

• 2D LINEARE SYSTEME

- * Bis her haben wir nur 1D Systeme studiert ($\dot{x} = f(x)$). Diese Systeme sind natürlich sehr beschränkt. In dieser Vorlesung werden wir mit komplexerteren Systemen aufgehen, und zwar mit 2D Systemen:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Wir werden sehen, dass die Dynamik nun viel reicher sein kann.

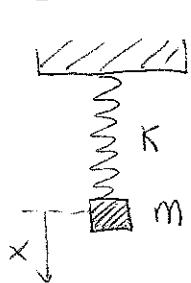
- * Wenn wir mit nichtlinearen 2D Systemen aufgehen, werden wir erst mal lineare 2D Systeme untersuchen. Dazu werden wir auch einige wichtige Begriffe einführen.

- * Ein 2D lineares System ist der Form:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{x} = \hat{A} \cdot \vec{x}$$

Die Variablen $\{x, y\}$ bauen eine Ebene \rightarrow die Phasenebene. Die Lösungen der Gleichung $\vec{x} = \hat{A} \cdot \vec{x}$ können als Bahnen auf der Phasenebene dargestellt werden.

- * Beispiel: harmonischer Oszillator

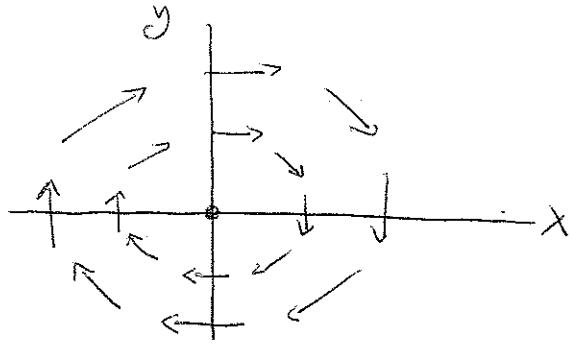


* Wir betrachten nur einen harmonischen Oszillator:
 $m \ddot{x} = -kx$ (es wirkt hier nur die Federkraft)

$$\text{Sei } y = \dot{x} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \ddot{y} = -\frac{k}{m}x \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

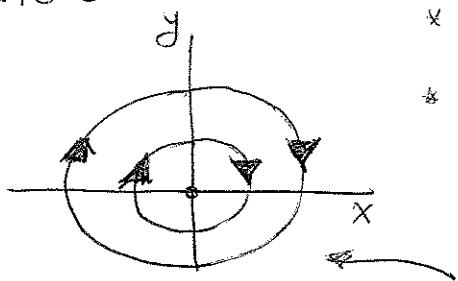
$$\text{Sei } \omega^2 = k/m \rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (y, -\omega^2 x)$$

$\Rightarrow \{\dot{x}, \dot{y}\}$ baut ein Vektorfeld auf der ^{Phasen-}Ebene. Wir können dieses Vektorfeld mit Hilfe von Pfeilen veranschaulichen:



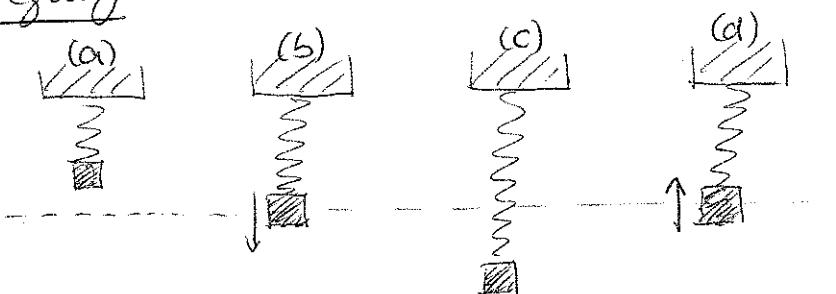
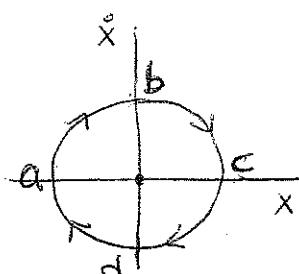
- * Der Vektorfeld $\vec{q}(x, y)$ spielt die Rolle eines Flusses in einer Flüssigkeit. Wenn wir in (x_0, y_0) auflegen, der Fluss sagt uns wo wir uns bewegen werden.

- * Wir können dieses Kontinuum um Pfeilen in einer einfachen Form darstellen:



- * Die Bahnen sind also geschlossene Bahnen.
- * Der Punkt $x=0, y=0 \rightarrow \dot{x}=0, \dot{y}=0$
Dieser Punkt ist also ein Fixpunkt
Das nennt man Phasenportrait.

- * geschlossene Bahnen haben eine einfache Bedeutung. Sie entsprechen einer periodischen Bewegung.



(* Bewegung: die ~~Massen~~ erfüllen $\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \text{Konstante}$. Das ist nicht mehr als Energieerhaltung!) also Ellipsen auf der $\{x, y\}$ -Ebene.

* Klassifizierung linearer Systeme

- * Wir kehren nun zu den allgemeinen Gleichungen $\ddot{\vec{x}} = \vec{A} \cdot \vec{x}$ zurück.
Die Matrix \vec{A} ist eine 2×2 Matrix. Wir können diese Matrix diagonalisieren, und wir bekommen:

- * 2 Eigenwerte: λ_1 und λ_2

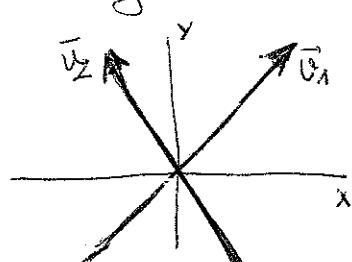
- * Die entsprechenden Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 .

* Die allgemeine Lösung der Gleichung ist der Form:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

wobei $C_{1,2}$ Konstanten sind, die wir durch die Anfangsbedingungen bestimmen müssen.

* Die Eigenvektoren bauen spezielle Achsen auf der Ebene.



* Wenn $\lambda_j > 0 \rightarrow$ die Komponente auf \vec{v}_j wächst exponentiell!

Wenn $\lambda_j < 0 \rightarrow$ die Komponente auf \vec{v}_j zerfällt exponentiell!

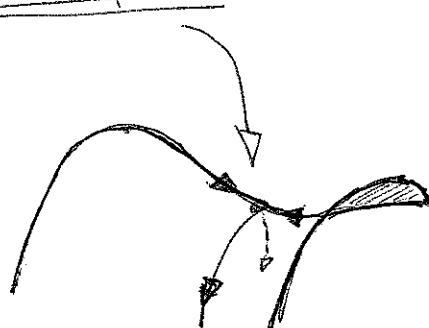
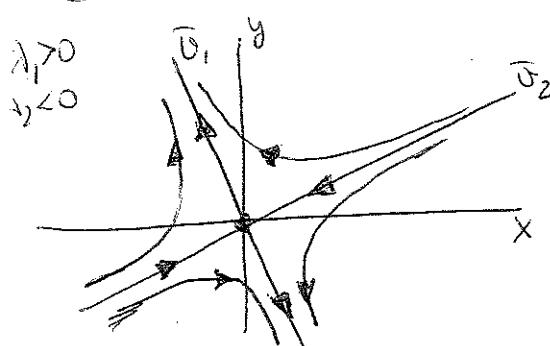
* Die Vorzeichen der λ_j 's spielen also eine sehr wichtige Rolle. Die Natur des Fixpunktes in $\{x=0, y=0\}$ hängt von den λ_j 's ab.

* Wir können die λ_j 's in der allgemeinen Form

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right]$$

schreiben, wobei $\Delta = \lambda_1 \lambda_2$ und $\tau = \lambda_1 + \lambda_2$.

① Wenn $\Delta < 0 \rightarrow$ also $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ oder $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
dann haben wir ein sogenanntes Sattelpunkt

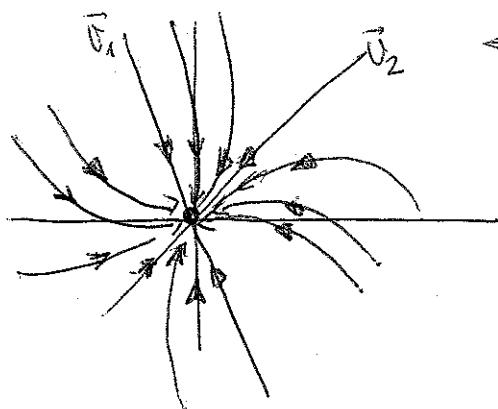


Sowas ist natürlich neu in 2D. Wir haben eine stabile Richtung (\vec{v}_1) und eine instabile Richtung (\vec{v}_2). In 1D die Fixpunkte waren stabil oder instabil.

② $\Delta > 0$

②a) $\zeta^2 - 4\Delta > 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\begin{cases} \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \rightarrow \zeta > 0 \\ \text{oder } \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \rightarrow \zeta < 0 \end{cases}$

②a.1) $\zeta < 0 \rightarrow$ stabiler Knoten ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$)

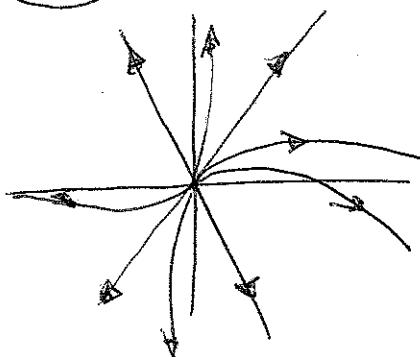


← In dem Fall $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

- \bar{v}_1 → schnelle Richtung
- \bar{v}_2 → langsame Richtung

Aber alle Pfeile zeigen nach innen.

②a.2) $\zeta > 0 \rightarrow$ instabiler Knoten ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$)

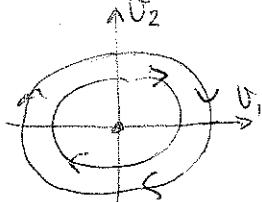


Alle Pfeile zeigen nach außen

②b) $\zeta^2 - 4\Delta < 0 \rightarrow \lambda_2 = \lambda_1^* \text{ und } \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha + i\omega \\ \lambda_2 = \alpha - i\omega \end{array} \right\}$
beide sind Imaginär

②b.1) Wenn $\alpha = 0 \rightarrow \vec{x}(t) = C_1 e^{i\omega t} \bar{v}_1 + C_2 e^{-i\omega t} \bar{v}_2$

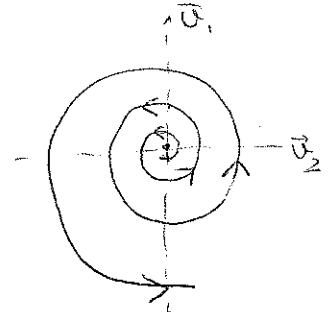
Dies ist eine periodische Lösung mit Periode $T = 2\pi/\omega$.



- So was haben wir schon gesehen (kern. Oszill.)
 - $(0,0)$ ist ein Fixpunkt
- Diese Art von Fixpunkt heißt ein Zentrum.

- Die Amplitude der Oszillationen bleibt konstant.

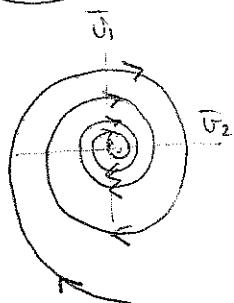
Q.b.2 Wenn $\alpha > 0$: $\vec{x}(t) = e^{\alpha t} [C_1 e^{i\omega_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{-i\omega_2 t} \vec{v}_2]$



- * Die Amplitude der Oszillationen wächst exponentiell auf.
- * Man hat also eine unstabile Spirale!

(genau gesagt eine ausgeweitete Spirale
→ eine instabile Spirale)

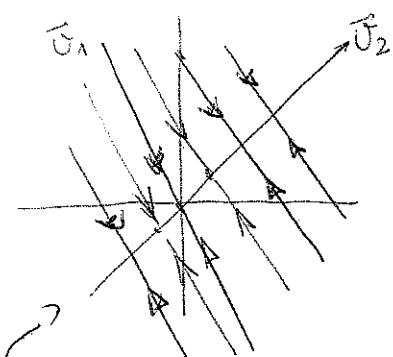
Q.b.3 Wenn $\alpha < 0$ → $\vec{x}(t) = e^{-|\alpha|t} [C_1 e^{i\omega_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{-i\omega_2 t} \vec{v}_2]$



- * Die Amplitude der Oszillationen zerfällt exponentiell.
- * Man hat hier eine stabile Spirale

(Bemerkung: ein Beispiel um stabile Spirale wäre ein harmonischer Oszillator mit Dämpfung ($\sim \gamma \dot{x}$). Wenn $\gamma < 2\omega \rightarrow \Omega = \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}; \Gamma = \gamma/2$
 $\rightarrow \lambda_{1,2} = -\Gamma \pm i\Omega$)

③ $\Delta = 0 \rightarrow$ dann $\lambda_1 = 0$ und/oder $\lambda_2 = 0$



Linie von Fixpunkten
(nicht-isolierte Fixpunkte)

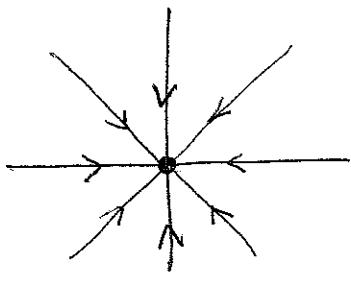
z.B.
Wenn $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0 \rightarrow$ alle Punkte auf der Axe \vec{v}_2 sind stabile Fixpunkte

Wenn $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 \rightarrow$ alle instabilen Fixpunkte

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$ und alle Punkte auf der Ebene sind Fixpunkte!

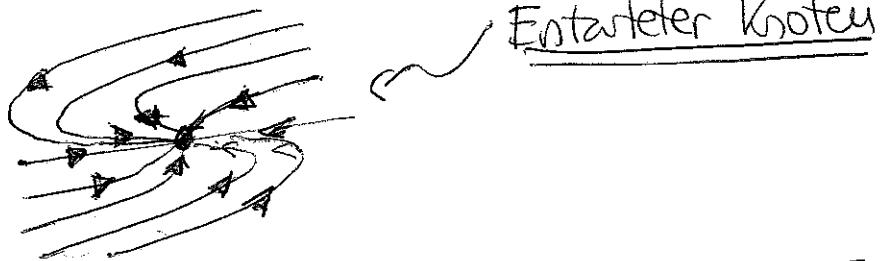
* Außerdem gibt es 2 besondere Fälle:

* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, und die 2 Eigenvektoren sind unabhängig voneinander. Das heißt ein Stern-Knoten:



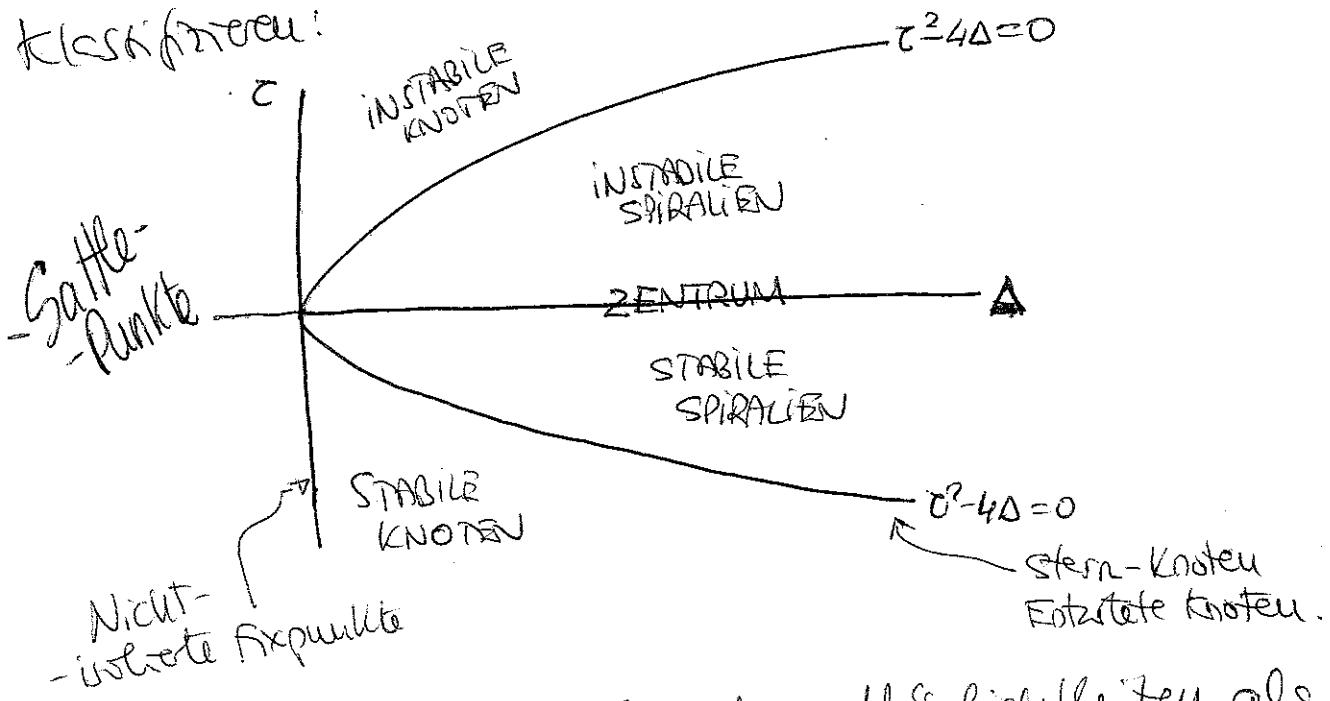
alle Richtungen sind genau so stabil oder instab.

- * $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ aber es gibt nur ein Eigenvektor
(z.B. $\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda & b \neq 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow$ Es gibt nur ein Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)



Entarteter Knoten

- * Wir können dann die verschiedenen Fixpunkte in 2D so klassifizieren:



- * Also, in 2D gibt es viele mehrere Möglichkeiten als in 1D!

* BEISPIEL:

- Wir nehmen 2 benachbarte Länder: A und B.
- Sei $M_A \equiv$ Meinung in A über B
 $M_B \equiv$ Meinung in B über A
- Je positiver $M_{A,B}$ desto besser die Meinung, und natürlich je negativer desto schlechter.

~~Die Meinung hängt von~~

- Die Entwicklung der Meinung von A über B, also \dot{M}_A , hängt von der jetzigen Meinung in A über B, also $\ddot{M}_A \sim a M_A$. Wenn:
 - * $a > 0 \rightarrow$ je besser die Meinung nun, desto besser die Meinung später, und natürlich umgekehrt. Wir können das "passionale Meinung" nennen.
 - * $a < 0 \rightarrow$ je besser die Meinung nun, desto schlechter die Meinung später. Wir können das "vorsichtige Meinung" nennen.
- \dot{M}_A hängt ebenfalls von M_B ab $\rightarrow \dot{M}_A \sim b M_B$. Wenn:
 - * $b > 0 \rightarrow$ je besser die Meinung im B über A, desto besser die Meinung in A über B später. Das wäre "Gegenseitigkeit".
 - * $b < 0 \rightarrow$ je besser M_B desto schlechter \dot{M}_A , das reicht gemein aus, aber das kann auch passieren...

• Also $\dot{M}_A = a M_A + b M_B$

und ähnlichweise:
 $\dot{M}_B = c M_C + d M_D$

} Nur haben wir ein lückiges System:

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix}$$

- * Gucken wir als Beispiel, was passiert wenn A genau so gegenseitig wie B ist (also $c=b>0$), und ebenfalls A ist genau so vorsichtig wie B (also $a=d<0$).

* Wir haben also die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind:

$$\lambda_1 = a+b, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

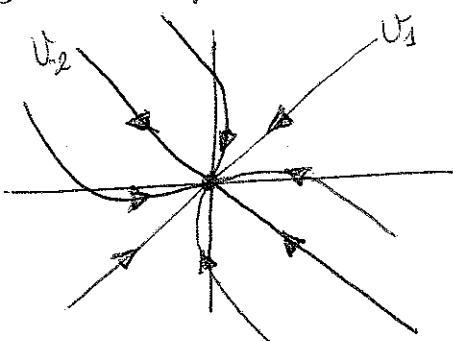
$$\lambda_2 = a-b, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } \Delta = \lambda_1 \lambda_2 = a^2 - b^2 \quad \left. \begin{array}{l} \zeta^2 - 4\Delta = 4b^2 > 0 \\ \zeta = \lambda_1 + \lambda_2 = 2a < 0 \end{array} \right\}$$

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

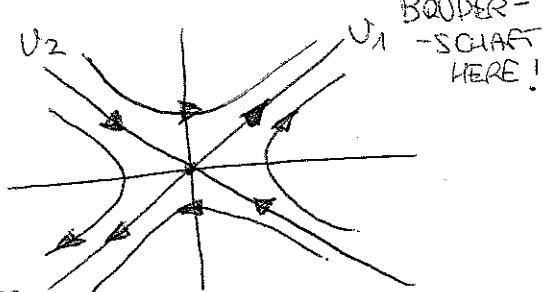
Nun können wir, der Punkt $(0,0)$ klassifizieren. Der Punkt $M_A = M_B$ bedeutet eindeutig gegenseitige Indifferenz.

$$\begin{array}{l} * \text{ Wenn } a^2 > b^2 \rightarrow \Delta > 0 \\ \quad \quad \quad \zeta < 0 \\ \quad \quad \quad \zeta^2 - 4\Delta > 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Stabiler} \\ \text{Knoten} \end{array} \right\}$$



Guck mal, daß $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, also die Richtung v_2 ist schneller.

$$\begin{array}{l} * \text{ Wenn } a^2 < b^2 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \text{Sattelpunkt} \\ \quad \quad \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \end{array}$$



Nun haben wir eine extrem gefährliche Situation vor. Eine kleine Abweichung von der Indifferenz führt entweder zu einer Bruderschaft oder zu Krieg!

KRIEG HIER!

* Also wenn beide zu vorsichtig sind, dann Indifferenz ist die Folge. In gegeuteil wenn die nicht vorsichtig genug sind, dann entweder werden A und B die beste Freunde, oder die bitterste Feinde!

● 2D NICHT-LINEARE SYSTEME

- * Wir haben gerade die lineare Systeme untersucht. Wir sind aber viel mehr an nicht-linearen Systemen interessiert (trotzdem, was wir gerade über Fixpunkte gelernt haben, wird bald sehr nützlich sein)
- * Wir sind hier an Gleichungssysteme der Form:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

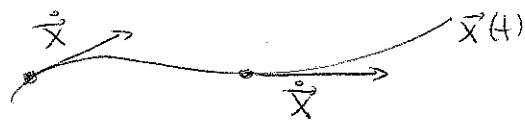
interessiert. Sei $\vec{x} = (x_1, x_2)$ und $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$, dann das Gleichungssystem kann in einer komplexeren Form geschrieben werden:

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

$\vec{x} = (x_1, x_2) \rightarrow$ Punkt auf der Phasenebene (S. 32)

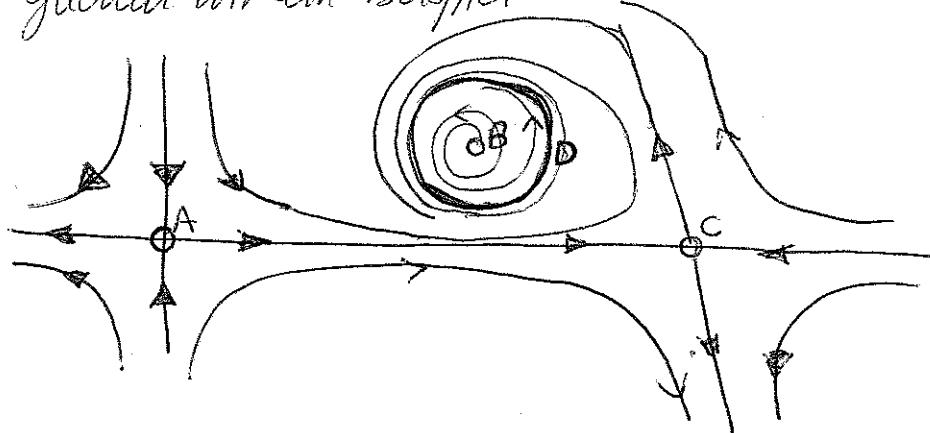
$\ddot{\vec{x}}$ \longrightarrow Geschwindigkeitsvektor am Punkt \vec{x} .

Wie kann ~~wird~~ die Bewegung durch eine Bahn $\vec{x}(t)$ auf der Phasenebene dargestellt



- * Für nicht-lineare Systeme gibt es typischerweise keine analytische Lösung, und wenn doch ist typischerweise diese Lösung nicht so nützlich. Wir können aber viel über die qualitativen Eigenschaften des Bewegung lernen, wenn wir die Eigenschaften von $\vec{f}(\vec{x})$ näher auspacken (etwas ähnliches haben wir in 1D gemacht, S. 3).
- * Natürlich sind die Möglichkeiten für Phasenportraits unendlich, aber alle Phasenportraits haben einige allgemeine Eigenschaften, die (mindestens qualitativ) mit Hilfe der Eigenschaften von $\vec{f}(\vec{x})$ untersucht werden können.

- * Gucken wir ein Beispiel:

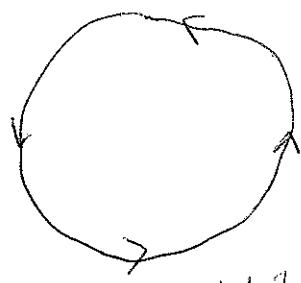


- * Es gibt Fixpunkte (in dem Fall A, B und C). In diesen Fixpunkten $\dot{x}(x) = 0$
- * geschlossene Bahnen (in dem Fall D). Die sind periodische Lösungen (S. 33): $x(t+T) = x(t)$, wobei T ist die Periode
- * Das Verhalten der Bewegung in der Nähe der Fixpunkte folgt einigen universellen Mustern; z.B. in der Nähe von A und C hat man nahefähr das gleiche (einen Sattelpunkt).
- * Die Fixpunkte können stabil oder instabil sein; z.B. A, B und C (und die geschlossene Bahn D) sind stabil (A und C Sattelpunkte, B ist eine stabile Spirale), aber die geschlossene Bahn D ist instabil, die Bahnen um Ihnen und um außen konvergieren auf D.
- * Wenn $I(x)$ glatt genug ist (~~stetig~~ (stetig gesagt $I'(x)$ ist stetig differenzierbar) dann ist die $x(t)$ Lösung eindeutig. Das bedeutet dass die Bahnen ~~verschneiden~~ sich nicht kreuzen ~~dürfen~~ dürfen.

(Bemerkung: anders gesagt, wenn ich die Phasenportraits als eine Flüssigkeit verstehe, wenn ich ein "Kork" auf der Flüssigkeit lasse, dann weißt der Kork immer woher er geht!)

* Das hat interessante Folgen, besonders in 2D.

Nehmen wir eine geschlossene Bahn:



* Da die Bahnen sich nicht kreuzen können, dann eine Bahn die innerhalb der geschlossenen Bahn anfängt, dann bleibt immer innerhalb der geschlossenen Bahn!

stabile

* Wenn es Fixpunkte innerhalb der geschlossenen Bahn, dann können die Bahnen dort enden. Aber wenn nicht, es ist intuitiv klar das die Bahnen können nicht unendlich innerhalb der geschlossenen Bahn rumseilen. Die Bahnen müssen sich an der geschlossenen Bahn annähern, und eventuell an sie konvergieren!

* Mehr über das später.

* LINEARISATION UM FIXPUNKTE

* Auf S. ⑥ haben wir die Linearisation um Fixpunkte für 1D Probleme untersucht. Wir werden nun diese Idee für 2D Systeme erweitern:

* Sei $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$ und (x^*, y^*) ein Fixpunkt $\Rightarrow \begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$

Sei $u = x - x^*$ und $v = y - y^*$. Dann $\ddot{u} = \dot{x} = f(x^* + u, y^* + v)$ $\stackrel{\text{Taylor}}{=} f(x^*, y^*) + u \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} + v \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} + O(u^2, v^2, uv)$

Ahnlicherweise: $\ddot{v} = v \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} + u \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} + O(u^2, v^2, uv)$

* Dann $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O(u^2, v^2, uv)$

(Bemerkung: hier $\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x^*, y=y^*}$ und genauso für die anderen Ableitungen)

* Wenn wir die quadratischen Glieder vernachlässigen können, dann haben wir ein lineares System mit einer entsprechenden Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\text{Jacobian-Matrix}}$$

Dann können wir unsere Analyse von S. (33) - (37) für die Charakterisierung der Fixpunkte anwenden. Das ist im Prinzip o.k. außer für Grenzfällen auf S. (37): Zentrum, Stern-Knoten, entartete Knoten und nicht-isolierte Fixpunkte.

* Suchen wir ein Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^3 \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

* Wir müssen erstmal die Fixpunkte finden:

$$* f(x) = -x + x^3 = x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

$$* g(y) = -2y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$* \text{Wir haben also 3 Fixpunkte: } \vec{x}_1 = (0,0); \vec{x}_2 = (1,0); \vec{x}_3 = (-1,0)$$

Wir haben also 3 Fixpunkte: $\vec{x}_1 = (0,0); \vec{x}_2 = (1,0); \vec{x}_3 = (-1,0)$

* Wir bauen nun die Jacob-Matrix:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -1 + 3x^2 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \hat{A}(x,y)$$

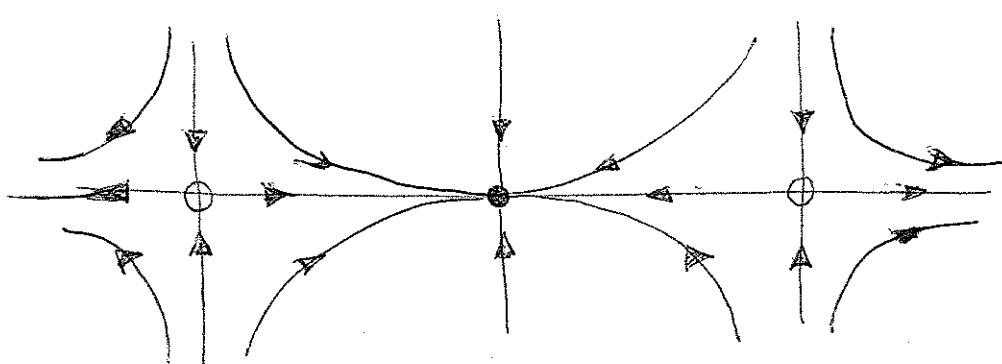
$$* \text{Dann: } \hat{A}(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \hat{A}(\vec{x}_2) = \hat{A}(\vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

* Dann für:

$$\vec{x}_1 = (0,0) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \} \text{ stabiler Knoten}$$

$$\vec{x}_{2,3} = (\pm 1, 0) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \} \text{ Schelpunkt}$$

* Der Phasenpunkt ist der Form:



[Wie für 1D Systeme
wir benutzen
○ = Instabile Fixpunkte
● = stabile Fixpunkte]

* Gucken wir nun ein Beispiel, in die Sachen nicht so einfach sind...

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + ay(x^2+y^2) \end{cases} \text{ wobei } a \text{ eine Konstante ist.}$$

Gucken wir, was passiert in der Nähe des Koordinatenursprungs (0,0). ((0,0)) ist natürlich ein Fixpunkt).

* Wir linearisieren um (0,0)

$$f(x,y) = -y + ax(x^2+y^2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 3ax^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2axy$$

$$g(x,y) = x + ay(x^2+y^2) \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2ayx$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3ay^2$$

$$\hat{A}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Aus unserer Analyse von S. 33, das würde heißen, dass (0,0) ist ein zentrum, und zwar für alle Werte von a.

* Wir werden nun sehen, dass die Schätzungs falsch ist.

* Nehmen wir Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned} \right\}$$

* Dann: $\dot{r} = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \ddot{x}[-\sin \theta + a \cos \theta (x^2 + y^2)] + \ddot{y}[\cos \theta + a \sin \theta (x^2 + y^2)] \\ &= a(x^2 + y^2)(\ddot{x} + \ddot{y}) = a \dot{r}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = a \dot{r}^2}$$

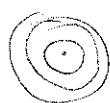
* Andererseits: $\tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow (1 + \tan^2 \theta) \dot{\theta} = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{x^2}$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{r^2} = \frac{x[x + a y r^2] - [y + a x r^2]y}{r^2} = 1$$

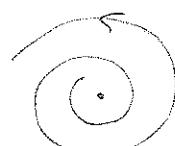
$$\rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = 1} \rightarrow \text{konstante Winkelgeschwindigkeit.}$$

* Die radiale und winkel-Bewegungen sind also entkoppelt.

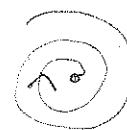
* Nur wenn $a=0 \rightarrow \ddot{r}=0 \rightarrow$ und man hat ein Kreis, und daher $(0,0)$ ist ein Zentrum.



* Wenn $a > 0 \rightarrow r$ wächst mit der Zeit
→ Instabile Spirale



$a < 0 \rightarrow r$ nimmt mit der Zeit ab
→ stabile Spirale



* Die lineare Analyse liegt also in diesem Fall daneben!
Das ist so, weil für geometrische (S. 37), quadratische Störungen
aus in der Grenze bringen.

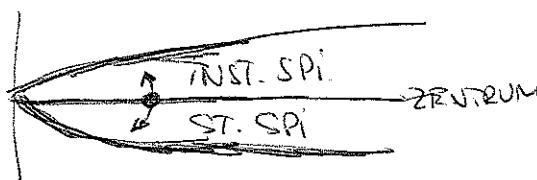
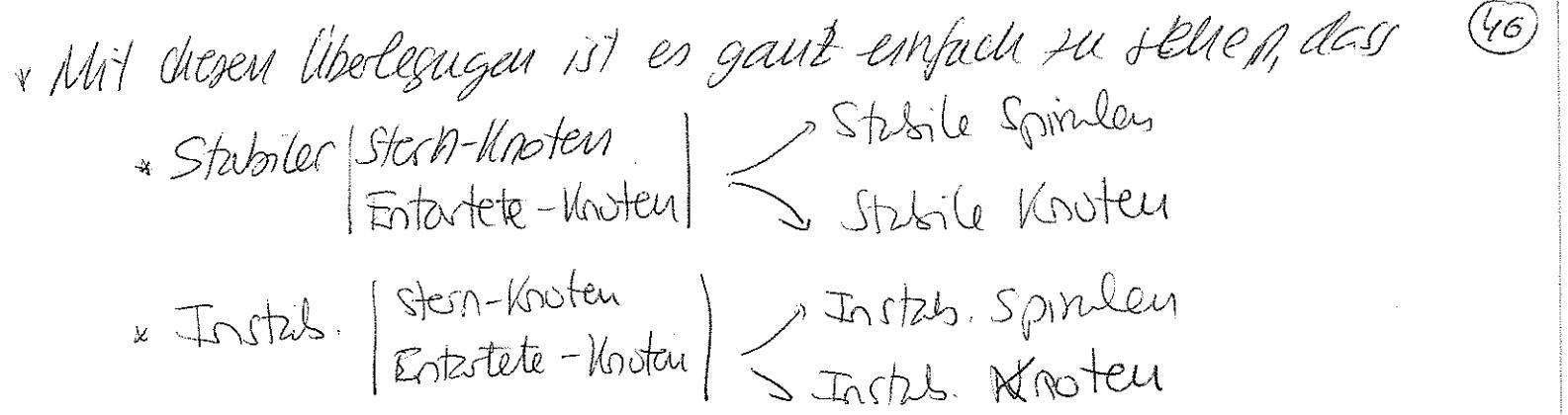


Diagramm
vom S. 37



* LOTKA - VOLTERRA - MODELLE

- * Auf S.(5) haben wir die Dynamik einer Population untersucht. In diesem Zusammenhang haben wir die logistische Gleichung und modifizierte logistische Gleichung (S.(21)) eingeführt. Wir hatten aber nur eine Population (deshalb war das Problem 10!).
- * Lotka-Volterra-Modelle beschreiben die Wechselwirkung zwischen 2 (oder mehr) Populationen am selben Ökosystem, und sind daher eine wichtige Grundlage der Populationsdynamik in theoretischer Biologie (und anderen Fächern).
- * Es gibt sehr viele Varianten des Lotka-Volterra-Modells. Wir werden hier 2 interessante Probleme untersuchen:
 - Das Räuber-Beute Problem
 - Das Konkurrenz Problem

* Das Räuber-Beute Problem

- * Unter Räuber und Beute sind dabei zwei Klassen von Lebewesen gemeint, wobei die eine sich von der anderen ernährt.
- * Die Populationszahlen der Beute bzw. des Räuber seien mit N_1 und N_2 bezeichnet.
- * Die ungestörten Wachstumsraten seien α_1 und α_2 (die Vorzeichen liegen noch nicht fest): $\dot{N}_1 \propto \alpha_1 N_1$

- * Die Anzahl der Begegnungen zwischen Beute und Räuber (47) hängt natürlich von der Population ab, und zwar $\sim N_1 N_2$. Eine Begegnung mit einem Räuber führt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dazu, dass die Beute gefressen wird. Daher $\dot{N}_1 \propto -\gamma_1 N_1 N_2$ ($\gamma_1 > 0$).

Dagegen ist die Auswirkung einer Begegnung auf die Zahl der Räuber nur indirekt, aber jedenfalls positiv:

$$\dot{N}_2 \propto +\gamma_2 N_1 N_2 \quad (\gamma_2 > 0)$$

- * Wir nehmen an, dass:

- $\epsilon_1 = \epsilon_1 > 0 \rightarrow$ ganz augenfällig würde die Beutelanzahl exponentiell auf (realistisch wäre ^{besser} vielleicht eine logistische Gleichung hier, da die Beutel auch sich von z.B. Pflanzen ernähren müssen)
- $\epsilon_2 = -\epsilon_2 \quad (\epsilon_2 > 0) \rightarrow$ ganz augenfällig würde die Räuber sterben (ohne Beutel gibt es nichts zu fressen!)

- * Die endgültige Gleichungen haben also der Form:

$$\dot{N}_1 = \epsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 = [\epsilon_1 - \gamma_1 N_2] N_1$$

$$\dot{N}_2 = -\epsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2 = [-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1] N_2$$

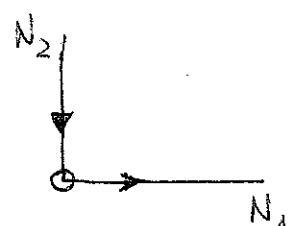
- * Gucken wir erst mal die Fixpunkte:

$$* N_1 = 0 ; N_2 = 0 \rightarrow \text{Triviale Lösung}$$

$$* N_1 = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2} ; N_2 = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1} \rightarrow \text{innerer Gleichgewichtspunkt}$$

$$* \text{Für } N_1 = 0 \rightarrow \dot{N}_1 = 0 ; \dot{N}_2 = -\epsilon_2 N_2 \}$$

$$* N_2 = 0 \rightarrow \dot{N}_2 = 0 ; \dot{N}_1 = \epsilon_1 N_1 \}$$



* Füllen wir nun den Fixpunkt ($N_1 = \frac{\epsilon_2}{\delta_2}$, $N_2 = \epsilon_1/\delta_1$)

Wir berechnen nun um diesen Fixpunkt:

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = \frac{\epsilon_2}{\delta_2} + \eta_1 \\ N_2 = \frac{\epsilon_1}{\delta_1} + \eta_2 \end{array} \right\} \quad \dot{N}_1 = \dot{\eta}_1 = \left[\epsilon_1 - \delta_1 \left(\frac{\epsilon_2}{\delta_2} + \eta_2 \right) \right] \left[\frac{\epsilon_2}{\delta_2} + \eta_1 \right]$$

$$\dot{N}_2 = \left. \begin{array}{l} \dot{\eta}_1 = - \left[\frac{\delta_1}{\delta_2} \epsilon_2 \right] \eta_2 \\ \text{Ähnlicherweise: } \dot{\eta}_2 = \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} \epsilon_1 \right] \eta_1 \end{array} \right\} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & - \frac{\delta_1}{\delta_2} \epsilon_2 \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

⇒ Die Jacobimatrix hat also 2 Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$$

⇒ Aus unserer Diskussion um S.(35) erwarten wir also ein Zentrum.

* Natürlich, wir wissen schon aus unserer Diskussion um S.(45), dass mit Zentrum man besonders aufpassen muss, und zwar wegen nichtlinearer Effekte → vielleicht haben wir hier auch eine Spurke wie auf S.(45).

Wenn $(\epsilon_1/\delta_1, \epsilon_2/\delta_2)$ wirklich ein Zentrum ist, dann sollte man geschlossene Bahnen haben. Geschlossene Bahnen bedeuten, dass irgendwelche Größe muss erhalten werden (das war es in unserer Diskussion des harmonischen Oszillators auf S.(33), wo die Energie erhalten wurde).

* Man kann sehen, dass hier es eine erhaltete Größe gibt. Und daher sind die geschlossene Bahnen stabil. Füllen wir mal das ein.

* Nehmen wir die ursprüngliche Gleichungen

$$\dot{N}_1 = N_1 [\epsilon_1 - \delta_1 N_2]$$

$$\dot{N}_2 = N_2 [-\epsilon_2 + \delta_2 N_1]$$

- * Wir multiplizieren beide Gleichungen ~~mit γ_1 und γ_2~~

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \gamma_2 \dot{N}_1 &= \gamma_2 \epsilon_1 N_1 - \gamma_1 \gamma_2 N_1 N_2 \\ \gamma_1 \dot{N}_2 &= -\gamma_1 \epsilon_2 N_2 + \gamma_1 \gamma_2 N_1 N_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{wir addieren beide}} \boxed{\dot{N}_1 + \dot{N}_2 = \gamma_2 \epsilon_1 N_1 - \gamma_1 \epsilon_2 N_2} \end{aligned}$$

- * Wir multiplizieren nun anders:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_2}{N_1} \dot{N}_1 &= \epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_2 \gamma_1 N_2 \\ \frac{\epsilon_1}{N_2} \dot{N}_2 &= -\epsilon_2 \epsilon_1 + \epsilon_1 \gamma_2 N_1 \end{aligned} \xrightarrow{\text{wir addieren beide}} \text{Die Rechte Seiten dieser 2 Gleichungen sind gleich!}$$

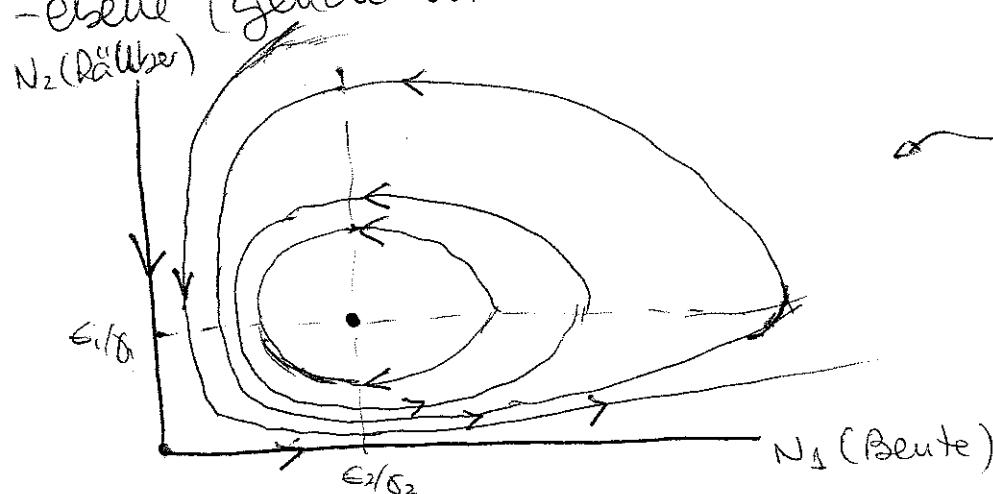
$$\boxed{\frac{\epsilon_2}{N_1} \dot{N}_1 + \frac{\epsilon_1}{N_2} \dot{N}_2 = \gamma_2 \epsilon_1 N_1 - \gamma_1 \epsilon_2 N_2}$$

$$\Rightarrow \text{daher } \frac{\epsilon_2}{N_1} \dot{N}_1 + \frac{\epsilon_1}{N_2} \dot{N}_2 - \gamma_2 \dot{N}_1 - \gamma_1 \dot{N}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [\epsilon_2 \ln N_1 + \epsilon_1 \ln N_2 - \gamma_2 N_1 - \gamma_1 N_2] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \epsilon_2 \ln N_1 - \epsilon_1 \ln N_2 = \text{const.}} \quad \text{Erhaltungssatz!}$$

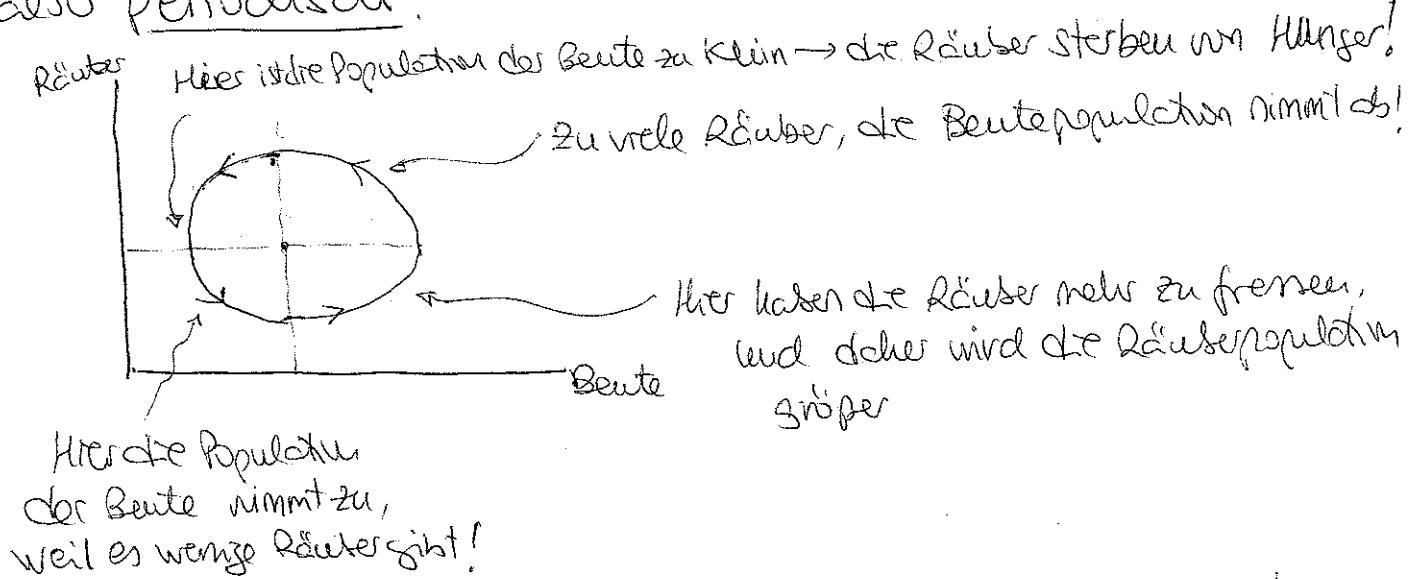
- * Dieser Erhaltungssatz definiert Isokurven auf der Phasenebene (genau wie die Ellipsen auf S. 32)):



die Isokurven sehen so aus.

- * Der Fixpunkt ist also ein Zentrum!

- * Die Populationen der Räuber-Tiere und der Beute-Tiere sind also periodisch! (50)



- * Also nun haben wir ein Beispiel eines Ökologischen Zyklus!

* Das Konkurrenz Problem

- * Wir betrachten nur zwei Klassen von Lebewesen, die die gleichen begrenzten Ressourcen nutzen (z.B. Kanniuchen ^{und} Schafe, die nach Gras konkurrieren).

- * Wir nennen die Populationen der 2 Klassen $\rightarrow \{N_1, N_2\}$
- * Die Entwicklung der Populationen hängt von 2 Faktoren ab:

① Intraspezifische Konkurrenz: Wettbewerb um Ressourcen innerhalb einer Art. Ohne der anderen Art würden wir diese intraspezifische Konkurrenz mit Hilfe einer logistischen Gleichung (S. 5) beschreiben $\Rightarrow N_1 \propto N_1(a - N_1)$
 $N_2 \propto N_2(b - N_2)$

② Interspezifische Konkurrenz: Wettbewerb um Ressourcen zwischen Individuen verschiedener Arten. Wenn 2 Individuen verschiedener Art ~~sich treffen~~, dann gibt es Ärger! Diese Treffen finden mit einer Rate proportional zu den Produkt der Populationen statt. Diese Kämpfe reduzieren die

Population der 2 Arten, aber vielleicht nicht gleichermäß:

$$\dot{N}_1 = \gamma_1 N_1 N_2$$

$$\dot{N}_2 = -\gamma_2 N_1 N_2$$

* Dafür:

$$\dot{N}_1 = N_1 (a - N_1 - \gamma_1 N_2)$$

$$\dot{N}_2 = N_2 (b - N_2 - \gamma_2 N_1)$$

- * Nehmen wir, dass $a > b$ (die Reproduktionsrate von 1 ist größer als die von 2), aber $\gamma_1 > \gamma_2$ (die Art 2 ist stärker als 1, und deswegen in einem Kampf wird 1 typischerweise schlechter verletzt).

- * Sei z.B. $a=3; b=2$ $\left. \begin{array}{l} \dot{N}_1 = f(N_1, N_2) = N_1 (3 - N_1 - 2N_2) \\ \dot{N}_2 = g(N_1, N_2) = N_2 (2 - N_2 - N_1) \end{array} \right\}$

- * Wir suchen zunächst nach den Fixpunkten:

$$N_1(3 - N_1 - 2N_2) = 0 \rightarrow N_1 = 0; N_1 = 3 - 2N_2$$

$$N_2(2 - N_2 - N_1) = 0 \rightarrow N_2 = 0; N_2 = 2 - N_1$$

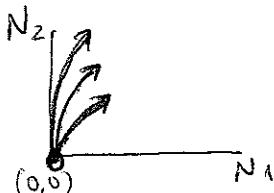
$$\rightarrow \vec{x}_1 = (0, 0); \vec{x}_2 = (0, 2); \vec{x}_3 = (3, 0); \vec{x}_4 = (1, 1)$$

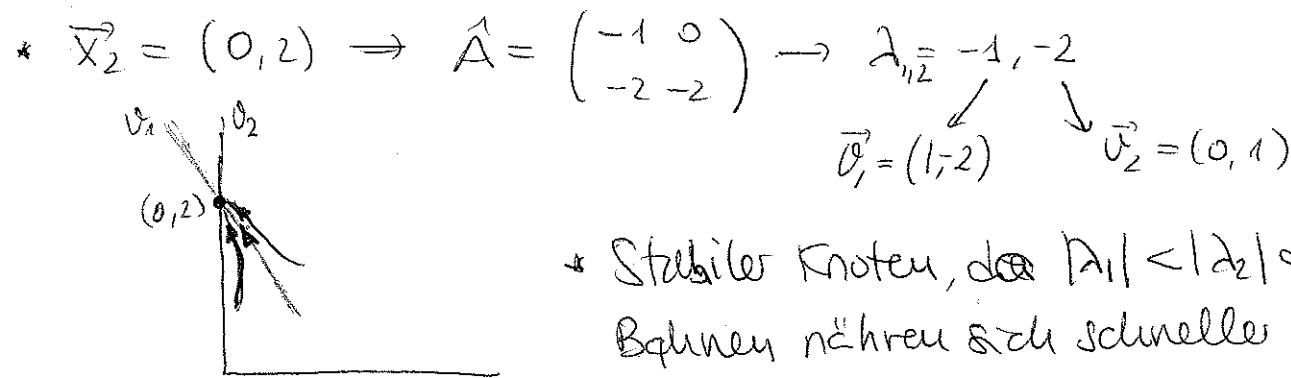
- * Wir werden nun die Jakkobi-Matrix untersuchen:

$$\frac{\partial f}{\partial N_1} = 3 - 2N_1 - 2N_2; \quad \frac{\partial f}{\partial N_2} = -2N_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial N_1} = -N_2; \quad \frac{\partial g}{\partial N_2} = 2 - 2N_2 - N_1$$

- * Gucken wir $\vec{x}_1 = (0, 0) \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Instabiler Knoten
 $(\lambda_1 = 3 \rightarrow \vec{v}_1 = (1, 0))$
 $(\lambda_2 = 2 \rightarrow \vec{v}_2 = (0, 1))$





* $\vec{x}_3 = (3, 0) \Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -3, -1$

$\vec{o}_1 = (4, 0) \quad \vec{o}_2 = (3, -1)$

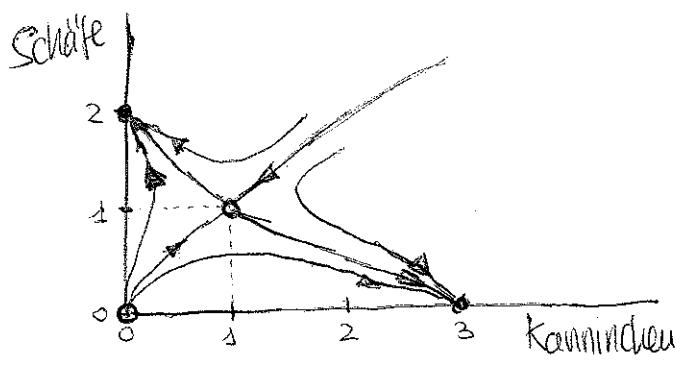
* Auch ein stabiler Fixpunkt. Noch mal,
da $|\lambda_2| > |\lambda_1| \rightarrow$ die Bahnkurven nähern sich
schneller zu \vec{o}_2

* $\vec{x}_4 = (1, 1) \Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$\vec{o}_1 = (\sqrt{2}, -1) \quad \vec{o}_2 = (\sqrt{2}, 1)$

Wir haben also einen Sattelpunkt.

* Nun haben wir alle Fixpunkte untersucht, jetzt sollten wir einfach
die Linien miteinander verknüpfen (diese Lösung passt ^{gut} mindestens qualitativ,
mit der numerischen Lösung des Problems).



* Dieses Diagramm hat eine interessante Bedeutung. Wenn 2 Arten in einer Ökosystem nach den selben Ressourcen konkurrieren, dann eine Art führt die andere Art bis zur Extinktion.
(Konkurrenzaußenschlussprinzip)

* So ein einfaches Modell hat schon die Idee der Selektion!

* KONSERVATIVE SYSTEME

- * Auf S. ④⁹ haben wir gesehen, dass der nicht-triviale Fixpunkt des Räuber-Beutel-Modells doch ein Zentrum war, und zwar weil es eine ~~genügende~~ Erhaltung gab.
- * Auf S. ③⁹ haben wir den Fall eines harmonischen Oszillators, wo $(0,0)$ auch ein Zentrum war, und zwar wegen Energie-Erhaltung. Erhaltungssätze spielen also eine sehr bedeutende Rolle.
- * In der Newton-Mechanik finden wir viele Beispiele von 2D Systemen mit Energie-Erhaltung. Diese Systeme sind die konservativen Systeme, die wir aus der klassischen Mechanik schon kennen

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{d}{dx} V \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{potentielle} \\ \text{Energie} \end{array}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} = -\dot{x}\frac{d}{dx} V \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{m(\dot{x})^2}{2} + V(x) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)} \rightarrow \underline{\text{Energie-Erhaltung}}$$

- * Wir werden als konservatives System bezeichnen, alle Systeme mit einer Erhaltungsgröße (z.B. der Räuber-Beute-Modell auf S. ④⁹).

Also ein System $\dot{x} = f(x)$ ist konservativ, wenn es eine große $E(x)$ (eine reelle stetige Funktion) die ~~ist~~ auf den Bahnen erhalten wird

(Bemerkung: aber $E(x)$ ist nicht konstant, i.e. sie ist anders für die verschiedenen Bahnen).

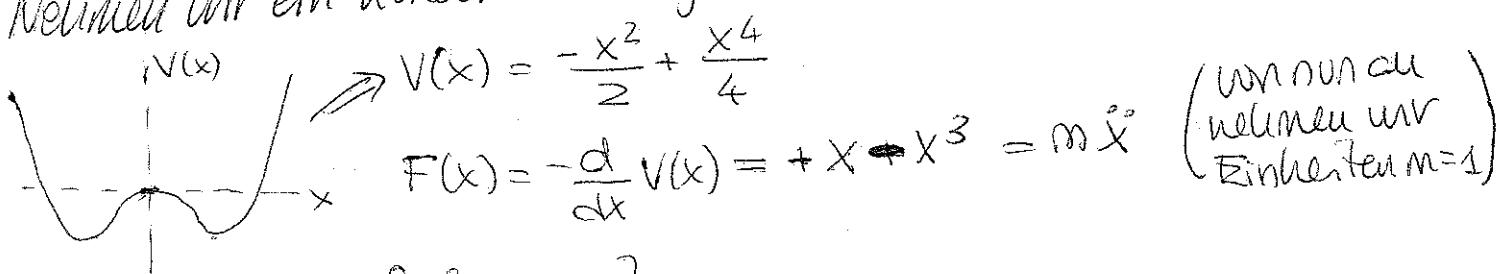
- * In einem konservativen System gibt es keine anziehende Fixpunkte. Anziehende Fixpunkte würden bedeuten, dass verschiedene Bahnen (mit verschiedenen ~~E-Werten~~) würden in einem Punkt ^{wieder} konvergieren, aber das kann nicht sein, wenn E-Erhaltung muss.

- * Also, in nicht-linearen konserватiven Systemen gibt es keinen stabilen (oder instabilen) Knoten, und keine stabile (oder instabile) Spirale.

- Wir können aber ein Zentrum haben (S. 33 und 49) und auch Sattelpunkte, wie wir nun in einem Beispiel sehen werden.

- Beispiel: Das Doppelmuldepotential

- Nehmen wir ein konseratives System mit einem Potential:



$$\Rightarrow \text{Sei } y = \dot{x} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \ddot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Wir suchen nach den Fixpunkten $\rightarrow y=0 \rightarrow x(1-x^2)=0 \rightarrow x=0, x=\pm 1$

$$\vec{x}_1 = (0, 0)$$

$$\vec{x}_2 = (1, 0)$$

$$\vec{x}_3 = (-1, 0)$$

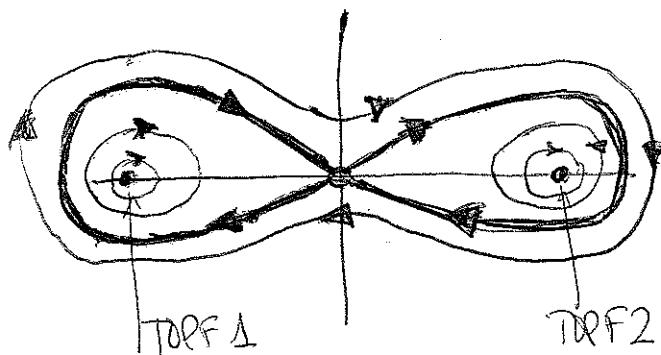
Die Jacobi-Matrix ist der Form:

$$\hat{A}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = (0, 0) \rightarrow \hat{A}(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\vec{x}_2 = (1, 0) \rightarrow \hat{A}(\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2} \rightarrow \text{Zentrum}$$

Die werden erhalten wegen Energie-Erhaltung!!



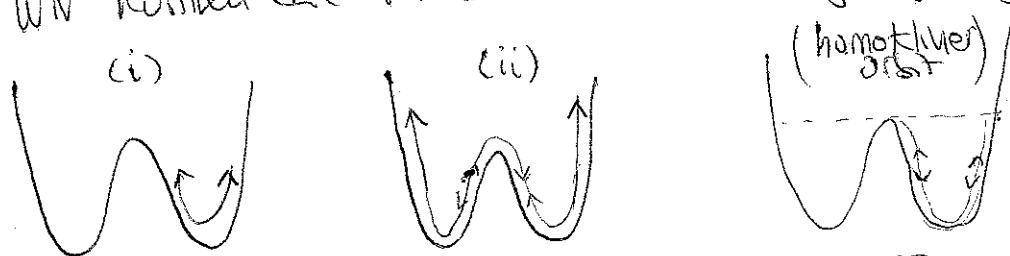
Phasenporträt für das Doppelmuldepotential

* Wir haben also 2 Sorten periodischer Lösungen:

- Lösungen die die Nähe eines Potenzialminimums mit verlassen (kleine geschlossene Bahnen in der Nähe von (± 1))
- Wang die zwischen den 2 Töpfen schwingen

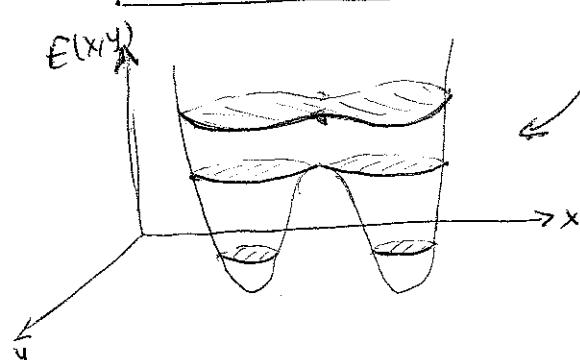
Diese beiden Arten von Wegen sind durch eine besondere Bahn (fette Linie auf S. 54). Die sind Bahnen, die starten und enden an demselben Fixpunkt (der Sattelpunkt an $(0,0)$). Man nennt solche Bahnen einer homokliner Orbit.

* Wir können die verschiedenen Bewegungen ganz einfach verteilen



* Alle Bahnen im Phasenporträt auf S. 54 erhalten!

$$E_{(x,y)} = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$



Die verschiedenen Energieniveaus ergeben die Bahnen auf S. 54

* In diesem Graph sollte klar sein, dass die Minima x^* der Schwingungsgröße $E(x)$ sind Zentren, i.e. Bahnen in der Nähe von einem Minimum in $E(x)$ sind immer geschlossen.

* REVERSIBLE SYSTEME

- Für viele mechanische Systeme ist es egal ob die Zeit vorwärts oder rückwärts läuft (z.B. in einem Pendulum, mehr über das Pendulum kommt).
- Nehmen wir ein mechanisches System mit einer Newtonischen Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \ddot{x} = F(x)$$

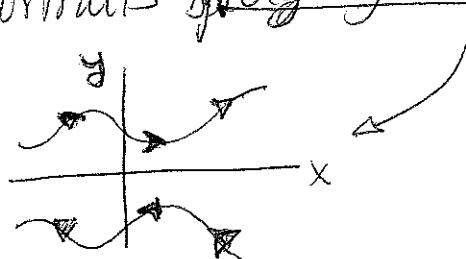
Wenn wir die Zeit umkehren $\rightarrow t \rightarrow -t$, aber $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2}{d(-t)^2}$, und die Gleichung bleibt unverändert.

Gucken wir mal passet im Phasenraum:

$$y = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} \rightarrow -\frac{dx}{d(-t)}$$

Dann müssen $\begin{cases} t \rightarrow -t \\ y \rightarrow -y \end{cases}$. Diese Transformation lässt das System unverändert.

Dann, wenn $(x(t), y(t))$ eine Ltrg., dann so ist auch $(x(-t), -y(-t))$ eine Ltrg. Das bedeutet, dass die Phasenkurve spiegel-symmetrisch (in der x-Achse) sein müssen:



Aber die teilen
ähnliche
Eigenschaften

- Reversible und konservative Systeme sind mit das gleiche,
- z.B. wenn \vec{x}^* ein linearer Zentrum ist (also $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), dann ist \vec{x}^* ein edler Zentrum (ab die Bahnen um \vec{x}^* sind geschlossene Orbits).

* Das ist auch Wahr für eine exakt erweiterte Version der Definition um reversibles System:

- * Sei $\dot{x} = f(x,y)$ } mit f ^{ungerade} in y ($\sim y, y^3, y^5, \dots$) $f(x,-y) = -f(x,y)$
- $\dot{y} = g(x,y)$ } und g gerade in y ($\sim y^2, y^4, y^6, \dots$) $g(x,-y) = g(x,y)$

dieses System ist auch reversible (also $t \rightarrow -t$ läßt das System unverändert).

* Beispiel:

$$\text{Sei } \begin{cases} \dot{x} = y - y^3 \\ \dot{y} = -x - y^2 \end{cases}$$

reversibel

Fixpunkte

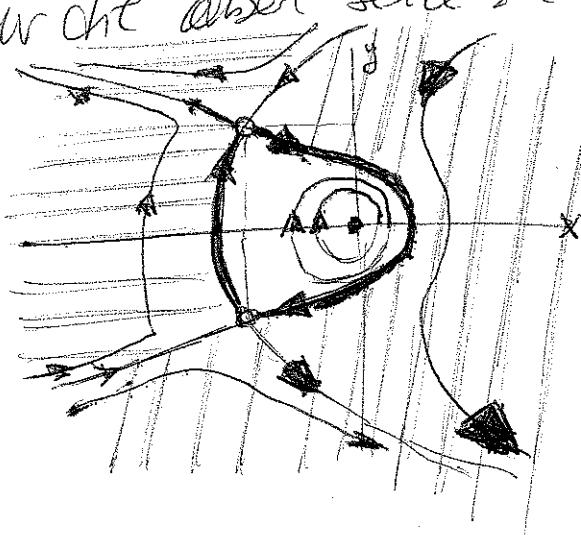
$$x = -y^2 \rightarrow \begin{cases} \vec{x}_1 = (0,0) \\ \vec{x}_2 = (-1,1) \\ \vec{x}_3 = (-1,-1) \end{cases}$$

Jakobi $\hat{A}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1-3y^2 \\ -1 & -2y \end{pmatrix}$

$$\lambda(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \rightarrow \text{Zentrum}$$

$$\bar{\lambda}(\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \rightarrow \text{Sattelpunkt}.$$

Eigentlich, da das System spiegelsymmetrisch ist, brauchen wir nur die obere Seite zu reduzieren.



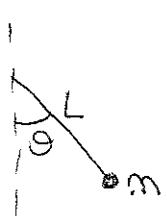
* Wir haben also 3 Bereiche:

- * Die Wölkung fließt ins $x = +\infty, y = -\infty$ (Bereich
- * Die Wölkung fließt ins $x = -\infty, y = +\infty$ (Bereich
- * Die Wölkung bleibt periodisch in der Nähe von $(0,0)$ (Bereich

Bereich (c) wird von Bereichen (a) und (b) durch die fette Kurve (oder Abbildung) getrennt. Das ist einer heteroklinen Orbit (die verbindet 2 Sattelpunkte).

* DAS PENDULUM

- * Ein wichtiges Beispiel eines konserватiven reversiblen mechanischen Systems wird von dem Pendulum gegeben.



* Bewegungsgleichung (siehe z.B. S. 27)

$$\cancel{mL\ddot{\theta}} = -\cancel{mg} \sin\theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin\theta$$

(wir betrachten im Moment keine Dämpfung).

* Sei $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ und $\tau = \omega t$ (drehwinkelzeit)

Dann: $\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin\theta = 0 \rightarrow$ sei $\vartheta = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}$

dann $\begin{cases} \dot{\theta} = \vartheta \\ \ddot{\theta} = -\sin\theta \end{cases} \rightarrow$ Fixpunkte $\begin{cases} \vartheta = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Also $\rightarrow (k\pi, 0)$ sind die Fixpunkte.

* Jekobi-Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow$ Zentrum

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\pi,0)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\vec{\theta}_{1,2} = (1, \pm 1)$$

Das System ist:

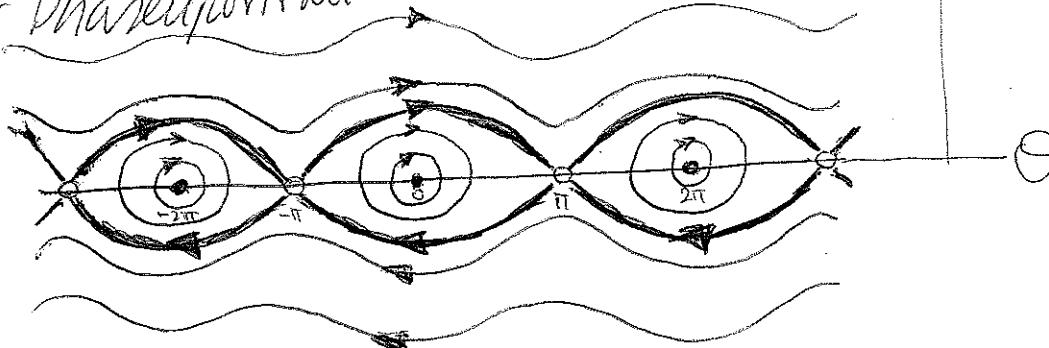
* Reversibel: $\tau \rightarrow -\tau, \vartheta \rightarrow -\vartheta$ lässt das System unverändert.

* Konserativ: $\dot{\theta}(\dot{\theta} + \sin\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos\theta \right) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta = E(\theta, \vartheta)} \rightarrow \text{Minimum in } (0,0)$$

Dann das ^{Minim} Zentrum in $(0,0)$ bleibt tatsächlich ein Zentrum.

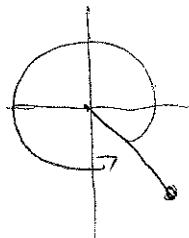
* Der Phasenpunkt sieht also so aus:



* Wir identifizieren hier 3 Bereiche

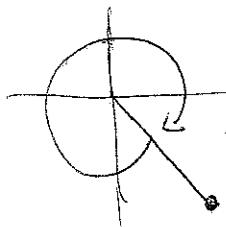
(a) Um die Zentren ($0, \pm\pi$, usw.) hat man ^{eine} periodische Bewegung, d.h. die Pendeloszillationen (für sehr kleine Winkel hat man die euklidischen Oszillationen, wie auf S. 33)). 

(b) Oben hat man keine periodische Bahnen sondern Bahnen mit $\dot{\theta} > 0$ immer \rightarrow Gegenuhzeigersinn



\leftarrow Das Pendulum pendelt nicht mehr, es rotiert im Gegenuhzeigersinn

(c) Unten hat man Bahnen mit $\dot{\theta} < 0$ immer



\leftarrow Es rotiert im Uhrzeigersinn.

• Der Bereich (a) wird von Bereichen (b) und (c) durch heterokline Orbiten getrennt

• Was passiert, wenn es Dämpfung gibt?

• Das System ist nun nicht mehr konserватiv oder reversibel.

• Das System ist nun nicht mehr dimensionslose Gleichung ist der Form:

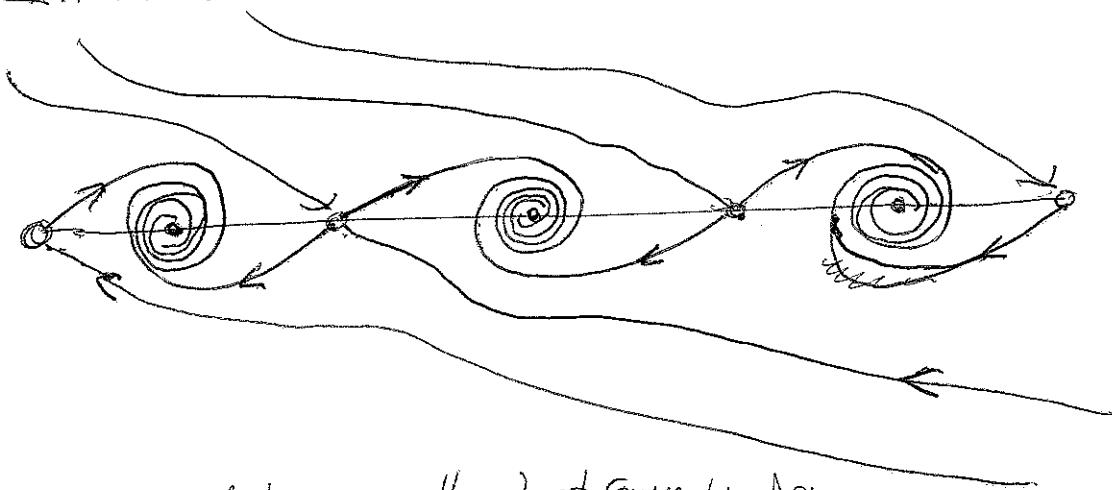
• Die entsprechende (dimensionslose) Gleichung ist der Form:

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \omega_0\theta = 0 \quad (b > 0 \rightarrow \text{Dämpfungskonstante})$$

Ganz klar, nun: $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0\theta \right\} = \dot{\theta} (\ddot{\theta} + \omega_0\theta) = -b\dot{\theta}^2 < 0$

\Rightarrow das System verliert Energie. Als Folge werden die Rotationsbahnen im Bereich (b) und (c) langsamer, eventuell kann das Pendulum nicht mehr rotieren, es fängt zu pendeln, dann pendelt langsamer und mit ~~kleinerer~~ Amplitude, und endlich stoppt das Pendulum bei $\theta = 0$.

Im Phasenraum sieht es so aus:



- Als erwartet, auch zentrale Kaden
sind stabile Spuren.

• GRENZZYKLEN

- * Bisher haben wir nur hauptsächlich über Fixpunkte gesprochen. Auf S. 41 haben wir gesehen, dass man in 2D etwas mehr haben kann (die Bahn D auf S. 41), und zwar einen Grenzzyklus.
- * Ein Grenzzyklus ist eine isolierte geschlossene (und daher periodische) Bahn. Das bedeutet hier, dass beobachteten Bahnen nicht geschlossen sind, In Gegen Teil, die end Spuren die auf dem Grenzzyklus konvergieren, oder aus dem Grenzzyklus divergieren. Wenn die Konvergenz haben wir einen stabilen Grenzzyklus und wenn die Divergenz einen unstabilen Grenzzyklus.
- * Grenzzyklen sind rein nichtlineare Effekte. Zyklen (also geschlossene Bahnen) findet man sogar in linear Systeme (z.B. in dem harmonischen Oszillatator von S. 33). Wir haben andere Beispiele in dem Räuber-Beute Problem (S. 49), in einem Doppelmulde Potential (S. 54) und in dem Pendulum (S. 53). Diese Zyklen waren aber nicht Grenzzyklen da die beobachtete Bahnen auch Zyklen waren. Für diese Beispiele die Zyklen existieren wegen Erhaltungssätze (S. 57) und sind daher von Anfangsbedingungen bestimmt.

In Gegen Teil, Grenzzyklen sind durchlänglich der Struktur des Systems.

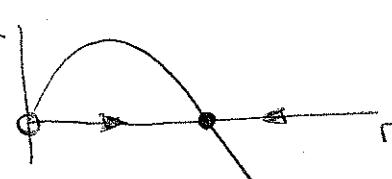
* Beispiel:

gucken wir die Gleichungen (in Polarkoordinaten)

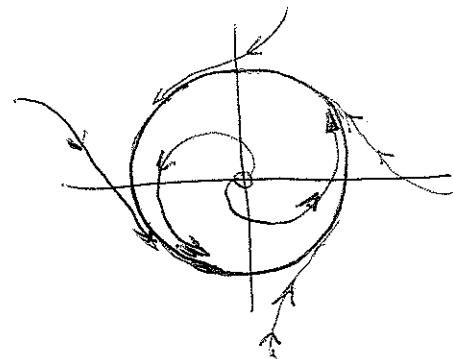
$$r = r(1 - r^2) \xrightarrow[\text{gleichung}]{\text{1D}} \text{Fixpunkte: } r=0, r=+1$$

$$\dot{\theta} = 1$$

\downarrow
Konstante
Winkelbewegung



* Gucken wir nun wie die Lösung auf der xy -Ebene aussieht



- * Innerhalb des Kreises von Radius 1 lösen wir eine instabile Spirale, die auf den Kreis konvergiert.
- * Außerhalb konvergente Bahnen auch auf dem Kreis.

* Der Kreis $r=1$ ist also ein Grenzyklus.

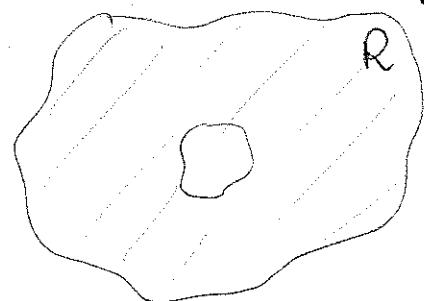
* POINCARÉ-BENDIXON-Theorem

* Grenzyklen erfüllen einige interessante Eigenschaften, die wir hier nicht ausführlich diskutieren werden. Wir werden aber ein wichtiges Theorem erwähnen, das Poincaré-Bendixon-Theorem. Dies Theorem ist sehr wichtig, weil als Folge davon, kann man zeigen, dass auf der Phasenebene (also für 2D-Probleme) man kein Chaos haben kann.

* Das Poincaré-Bendixon-Theorem geht so:

* (i) Sei R eine geschlossene Fläche auf der Ebene

+ (ii) Sei $\dot{x} = f(x)$ ein stetiges differenzierbares Vektorfeld auf R



* (iii) R hat keine Fixpunkte

* (iv) Es gibt eine Bahn C , die in R gefangen ist
(die geht nicht durch die Fläche)

Dann $\Rightarrow C$ ist entweder ein Grenzyklus
oder C konvergiert auf \mathbb{C} für $t \rightarrow \infty$.

Also, R hat innerhalb einen Grenzyklus!

* Wir werden dieses Theorem hier nicht beweisen.

- * Dies Theorem ist aber sehr wichtig. Es sagt aus, dass die Dynamik auf der Ebene ist eher ziemlich begrenzt. Wenn eine Bahn in einem geschlossenen Bereich (ohne Fixpunkte) gefangen ist, diese Bahn wird auf einem Grenzzyklus konvergieren. Nichts Komplizierter (wie Chaos) ist möglich!
- * Dies Theorem gilt nur für 2D. Für Dimensionen ≥ 3 geht es nicht mehr, und dann etwas Merkwürdiges kann passieren: Bahnen können in einem Bereich ~~geschlossen~~ bei sich befinden, ohne auf einem Fixpunkt oder Grenzzyklus zu konvergieren! Wir werden an diesem Punkt später zurückkehren, wenn wir über das Lorenz-Modell diskutieren.

* DER VAN DER POL - OSZILLATOR

- * Ein wichtiges Beispiel um nichtlinearen 2D-System mit einem Grenzzyklus ist der sogen. Van der Pol - Oszillator, der durch die folgende Gleichung beschrieben wird:
- $$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$
- wobei $\mu > 0$
- * Diese Gleichung ist ähnlich wie die Gleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators, aber nun die Dämpfungsrate $\mu(x^2 - 1)$ ist nicht-linear!
 - * Die Bewegung wird für $|x| > 1$ gedämpft
 - * Aber wenn $|x| < 1 \rightarrow$ austatt Dämpfung pumpen wir Energie in das System rein!

Also große Amplituden werden gedämpft, und kleine verstärkt. Es sieht zunächst intuitiv aus, dass man so nur nie einen Zyklus mehr haben könnte.

- * Wir werden hier den Fall $\mu > 1$ untersuchen (stark nichtlineares Regime). In diesem Regime ist der van der Pol-Oszillator ein schönes Beispiel eines Relaxationsoszillators. In solche Systeme Stress wird langsam akkumuliert, und dann ganz schnell relaxiert, noch mal ^{langsam} akkumuliert, und noch mal schnell relaxiert, usw.
- * So ein einfaches Modell kann z.B. Neuronenemissionen oder sogar Herzschläge modellieren! So ein Modell spielt eine bedeutende Rolle ^{der} in Elektronik (z.B. Energie wird in einem Kondensator langsam gespeichert und dann plötzlich ~~entzündet~~ losgelassen (dazu wird für die Erzeugung von Stroboskopischer Licht in z.B. Discos benutzt!)).
- * Gucken wir nun ein bisschen genauer die van der Pol-Gleichung:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x}(x^2 - 1) = -x \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] = -x$$

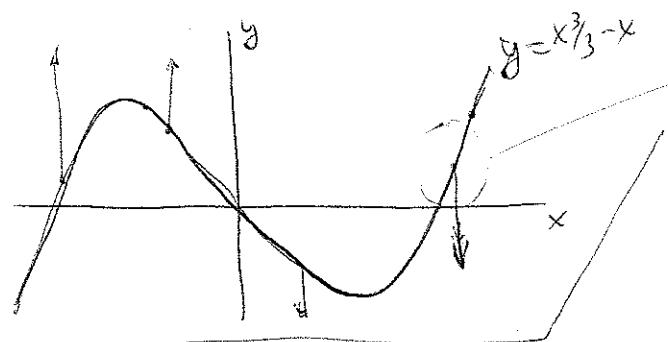
Sei $w = \dot{x} + \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right)$ $\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = w - \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \\ \dot{w} = -x \end{cases}$

Sei $y = w/\mu \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \mu \left[y - \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] \\ \dot{y} = -x/\mu \end{cases}$

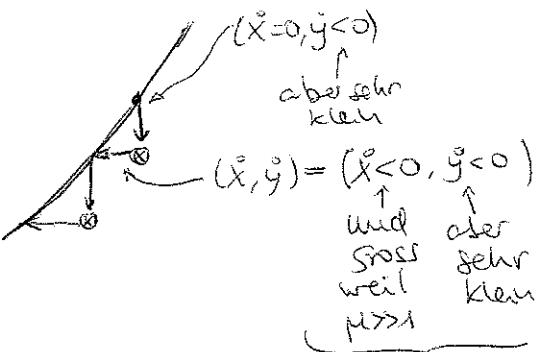
Nun haben wir ein 2D System (aber nun müssen wir aufpassen, weil $y \neq \dot{x}$, sondern $y = \frac{1}{\mu} \dot{x} + \frac{x^3}{3} - x$).

Die Kurve $y = \frac{x^3}{3} - x$ ist eine besondere Kurve. Auf dieser Kurve $\dot{x} = 0$, und daher ~~ist~~ ~~die~~ der Vektorfeld (\dot{x}, \dot{y}) auf dieser Kurve ist einfach $(0, -x/\mu)$.

- * Da $\mu \gg 1$, $x/\mu \ll 1$.



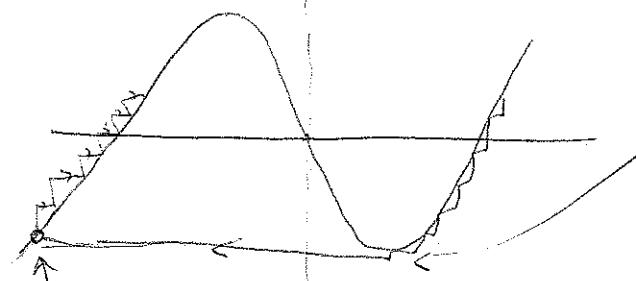
Da $\mu \gg 1$, $x/\mu \ll 1$
Gucken wir nun ganz genau was
passt an der Kurve $y = x^{3/3} - x$



Als Folge findet die Bewegung
fast perfekt auf der Kurve statt.

Also ganz
schnell zurück an der Kurve!

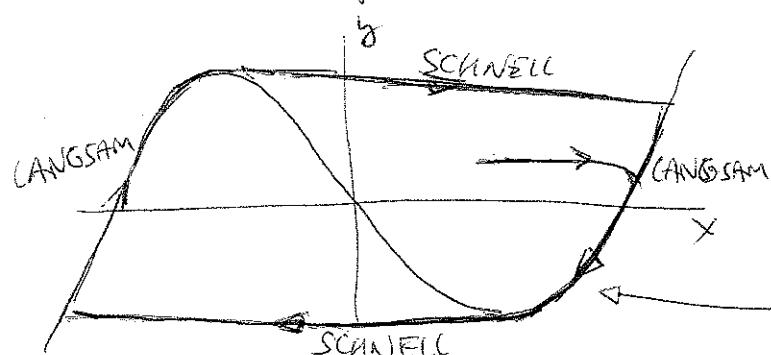
- * Aber ~~und~~ dem Minimum geht's nicht weiter!



Wie $\dot{x} < 0$ ist sehr gross ($\propto \mu \gg 1$)
und die Bewegung ist fast
perfekt horizontal.

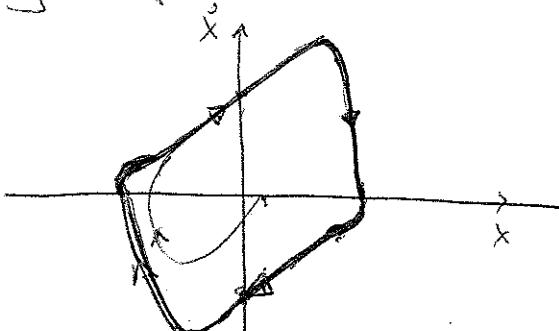
Hier trifft die Bahn noch mal die $y = x^{3/3} - x$ Kurve,
und dann geht's noch mal langsam aufwärts!

Zusammengefasst ist die Bewegung so:

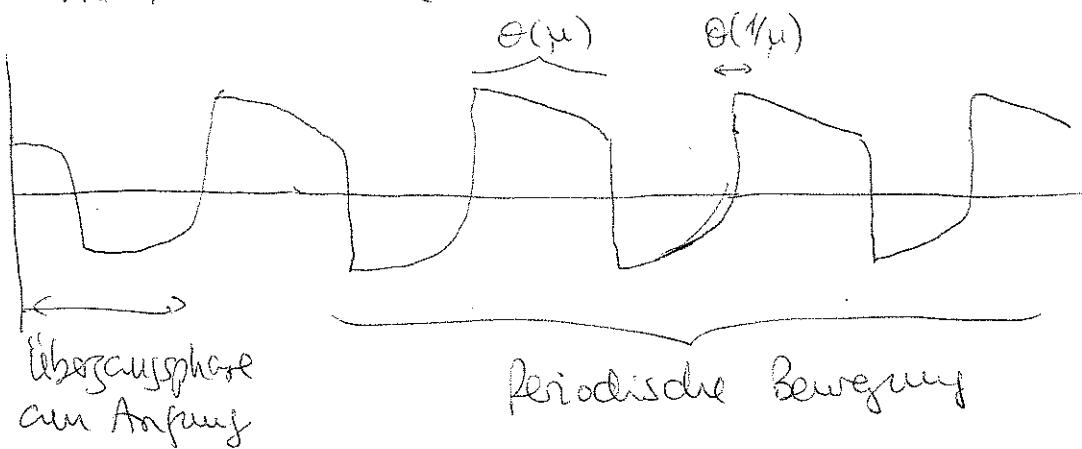


Egal wo man anfängt, die
Bahnen konvergieren immer auf
einen Grenzpunkt

- * Die Bewegung auf der (x, \dot{x}) -Ebene sieht so aus:



und die $x(t)$ -Kurve ist so:



- * Das sieht wirklich wie ein Herzschlag aus!