \frac{r\omega^2}{g} > 0$$

* Wir werden nun annehmen, dass $\epsilon \ll 1$, d.h. die Bewegung ist sehr gedämpft (starke Reibung!), dann verschwindet der $\epsilon \frac{d^2\phi}{d\tau^2}$ Glied, und wir bekommen die Gleichung:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \gamma \sin\phi \left[\cos\phi - \frac{1}{\gamma}\right]$$

($\gamma$ sagt uns wie schnell der Draht spinnt.)

(* Bemerkung: Wir wollen $\epsilon \ll 1$, weil wir hier mit Gleichungen 1. Ordnung arbeiten wollen. Wir werden später in dieser Vorlesungsreihe sehen, was passiert mit Gleichungen 2. Ordnung)

* Nun können wir untersuchen, welche sind die Fixpunkte für die Perle.
Naif würden wir annehmen, dass $\phi = 0$ der einzige Fixpunkt wäre (und zwar ein stabiler Punkt). Das ist aber <u>nicht</u> so!

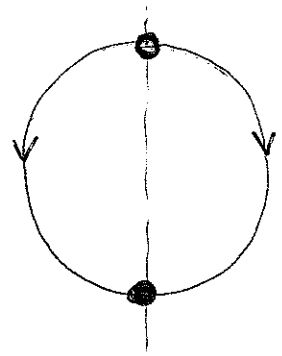
* Gucken wir die Gleichung, $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ wenn:

  * $\phi = 0$
  * $\phi = \pm\pi$

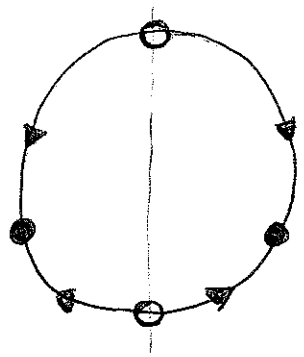
  } die existieren immer

  * $\cos\phi = 1/\gamma$ → Da $\cos\phi < 1$ → diese Fixpunkte existieren nur wenn $\gamma > 1$ → also <u>wenn der Kreisdraht schnell genug spinnt</u>

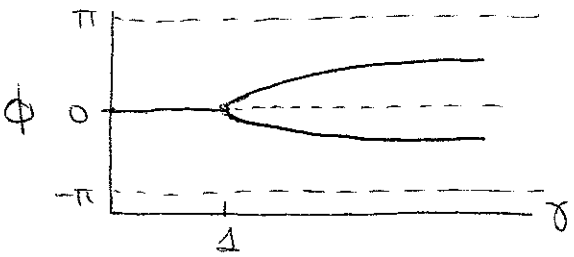
Es ist einfach zu sehen (versuch es!) dass $\phi = \pi$ ist immer instabil, $\phi = 0$ ist stabil für $\gamma < 1$ und instabil für $\gamma > 1$, und dass $\phi = \pm\arccos(1/\gamma)$ sind stabil (wenn die existieren natürlich, also für $\gamma > 1$)



$\gamma < 1$



$\gamma > 1$




Wir haben hier also eine Pitchfork-Bifurkation (superkritisch)

* Physikalisch ist also klar was passiert.
  * Wenn die Drehung des Kreises langsam ($\gamma<1$) ist, kann die Zentrifugalkraft die Schwerkraft nicht kompensieren, und daher bleibt die Perle ganz unten.
  * Wenn die Drehung schnell genug ist, dann $\phi=0$ wird instabil. Das ist weil die Zentrifugalkraft mit $\phi$ steigt, und daher eine sehr kleine Ablenkung aus $\phi=0$ wird amplifiziert. Die Perle geht nach oben, aber in einer Punkt wird die Schwerkraft die Zentrifugalkraft kompensieren → dann hat man da ein Gleichgewicht.
  * Aber das Problem ist symmetrisch, also die sehr kleine Fluktuationen um $\phi=0$ werden auswählen, ob die Perle nach $\phi=+\arccos(1/\gamma)$ oder nach $\phi=-\arccos(1/\gamma)$ geht. Das ist ein Beispiel von <u>Symmetriebrechung</u>

(Bemerkung: <u>Symmetriebrechung</u> ist ein extrem wichtiger Begriff der Physik, Er spielt eine wichtige Rolle in zB Phasenübergänge, und sogar in der Entstehung des Universums!)

---

## * <u>IMPERFEKTE BIFURKATIONEN</u>

* Symmetrie spielt eine sehr wichtige Rolle in der Pitchfork-Bifurkationen. Typischerweise, aber, ist die Symmetrie nur eine Näherung, und die wirkliche Systeme sind eigentlich imperfekt. Wir werden nur gucken was passiert wenn es Imperfektionen gibt.
* Wir werden nun eine Beispielgleichung studieren, und dann ein Beispiel der Biologie.

* Gucken wir die Gleichung:

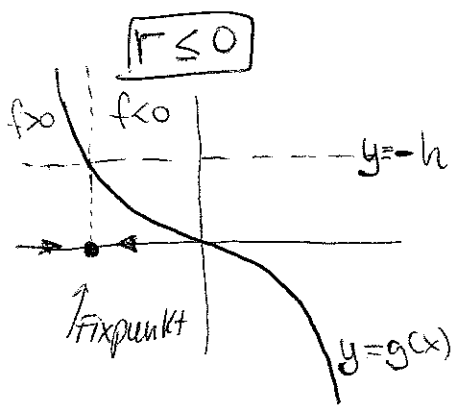
$$\dot{x} = h + rx - x^3$$

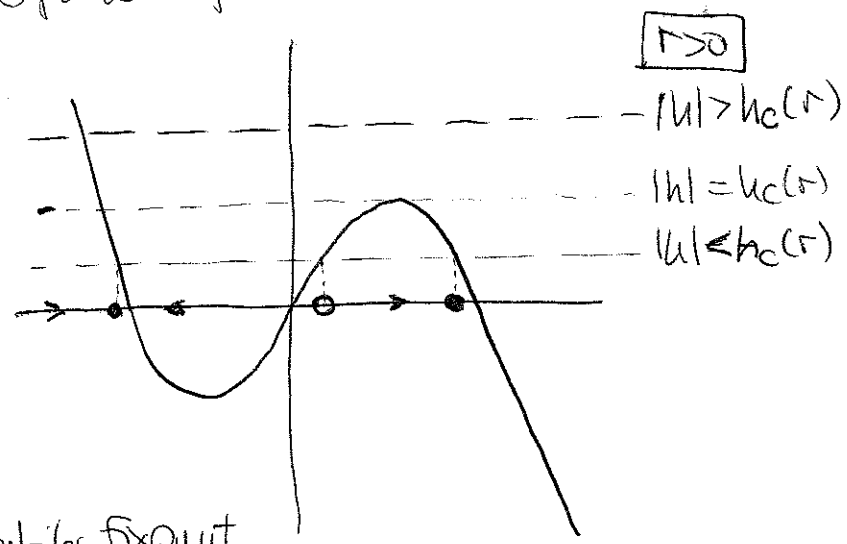
Für $h=0$ haben wir die Gleichung von S. 13 und daher eine superkritische Pitchfork-Bifurkation. Das Parameter $h$ spielt hier die Rolle eines <u>Imperfektionsparameters</u>.

* Nun haben wir 2 Kontrollparametern $\rightarrow$ $r$ und $h$.

Sei $f(x) = h + g(x)$ wobei $g(x) = rx - x^3$.

Wie immer die Fixpunkte erfüllen $f(x)=0$, also $g(x) = -h$:



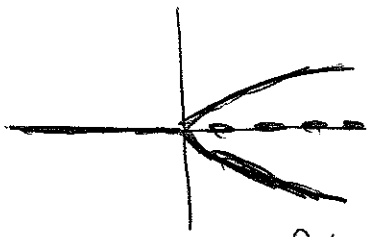




Dann:
* Für $r \leq 0$ $\rightarrow$ ein stabiles Fixpunkt
* Für $r > 0$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{wenn } |h| > h_c(r) \rightarrow \text{ein stabiles Fixpunkt} \\ \text{wenn } |h| \leq h_c(r) \rightarrow \{\text{1 stabile Fixpunkte, 1 instabiles Fixpunkt}\} \end{cases}$

(<u>Bemerkung</u>: $h_c(r)$ ist das Maximum von $g(x)$ $\rightarrow$ $\frac{dg}{dx} = r - 3x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{r}{3}}$

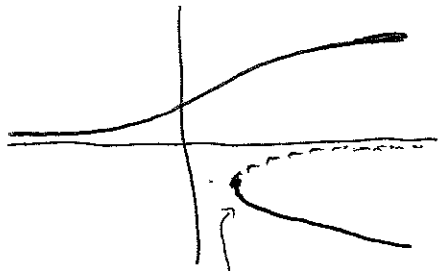
$\rightarrow g\left(\sqrt{\frac{r}{3}}\right) = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}} = h_c(r)$.)

Dann: Für $h=0$



also, die perfekte Pitchfork-Bif.

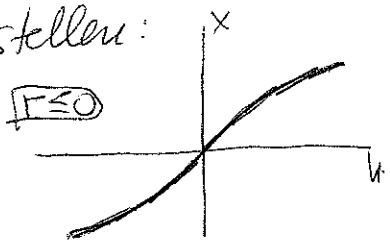
Für $h \neq 0$

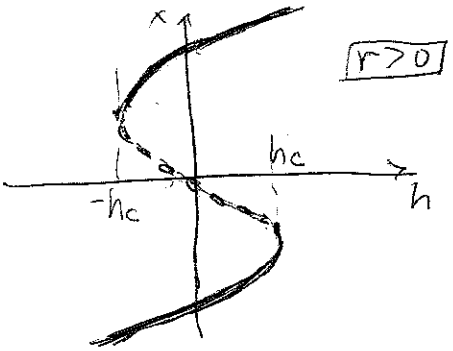


das ist nur ein eine Saddle-Node Bifurkation!

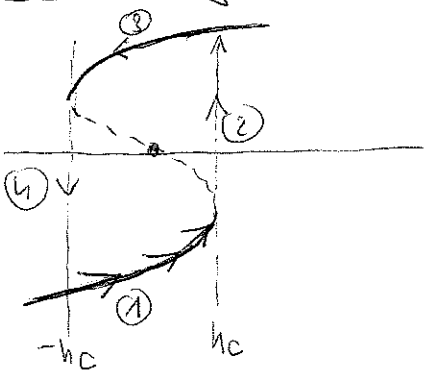
* Die Pitchfork-Bifurkation wird also in 2 Teilen gebrochen. Wenn r geht von <0 ins >0 gibt es nun keinen scharfen Übergang. Der Fixpunkt "fließt" einfach in die obere stabile Lösung. Für r größer als eine gewisse Kritische $r_c$, gibt es auch eine untere Lösung (auch stabil) aber im Prinzip kleine Störungen bringen das System nicht in die untere Lösung (das System "fühlt" nicht, dass es eine andere stabile Lösung gibt!)

- Alternative können wir die Stabilitätskurven als Funktion von h darstellen:




* <u>Bemerkung</u>: Wenn wir z.B. h ändern, und wir fangen z.B. in der unteren Lösung dann wenn $h>h_c$ das System springt in die andere stabile Lösung (das nennt man eine "<u>Katastrophe</u>").




* Guck mal, dass wir hier noch mal ein <u>Hysterese-Zyklus</u> haben (1, 2, 3, 4) (S. 13)

* <u>BEISPIEL</u>: <u>INSEKT-POPULATIONEN: VON RUHE ZU PEST!</u>

* Wir studieren hier eine Population von Insekten. Die Insekten fressen Blätter, und die werden von Vögeln gefressen.

* Wir werden dieses System mit einer etwa modifizierten Version der logistische Gleichung (S. 5) studieren.

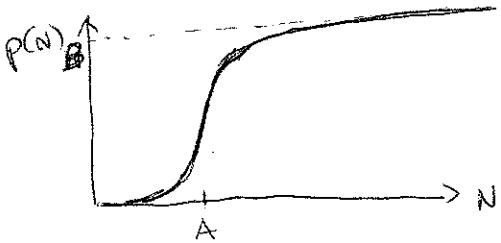
$$\boxed{\dot{N} = RN\left(1-\frac{N}{K}\right) - p(N)}$$

- $N(t)$ ist die Insektpopulation.

$R \equiv$ Wachstumsrate

$K \equiv$ Kapazität (Es hängt von dem geblibenen Baumblätter, wir nehmen das als eine Konstante)

$p(N) \longrightarrow$ Sterbtrate wegen der Vögeln (Prädationsrate)




* Wenn N sehr klein ist, dann gibt es wenige Vogeln im Wald (und daher $p(N)$ ist klein)
- Wenn N wächst über eine gewisse Grenze (nennen wir sie A) dann wächst $p(N)$ bis nach einem maximalen Wert (B).

Wir können für $p(N)$ eine Funktion der Form:

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}$$

auswählen.

- Dann: $$\boxed{\dot{N} = RN\left(1-\frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2+N^2}}$$

OK. Nun haben wir die Gleichung, suchen wir, ob wir damit etwas über Insektpopulationen lernen können!

* Zuerst werden wir die Gleichung in eine <u>dimensionlosen Form</u> schreiben.

Sei $x = N/A$ (dimensionlos)

Dann $$A\frac{dx}{dt} = RAx\left(1-\frac{A}{K}x\right) - \frac{Bx^2}{1+x^2}$$

Wenn wir durch B dividieren, dann haben wir keine Dimensionen mehr: $$\frac{A}{B}\frac{dx}{dt} = R\frac{A}{B}x\left(1-\frac{A}{K}x\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

* Wir definieren eine dimensionlose Zeit

$$\tau = \frac{B}{A} t$$

und ebenfalls: $r = \frac{RA}{B}$ und $k = \frac{K}{A}$

dann:

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}}$$

Ok. Das ist unsere dimensionlose Gleichung. Wir wollen nun die <u>Fixpunkte</u> studieren

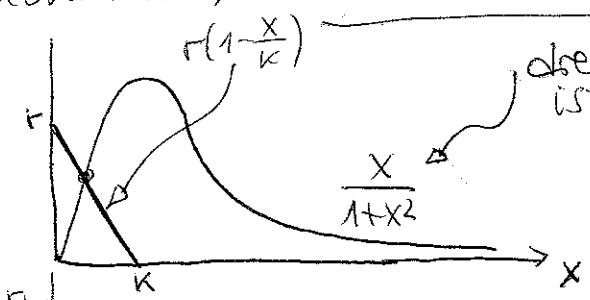
* Es ist klar dass $x=0$ ist ein Fixpunkt, und zwar instabil (überprüft es!). Das ist klar, weil wenn $N \approx 0$, dann $P(N) \approx 0$, und die Insektpopulation wächst exponentiell ab.

* Suchen wir nun die andere Fixpunkte:

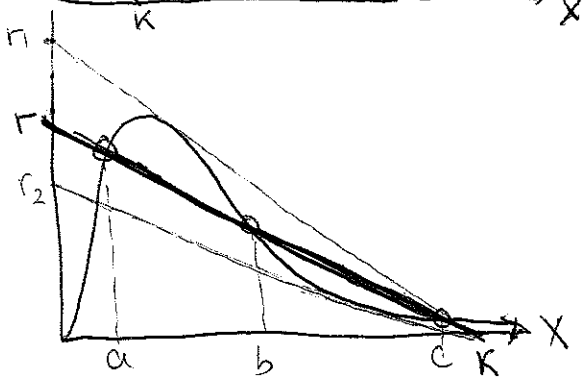
$$\frac{dx}{d\tau} = x\left\{ r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{1+x^2} \right\}$$

Wir suchen also nach der Nullpunkte von $f(x) = r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{1+x^2}$

Wir zeichnen nun die beiden Funktion $r\left(1-\frac{x}{k}\right)$ und $\frac{x}{1+x^2}$, und suchen wir, wo die beide sich kreuzen:




diese Gerade ändert sich mit r und k

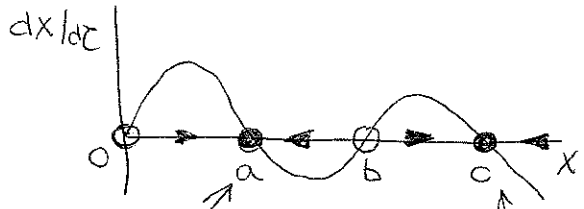



* Wenn K klein genug ist, dann gibt es nur ein Kreuzpunkt, und damit nur ein Fixpunkt

* Wenn K groß genug ist, dann haben wir 3 Fixpunkte (a, b, c)

* Wenn wir nun r ändern (für K konstant)
  * Wenn $r > r_1 \Rightarrow$ a und b verschwinden. Es bleibt nur c
  * Wenn $r < r_2 \Rightarrow$ b, c verschwinden. Es bleibt nur a

* Es ist ganz einfach die Stabilität der Fixpunkte zu untersuchen:




* Also a und c sind stabil und $x=0$ und b sind instabil

"Refuge Level" — Die Insektpopulation ist relative moderat

"Outbreak level" — Die Insektpopulation ist groß → wir haben eine Pest hier!

* Natürlich die Frage ist, wo fangen wir an?
  - Wenn $x(t=0)=x_0>b \longrightarrow$ dann Pest! b ist also die Schwelle
  - $x(t=0)=x_0<b \longrightarrow$ dann Ruhe!
* Wir werden nun die Bifurkationen studieren. Gucken wir die Figur auf S. 22. Die Bifurkationen passieren wenn
  - Die 2 Kurven sich kreuzen
  - Die 2 Kurven sind tangent zueinander

Also:

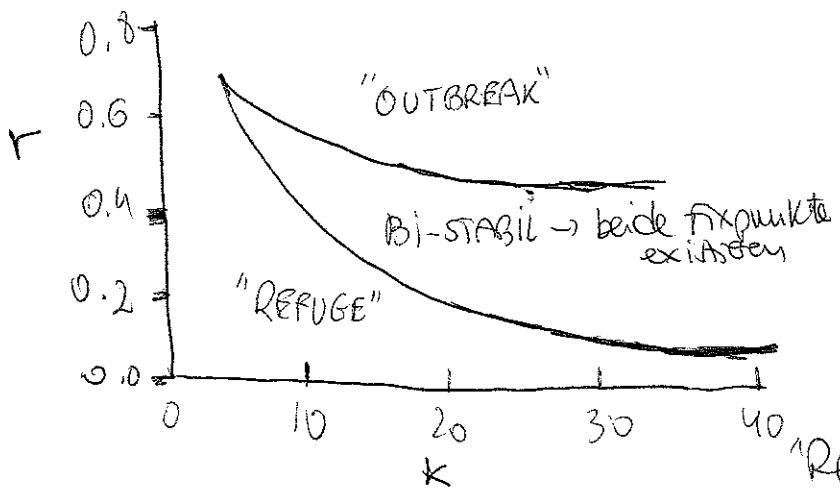
$$r\left(1-\frac{x}{K}\right)=\frac{x}{1+x^2} \longrightarrow r=\frac{x}{1+x^2}+\frac{r}{K}x$$

$$\frac{d}{dx}\left[r\left(1-\frac{x}{K}\right)\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \Rightarrow -\frac{r}{K}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$r=\frac{x}{1+x^2}-\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \boxed{r=\frac{2x^3}{(1+x^2)^2}}$$

Dann $K=\dfrac{-r(1+x^2)^2}{1-x^2}=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$ → da $K>0 \longrightarrow x>1$

* Wir haben nun die Bifurkationskurven $(K(x), r(x))$ auf der $(K,r)$ Ebene




* Also eine Änderung der Vogelpopulation oder des Waldes könnte eine ökologische Katastrophe verursachen, wenn die "Refuge"-Lösung verschwindet.
* Guck mal auch, dass wenn so eine Katastrophe occurs, es ist nicht so einfach (wegen Hysterese) zurück an der "Refuge"-Lösung zu kriegen.

* Aber die Pesten können auch ganz natürlich auftreten.
Der Punkt ist dass $r \propto S$ ($\equiv$ Fläche des Waldes). Für jungen Wäldern $K$ ist relativ gross ($\sim 100$) und $r < 1/2$. Der Wald ist bistabil, und die Vögeln halten die Insektenpopulation auf der "Refuge"-Lösung. Aber der Wald wächst, $r$ geht über die Grenze und dann: "Outbreak"! Die Insekten fressen die Bäume, und eventuell $r$ geht noch mal unter die Refuge-Grenze, und so weiter.
* Also so ein einfaches Modell hat schon <u>viel Dynamik drin</u>!

# • 1D DYNAMIK AUF EINEM KREIS

* Auf S. 7 haben wir gesagt, dass 1D Bewegung erlaubt keine Oszillationen. Aber wenn $x = \theta \Rightarrow$ Winkel um einem Kreis, dann können wir doch Oszillationen haben (wir gehen einmal auf dem Kreis herum). Hier werden wir zum ersten Mal <u>periodische Bewegung</u> treffen.

* Die einfachste Bewegung auf dem Kreis ist <u>der uniforme Oszillator</u>.

$$\dot{\theta} = \omega \equiv \text{Konstante} \longrightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0 \rightarrow \text{uniforme Bewegung mit Winkelgeschwindigkeit } \omega$$

Da $\theta$ äquivalent zu $\theta + 2n\pi$ ist, dann die Bewegung ist periodisch und zwar mit Periodizität $T = 2\pi/\omega$ (Periode der Oszillation)

* Interessanter werden <u>nichtuniforme Oszillatoren</u> der Form:

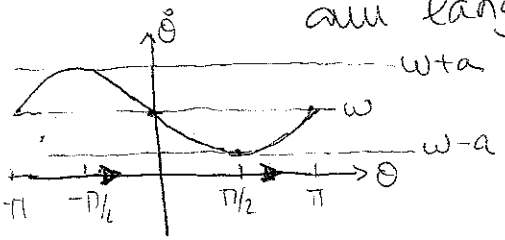
$$\dot{\theta} = \omega - a\sin\theta \qquad \text{wobei } a \geq 0 \text{ eine Konstante ist.}$$

So eine Gleichung taucht in vielen Bereichen der Physik auf (eigentlich auch in anderen Fächer, wie z.B. Biologie). Wir werden später Beispiele sehen, aber vorher werden wir die wichtigste Eigenschaften der nichtuniforme Oszillatoren untersuchen.

* Erstmals, warum nennen wir dieser Oszillator nichtuniform?

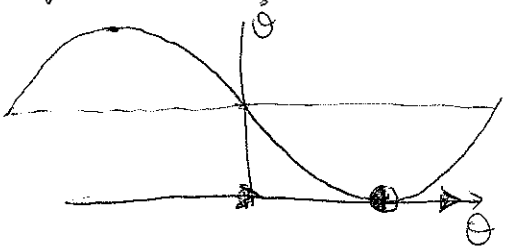
Wenn $a = 0 \rightarrow$ uniforme Oszillation.

Wenn $a > 0 \rightarrow$ die Drehung ist am *fastesten* wenn $\theta = -\pi/2$, und am langsamsten wenn $\theta = \pi/2$

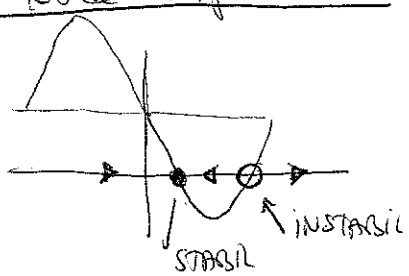



* Wenn $\omega \approx a$ $\dot{\theta}$ ist sehr klein, also es dauert lange Zeit für $\theta(t)$ durch dem Bereich $\theta = \pi/2$ durchzugehen. Das nennt man ein <u>Engpass</u> ("bottleneck" auf Englisch).

* Wenn $a = \omega$ die Oszillationen stoppen. Wenn das passiert haben wir eine <u>Saddle-Node-Bifurkation</u> (S. 8)

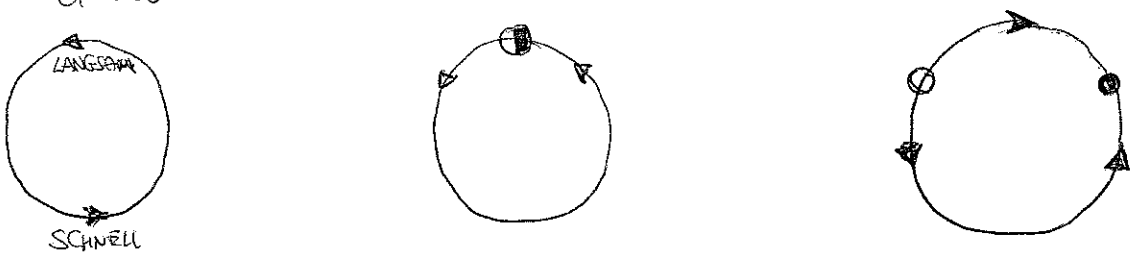



Für $a > \omega$



* Zusammengefasst:

$a<\omega$ $\qquad$ $a=\omega$ $\qquad$ $a>\omega$

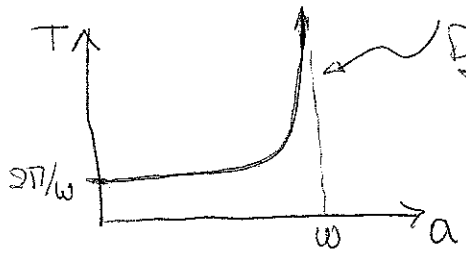



* Also für $a<\omega$ haben wir eine periodische Bewegung, aber wenn $a \to \omega$ diese Bewegung wird schwieriger und schwieriger. Gucken wir das ein bisschen genauer. Wir werden erstmals die Periode $T$ bestimmen.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - a\sin\theta \longrightarrow dt = \frac{d\theta}{\omega - a\sin\theta} \longrightarrow T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}$$

(Bemerkung: um dieses Integral zu lösen benutz die Änderung $u = \tan\theta/2$, und nimmt die Integrationsgrenzen für $\theta$ zwischen $-\pi$ und $\pi$. Versuch es!)

* $T$ als Funktion von $a$ sieht so aus:

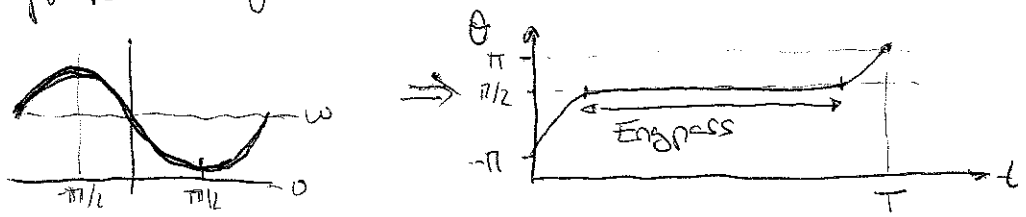



Divergenz hier! $\longrightarrow$ Hier $T \to \infty$, also die Oszillation ist einfach nicht mehr da!

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega+a)(\omega-a)}} \underset{\omega \to a}{\sim} \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$$

Also $T$ divergiert wie $(\omega-a)^{-1/2}$

* So eine Divergenz ist sehr typisch für Systeme an einer Saddle-Node Bifurkation. Gucken wir der Oszillator wenn $a$ ist fast $\omega$:




$O(1)$ ist fast die gesammte Periode an $\pi/2$

Wir müssen uns untersuchen, was in der Nähe von $\pi/2$ passiert.

$$\theta = \pi/2 + \varepsilon \longrightarrow \dot\theta = \dot\varepsilon = \omega - a\sin(\pi/2 + \varepsilon) \simeq (\omega - a) + a\varepsilon^2/2 = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Sei $t = \frac{2}{a}\tau \longrightarrow \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \left[\frac{2}{a}(\omega - a)\right] + \varepsilon^2 = r + \varepsilon^2$

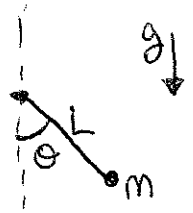
* Wir bekommen also die Mustergleichung einer Saddle-Node Bifurkation (S. 8).

Da in der Nähe der Bifurkation ($\omega - a \ll a$) fast die gesamte Periode wird in der Nähe von $\theta/2$ verbracht, dann können wir annähern:

$$T \simeq \frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{r+\varepsilon^2} = \frac{2\pi}{a\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{\omega}}\,\frac{1}{\sqrt{\omega - a}} \quad \text{wie vorher.}$$

* Nun dass wir die wichtigste Eigenschaften der nicht-uniformen Oszillatoren kennen, gucken wir jetzt <u>einige Beispiele</u>.

* <u>Übergedämpftes Pendulum</u> (<u>mit konstanten externen Drehmoment</u>)




* Wir betrachten nun die Bewegung eines Pendulums (siehe Abbildung). Wir üben außerdem ein konstanten Drehmoment $\Gamma$.

Die Bewegungsgleichung des Pendulums ist der Form:

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma$$

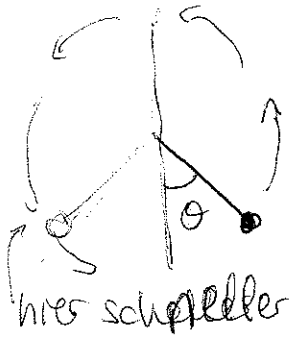
Dämpfung, Schwerkraft, Drehmoment

Wie auf S. 16, wenn die Dämpfung stark ist (übergedämpftes Pendulum) können wir die 2. Ableitung vergessen, und damit

$$b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{\Gamma}{b} - \frac{mgL}{b}\sin\theta = \omega - a\sin\theta$$

also genau der Form, die wir auf S. 25 untersucht haben!

Wenn $\gamma = \frac{\Gamma}{mgL} > 1 \longrightarrow$ periodische Bewegung, aber nicht uniform! $\Rightarrow$

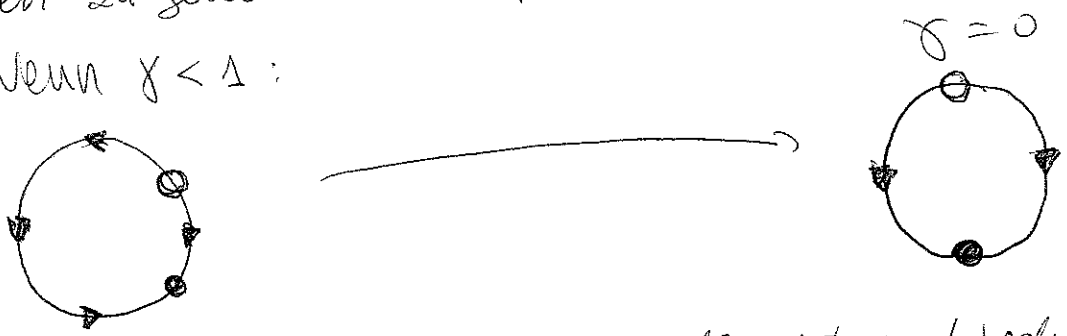



hier langsamer ⇐ der Pendulum muss gegen der Schwerkraft gehen

hier schneller ← der Pendulum wir von der Schwerkraft "geholfen".

Wenn $\gamma \to 1$ : dann wird es schwieriger und schwieriger bis nach oben zu gehen. Ein Fixpunkt taucht in $\theta = \pi/2$ auf.

Wenn $\gamma < 1$ :




(Bemerkung: Das ist für euch vielleicht ein bisschen anti-intuitiv, weil ihr das Bild des ungedämpften Pendulums habt. Aber ich erinnere euch das hier die Dämpfung sehr groß ist, und das eigentlich die Drehung existiert nur wegen des ausgeübten Drehmoment. Also wenn $\Gamma = 0 \to \theta = 0$ bleibt konstant da, um $\theta = \pi$ rutsch einfach runter bis zum $\theta = 0$.)

---

* <u>Synchronisation</u>

* In der Natur gibt es mehrere Beispiele von gekoppelten periodischen Systeme (gekoppelte Oszillatoren), die miteinander synchronisieren, also alle zusammen <u>oszillieren in Einklang</u>.

* Ein schönes Beispiel dann wird von einem besonderen Art von <u>Glühwürmchen</u> in Asia. Jedes Glühwürmchen funktioniert wie ein Oszillator mit einer gewisse Frequenz ($\omega$). Das wunderschöne ist, dass wenn die zusammen sind, können tausende von Glühwürmchen in Einklang blitzen!

* Wie ist das überhaupt möglich? Wie können die Oszillationen von tausenden unabhängigen Glühwürmchen synchronisiert werden?
* Der Punkt hier ist, dass die Glühwürmchen <u>sich gegenseitig beeinflussen</u>. Wenn ein Glühwürmchen den Blitz eines anderes sieht, dann es versucht den eigenen Blitz anzupassen.
* Aber das geht nicht immer. Man hat zum Beispiel studiert, was passiert, wenn man so ein Glühwürmchen mit periodischen Blitzer anreizt (mit Frequenz $\Omega$):
  - Wenn $\Omega$ nah zu $\omega$ ist, dann wird das Glühwürmchen eventuell synchronisieren
  - Wenn $\Omega$ nicht nah zu $\omega$ ist, dann gibt es keine Synchronisierung, aber die Dephasierung zwischen Reiz und Glühwürmchenblitz wächst nicht uniform, sondern erstmal langsam dann schnell, dann noch mal langsam, noch mal schnell, usw.
* OK. Wie können wir so was mit einem einfachen Modell reproduzieren.
  - Sei $\theta(t) \equiv$ die <u>Phase des Glühwürmchenblitzes</u> ($\theta = 0 \rightarrow$ wann der Blitz emitiert wird)

Wenn es keinen Reiz gibt $\rightarrow \dot{\theta} = \omega$

  - Sei $\alpha(t) \equiv$ die Phase des periodischen Reizes ($\alpha = 0 \rightarrow$ wann der periodischen Blitz emittiert wird)

Dann $\dot{\alpha} = \Omega$

  - Wir wollen nun folgendes:
    - Wenn $\Omega > \omega \rightarrow$ dann soll der Blitz des Glühwürmchen sich beschleunigen, um sich mit dem Reizblitz anzupassen.
    - Wenn $\Omega < \omega \rightarrow$ dann soll der Glühwürmchenblitz sich bremsen.

* Ein einfaches Modell, das sowas beschreibt, wäre:

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin[\alpha - \theta]$$

wobei $A > 0$ ist eine Konstante, die die Stärke der Synchronisierung mißt. Dann:

* Wenn $\left.\begin{array}{l} \alpha > \theta \longrightarrow \dot{\theta} > \omega \\ \alpha < \theta \longrightarrow \dot{\theta} < \omega \end{array}\right\}$ also was <u>wir wollten</u>!

* Sei $\phi = \alpha - \theta$ die Phasendifferenz. Dann:

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \dot{\alpha} - \dot{\theta} = (\Omega - \omega) - A \sin\phi$$ $\longrightarrow$ also ein nichtuniformer Oszillator wie auf S. 25.

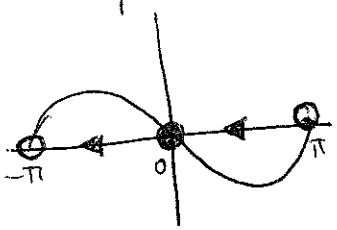
Sei $\tau = At$ (dimensionslose Zeit)

$\mu = \frac{\Omega - \omega}{A} \longrightarrow$ je kleiner $\mu$ desto besser die Synchronisierung.

Dann $\boxed{\frac{d\phi}{d\tau} = \mu - \sin\phi}$

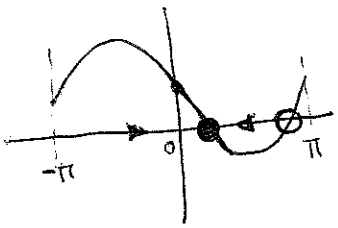
Gucken wir die Fixpunkte (wir machen es für $\mu > 0$, für $\mu < 0$ wäre das umgekehrte)

$\mu = 0$



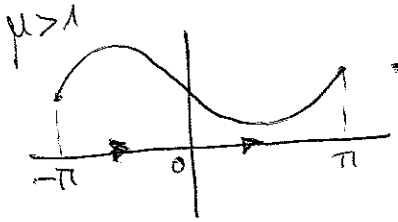

$\Rightarrow$ für $\mu = 0$, $\phi = 0$ ist ein stabiler Fixpunkt. Also wenn $\Omega = \omega$ (resonanter Reiz) wird die Synchronisierung perfekt.

$0 < \mu < 1$




$\Rightarrow$ für $0 < \mu < 1 \Rightarrow$ stabiler Fixpunkt für $\phi \neq 0$. Also wenn $\Omega \leq \omega + A \longrightarrow$ die Dephasierung ist nicht Null, aber sie bleibt konstant (das nennt man "<u>Phase Locking</u>")

$\mu > 1$




$\Rightarrow$ für $\mu > 1 \longrightarrow$ kein stabiler Fixpunkt. Die Phasen werden nicht gelockt, aber die Dephasierungs-geschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist nicht uniform (sie ist viel langsamer in der Nähe des Minimums).

- Das Modell reproduziert also ziemlich gut die qualitative Beobachtungen (S. 29):
  * Phase-locking nur für $\omega - A \leq \Omega \leq \omega + A$
  * kein phase-locking für $|\Omega - \omega| > A$, aber $\dot{\phi}$ ist nicht uniform

* Also, so ein einfaches Modell kann komplizierte <u>selbstorganisierte Synchronisierungsmustern</u> erklären! Selbstorganisierung kommt nehmals als Folge von relativ einfachen gegenseitigen Einflussen zwischen verschiedenen Elementen eines Systems!