

• BIFURKATIONEN IN 2D PROBLEME

- * Auf S. ⑧ haben wir die Idee von Bifurkationen (in 1D Probleme) eingeführt. An einer Bifurkation können Fixpunkte erzeugt oder zerstört werden, oder die Stabilität der Fixpunkte kann sich ändern, alles wenn unter einem Parameter des Problems ändert.
- * In 2D ist die Idee ähnlich, aber natürlich viel reicher, da wir mehrere Formen von Fixpunkten haben, und außerdem weil es ebenfalls Grenzzyklen geben kann. Wir werden bald sehen, dass Grenzzyklen auch erzeugt und zerstört werden können.

* 2D VERALLGEMEINERUNG VON 1D BIFURKATIONEN

- * In unserer Diskussion der 1D Bifurkationen haben wir 3 Fälle untersucht, nämlich Saddle-Node, Transkriktische, und Pitch-Fork-Bifurkationen. Diese Bifurkationen existieren auch in 2D, und eigentlich nichts ganz Neues passiert. Diese Bifurkationen finden eigentlich in einer effektiven Dimension, und die andere Dimension spielt nur eine Nebenrolle.
- * Guckt uns die Saddle-Node-Bifurkation.

Ein Prototyp um Saddle-Node-Bifurkation wäre die Gleichung:

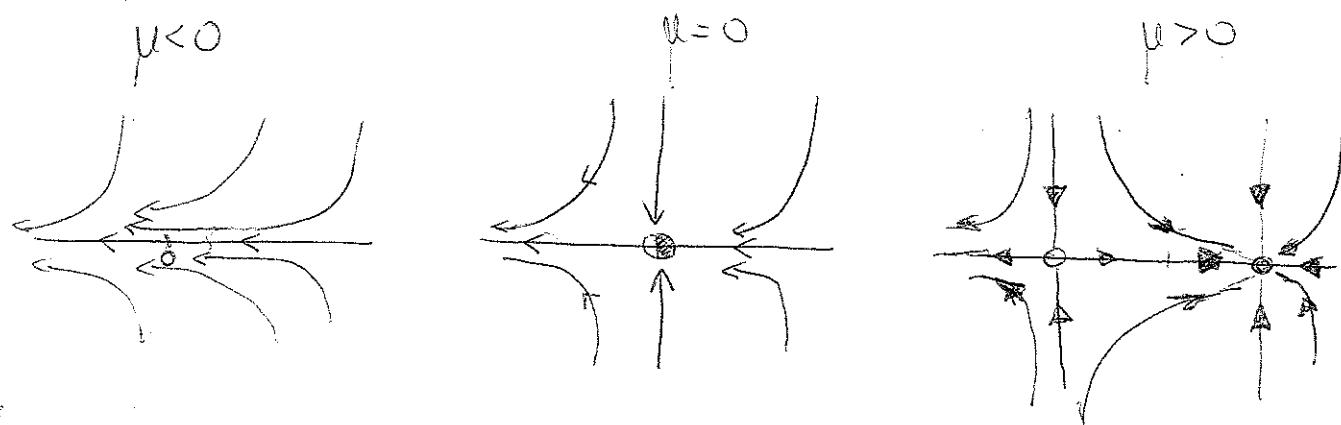
$$\ddot{x} = \mu - x^2 \quad \leftarrow \text{so was hatten wir schon auf S. ⑨}$$

$$\dot{y} = -y \quad \leftarrow \text{in } y\text{-Richtung ist die Bewegung exponentiell gedämpft.}$$

Falls erinnerst euch, dass für die 1D Gleichung $\ddot{x} = \mu - x^2$ wir so was hatten: $\mu < 0$ $\mu = 0$ $\mu > 0$



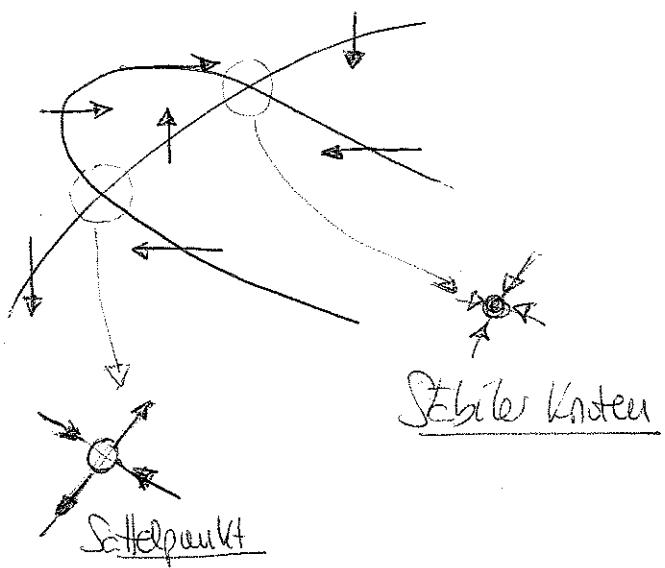
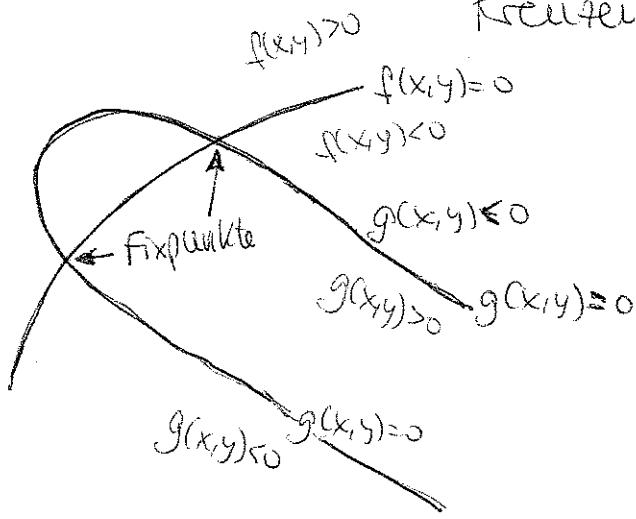
- * War haben wir nur 2D? Ganz einfach:



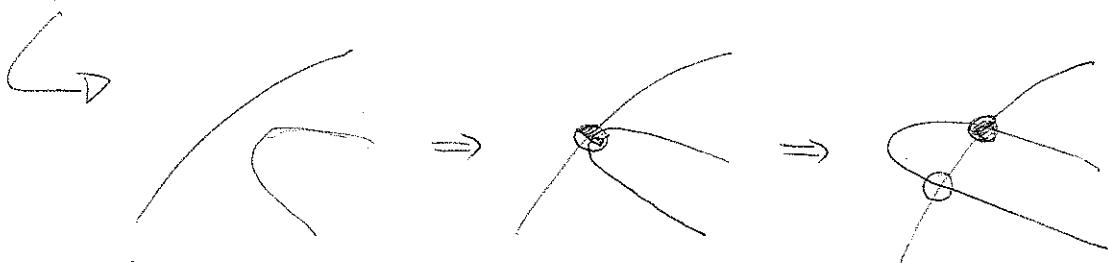
(Bemerkung): Ich erinnere euch, dass sofern wenn die Fixpunkte verschwinden sind, es gibt immer noch residuale Effekte in der Dynamik. Ich erinnere euch an unserer Diskussion über Enpass auf S. 29).

- * Also in der Bifurkation haben wir einen Sattelpunkt und einen stabilen Knoten erzeugt (daher Saddle-Node = Saddle-Knoten!)
- * Man könnte denken, dass dies Beispiel sehr einfach war, aber allgemeine 2D-Bifurkationen sind dieser Form. Guckt uns es.

Sei $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ Gucken wir die Kurven $f(x,y)=0$ und $g(x,y)=0$. Wenn die beide sich kreuzen haben wir einen Fixpunkt



Saddle-Node-Bifurkation



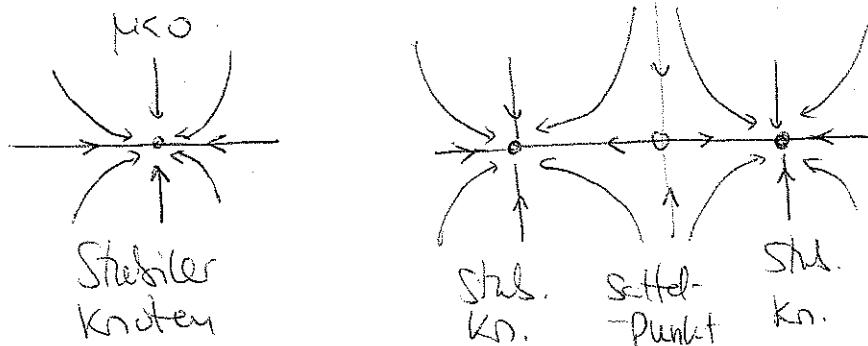
* Also Saddle-Node-Bifurkationen sind effektiv 1D.

* Ähnlichweise geht es für die transkritische Bifurkation (S. 10) und die Pitch-fork-Bifurkationen (S. 13).

Z.B. der Prototyp einer superkritische Bifurkation wäre

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3 \quad (\text{wie auf S. 13}) \rightarrow & \mu < 0 & \mu > 0 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

In 2D:



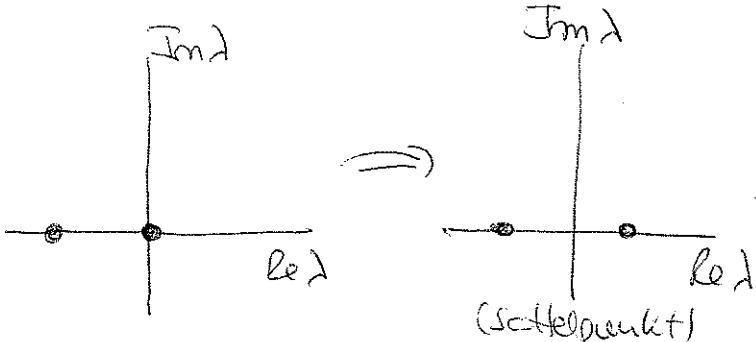
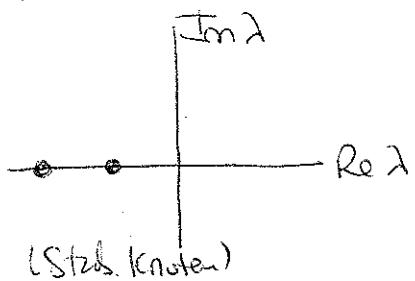
* In alle dieser Bifurkationen, die Bifurkation passiert, wenn eine der Eigenwerte der Jakobi-Matrix Null wird. Z.B. in dem Beispiel ~~aus~~ chosen die Jakobi-Matrix ist $\hat{A} = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Für $(x,y) = (0,0) \rightarrow \hat{A}(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Also für $\mu < 0 \rightarrow$ stabiler Knoten ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$)

$\mu > 0 \rightarrow$ Sattelpunkt ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$)

$\mu = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$

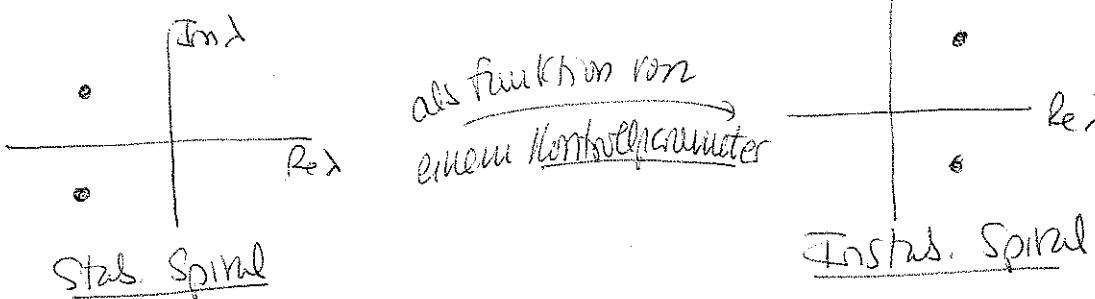
* Also wenn wir die Eigenwerte der Matrix auf der komplexen Ebene zeichnen haben wir:

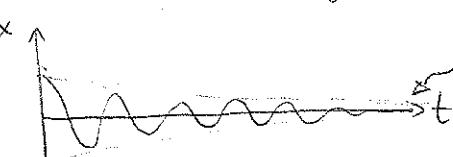


* Deswegen sind die Saddle-Node-, Transkritische- und Pitchfork-Bifurkationen Beispiele der sogen. Nulleigenwertbifurkationen. Die sind, wie gesagt effektiv 1D in Natur. ~~aus~~

*HOPF-BIFURKATIONEN

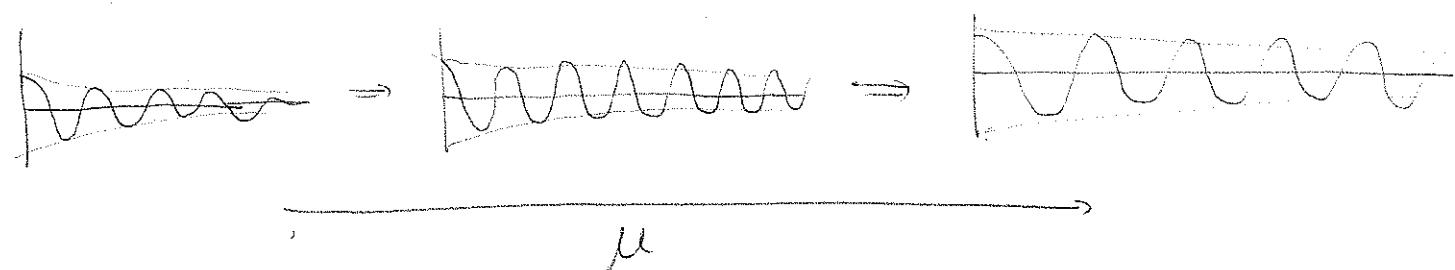
- * Wir werden nun eine ganz verschiedene Art von Bifurkationen ^{sehen} die in 1D nicht existiert.
- * Alle stabile Fixpunkte erfüllen $\operatorname{Re}[\lambda_{j=1,2}] < 0$. In unserer Analyse des linearen 2D Systems (S. 27) haben wir gesehen, dass entweder $\lambda_{j=1,2} \in \mathbb{R}$ oder $\lambda_1^* = \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Der Fall von stabilen Fixpunkten mit $\lambda_{j=1,2} \in \mathbb{R}$ haben wir gerade gesehen. Die werden instabil wenn ein λ_j durch $\lambda_j = 0$ ~~geht~~ geht. Nur $\lambda_j > 0$ geht.
- * Wir werden nun sehen was passiert wenn $\lambda_2 = \lambda_1^* \in \mathbb{C}$. Wenn der ~~stabile~~ Fixpunkt stabil ist, dann $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$. Wenn der Punkt instabil ist, dann beide Eigenwerte müssen ins $\operatorname{Re}(\lambda_{j=1,2}) > 0$ gehen (da nun $\lambda_1^* = \lambda_2$)



- * Diese brennende Art von Bifurkation werden wir nun untersuchen.
- * Superkritische Hopf-Bifurkation
- * Nehmen wir einen gedämpften Oszillatör. Wir machen eine Perturbation aus gleichfachig. ^{zurück}


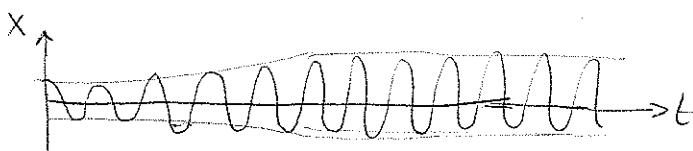
→ das System geht als gleichfachig, nach dem Zerfall der Oszillationen.

Die Zerfallrate hängt, sagen wir, von einem Parameter μ ab. Sagen wir, dass der Zerfall langsamer wird, wenn μ zunimmt.



- * Sagen wir, dass für $\mu > \mu_c$ die Störung wächst (statt zerfallen).

Für mehrere Systeme (aber nicht immer) für $\mu > \mu_c$ zeigt das System eine periodische Oszillation um dem ursprünglichen Gleichgewicht.



* So eine Änderung der Stabilität nennt man eine Hopf-Bifurkation (und zwar superkritisch).

- * Im Phasenz Raum eine Hopf-Bifurkation ist ein Übergang zwischen einer stabilen Spirale und einer instabilen Spirale mit einem Grenzyklus herum. Diese Bifurkation ist also der Form skizziert auf S. ⑩.

- Diese Bifurkationen finden z.B. in chemischen Reaktionen (Belousov-Zhabotinsky-Reaktion), wo man spektakuläre oscillierende chemische Reaktionen beobachten kann,

* BEISPIEL

- * Gucken wir die Gleichungen (in Polarkoordinaten):

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = \omega + br^2 \end{cases} \rightarrow \mu \text{ kontrolliert die Stabilität des Fixpunktes am Ursprung } (r=0)$$

(ω ist die Kreisfrequenz für $r \rightarrow 0$, und b direkt proportional zur Änderung der Frequenz mit der Amplitude.)

- * Gucken wir die erste Gleichung:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \rightarrow \mu < 0 \Rightarrow r=0 \text{ stabiles Fixpunkt } (\dot{r} \approx -|\mu|r)$$

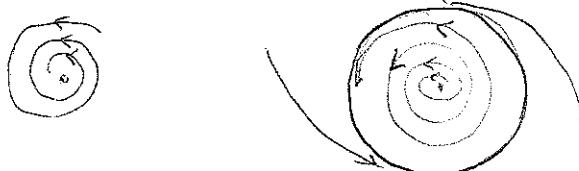
$$\rightarrow \mu > 0 \Rightarrow r=\sqrt{\mu} \Rightarrow \text{Grenzyklus}$$

$$\rightarrow r=0 \Rightarrow \dot{r} \approx +|\mu|r \Rightarrow \text{Instabile Spirale.}$$

Also

$$\mu < 0$$

$$\mu > 0$$



Wir werden nun die Eigenwerte der Jakobimatrix untersuchen.

In der Nähe des Fixpunktes ($r=0$): $\dot{r} \approx \mu r$; $\dot{\theta} \approx \omega$

Dann:

Kartesisches Koordinaten	$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow$	$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$
--------------------------	--	--

Dann $\begin{cases} \dot{x} \approx \mu r \cos \theta - \omega r \sin \theta \\ \dot{y} \approx \mu r \sin \theta + \omega r \cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} \approx \mu x - \omega y \\ \dot{y} \approx \omega y + \mu x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}}_{\text{Jekobi-Matrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $(\lambda - \mu)^2 + \omega^2 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu + i\omega \\ \lambda_2 &= \mu - i\omega \end{aligned}}$$

Also für $\mu < 0 \Rightarrow$

für $\mu > 0 \Rightarrow$

* Dies Beispiel zeigt 2 Punkte, die eigentlich für alle Hopf-Bifurkationen gelten:

(i) Für $\mu \approx \mu_c$, die Größe des Grenzyklus $\propto \sqrt{\mu - \mu_c}$
 kritische μ (hier $\mu_c = 0$)

(ii) Die Frequenz des Zyklen ist $\omega = \operatorname{Im} \lambda$ für $\mu = \mu_c$,
 Für $\mu > \mu_c \rightarrow T = \frac{2\pi}{\operatorname{Im} \lambda} \rightarrow O(\mu - \mu_c)$
 Periode.

* Subkritische Hopf-Bifurkation

* Guckt nur noch eine andere Art von Hopf-Bifurkation.
 Wir studieren die Gleichungen:

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 = r [\mu + r^2 - r^4]$$

$$\dot{\theta} = \omega + b r^2$$

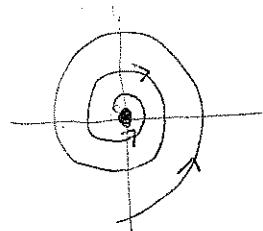
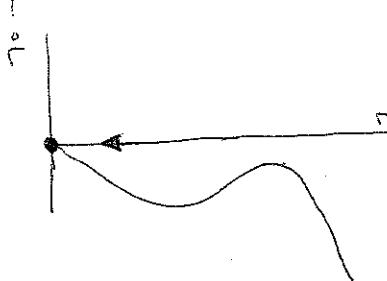
* Guckt nur die erste Gleichung: $\dot{r} = r (\mu + r^2 - r^4) = f(r)$

$$f(r) = 0 \quad \begin{cases} r_0 = 0 \\ r_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1+4\mu}} \end{cases} \quad r_{\pm} \text{ sind Grenzyklen.}$$

* Betrachten wir die erste Gleichung ein bisschen genauer:

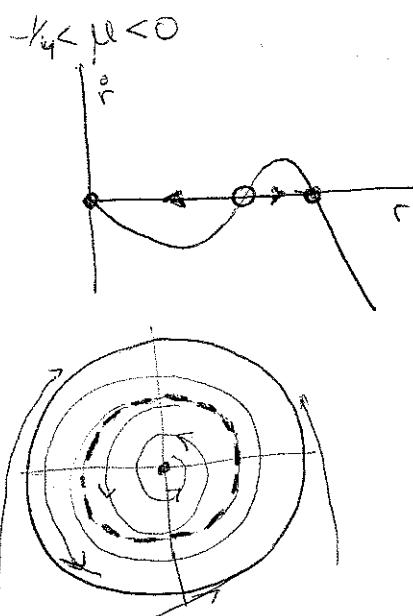
$$\dot{r} = f(r) = r(\mu - r^2 + r^4)$$

$$\mu < -\frac{1}{4}$$



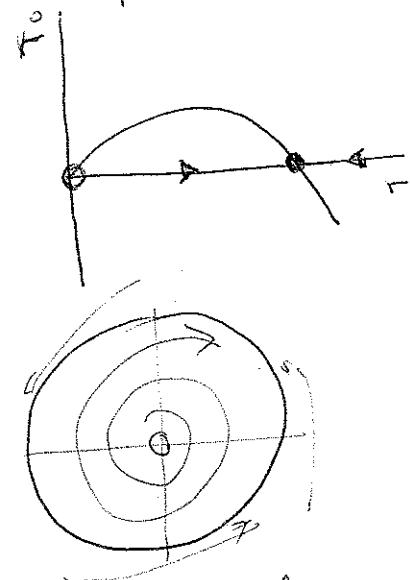
Stab. Spirale

$$-\frac{1}{4} < \mu < 0$$



Stab. Spirale +
+ Instab. Grenzyklus
+ Stab. Grenzyklus

$$\mu > 0$$

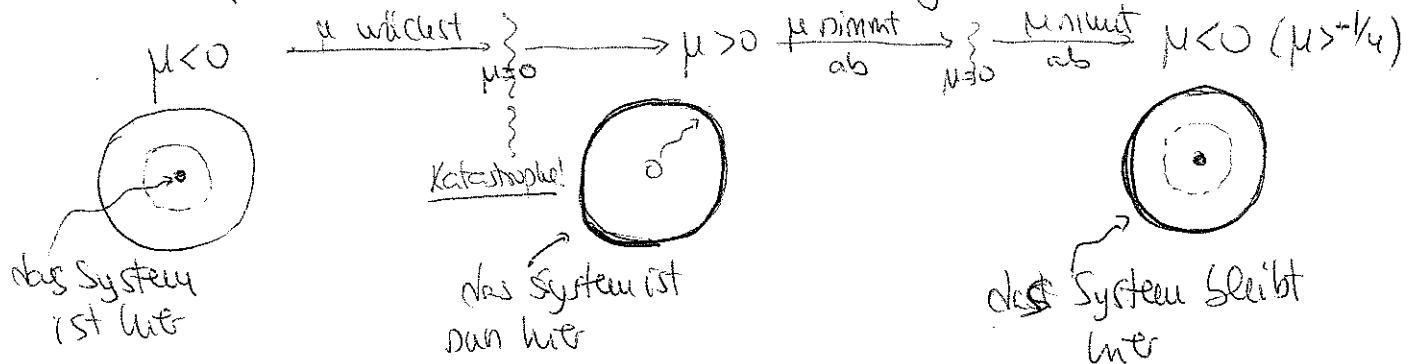


Instab. Spirale +
+ Stab. Grenzyklus.

- * Also, für $\frac{-1}{4} < \mu < 0$ gibt es 2 Attraktoren $\xrightarrow{\text{Stab. Spirale}}$ und $\xrightarrow{\text{Stab. Grenzyklus}}$, und zwischen den beiden gibt es einen instabilen Grenzyklus. Wenn μ wächst geht der Radius $r \rightarrow 0$, und für $\mu=0$ stoßt der instabile Grenzyklus gegen den stabilen Fixpunkt und macht den $r=0$ Punkt instabil. Für $\mu > 0$ gibt es also nur ein Attraktor, und zwar der stabile Grenzyklus für r_+ . So was nennt man eine subkritische Hopf-Bifurkation. (Bemerkung: für $\mu = -\frac{1}{4}$ gibt es eine andere Art von Bifurkation, die wir später untersuchen werden.)

- * Wie für Pitchfork-Bifurkationen (S. 70) haben wir hier auch eine Art "Katastrophe". Sagen wir, dass für $\mu < 0$ ist das System am $r=0$. Wenn μ durch $\mu=0$ geht, ist das System bis zum $r=r_+$ aufzuteilen. Ein System mit kleinen (oder verschwindenden) Oszillationen hat nun ~~große~~ Oszillationen mit großer Amplitude!

- * Wie auf S. 20 haben wir hier auch Hysteresis



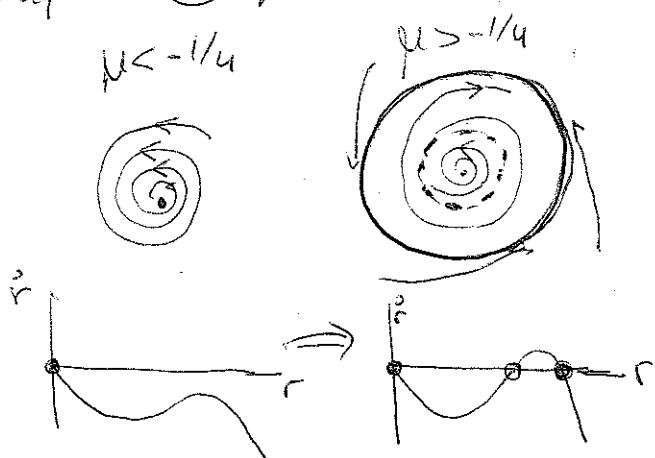
- Diese Art von Bifurkationen findet man z.B. in Fluidodynamik, in der Analyse von Flugmaschinen, und anderen Systemen.

* ANDERE BIFURKATIONEN MIT ZERSTÖRUNG / ERZEUGUNG VON GRENZZYKLEN

• Richten wir zum Schluss 3 Bifurkationsarten in den Grenzzyklen erzeugt oder zerstört werden.

* Saddle-Node-Bifurcation von Grenzzyklen

- * Hier ~~gibt~~ ein stabiler und ein instabiler Grenzzyklus zueinander, und die zerstören sich gegenseitig. So was haben wir schon gesehen auf S. 73 für $\mu = -1/4$

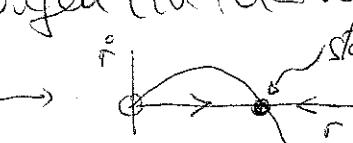


- * Ein Paar von Grenzzyklen taucht plötzlich auf.
- * Das ist natürlich sehr ähnlich wie eine Saddle-Node-Bifurkation (S. 8), aber nun mit Grenzzyklen.

* Bifurcation mit unendlicher Periode

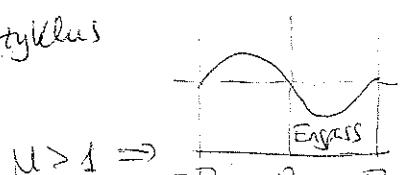
- * Nehmen wir die Gleichungen (in Polarkoordinaten)

$$* \dot{r} = r(1-r^2) \longrightarrow$$



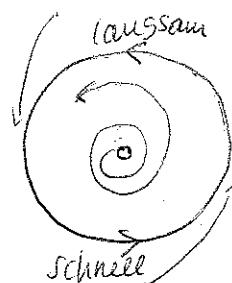
$$* \dot{\theta} = \mu - 8\pi\theta \longrightarrow$$

nicht-uniformer Oszillatör (S. 25)

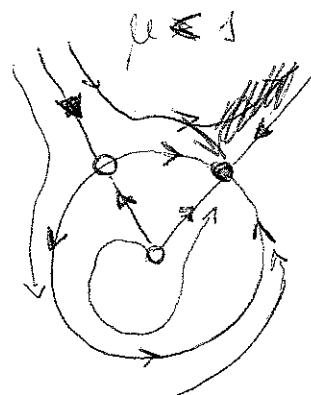


Aber:

$$\mu > 1$$



nicht-uniforme
periodische Bewegung

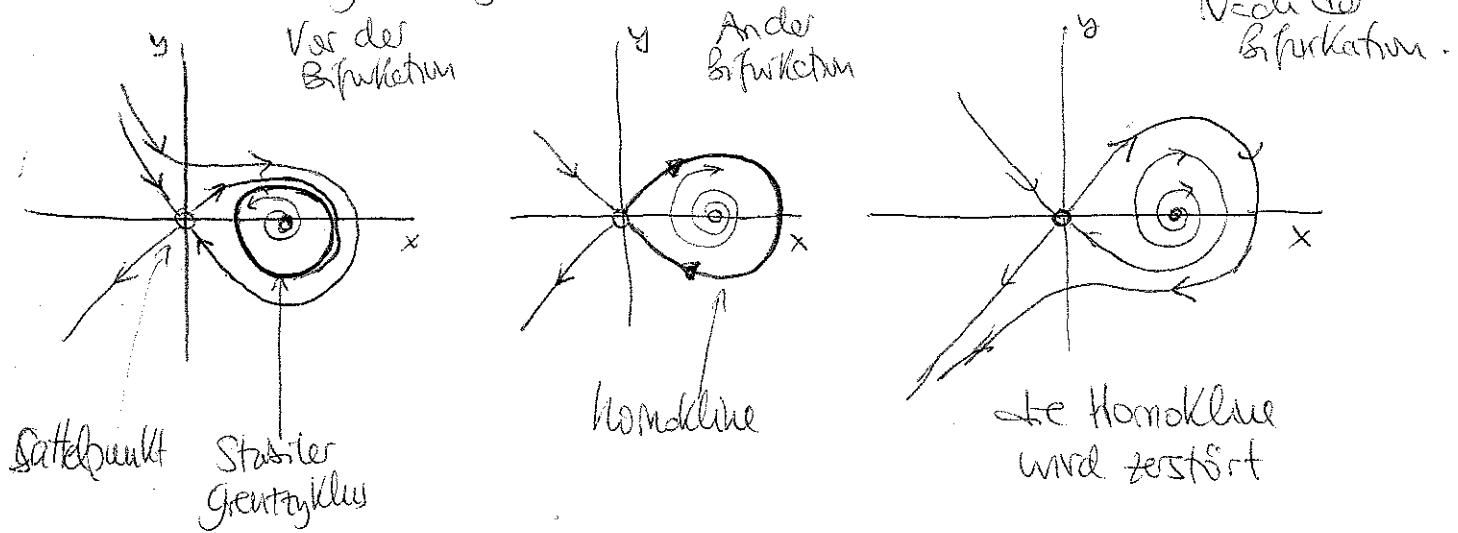


$\mu \ll 1$
keine periodische
Bewegung mehr

für $\mu = 1$
die Periode $T \rightarrow \infty$
(S. 26)

* Homokline Bifurcation:

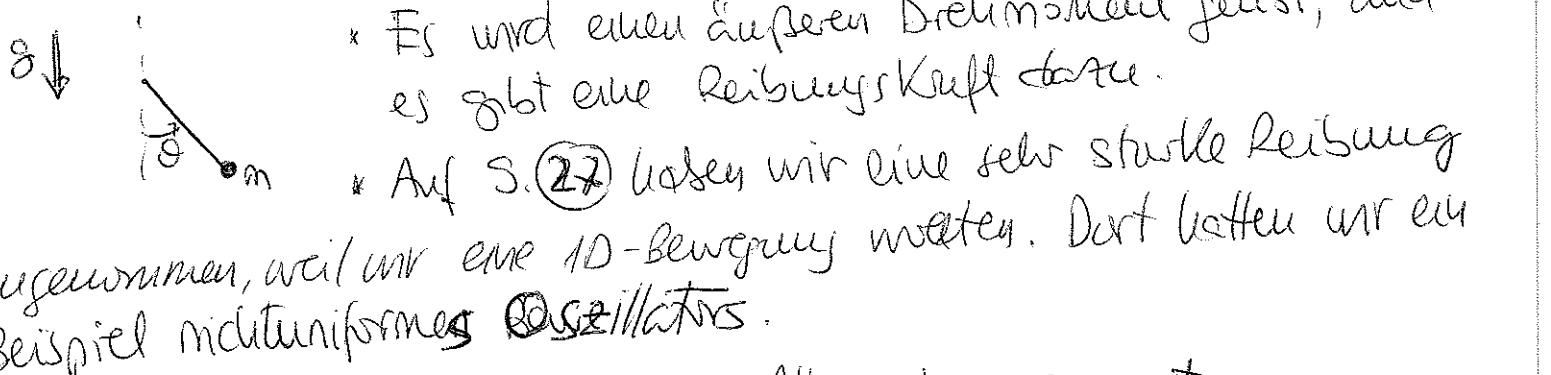
- In dieser Art von Bifurcation ein Grenzzyklus geht näher und näher zu einem Sattelpunkt. Wenn die beide sich berühren, dann wird der Grenzzyklus einen homoklen Orbit (S. 55).



- Wir werden sofort ein Beispiel dieser Art von Bifurcation sehen.

* BEISPIEL: ERZÜNGENDES PENDULUM

- Wir betrachten ein System wie auf S. 27



- Wir werden nun sehen, was in Allgemeinen passiert.

Die Bewegungsgleichung ist:

$$mL^2 \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL \sin\theta = \Gamma \quad \begin{matrix} \text{Drehmoment} \\ \uparrow \text{Schwerkraft} \\ \downarrow \text{Dämpfung} \end{matrix}$$

Wir schreiben diese Gleichung dimensionlos:

- Sei $\omega = \sqrt{g/L}$; $\tau = \omega t$

- Sei $\left\{ \begin{matrix} \alpha = \frac{b}{mL} \omega \\ I = \frac{\Gamma}{mgL} \end{matrix} \right\} \rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta = I}$

- Sei $y = \frac{d\theta}{d\tau} \rightarrow \boxed{\left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} = y \\ \ddot{\theta} = I - \alpha y - \sin\theta \end{matrix} \right\}}$

- Fixpunkte $\rightarrow y=0; \sin\theta = I$

- Für $I < 1 \rightarrow \sin\theta = I$ hat 2 Lösungen \rightarrow 2 Fixpunkte
- Für $I > 1 \rightarrow$ keine Fixpunkte

- gucken wir was passiert wenn $I < 1$.

Jacob-Matrix: $\hat{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{pmatrix}$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\cos\theta}$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 = \cos\theta = \pm \sqrt{1 - I^2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha < 0$$

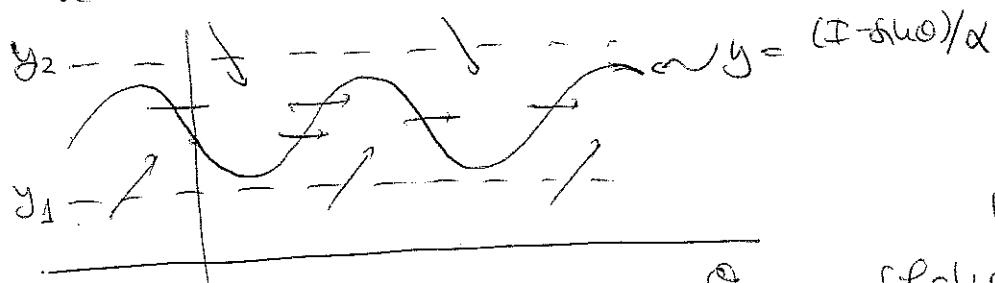
Stabile Fixpunkte.

- Wenn $\Delta < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt
- Wenn $\Delta > 0 \rightarrow$
 - $\alpha^2 - 4\sqrt{1-I^2} > 0 \rightarrow$ stab. Knoten
 - $\alpha^2 - 4\sqrt{1-I^2} < 0 \rightarrow$ stab. Spirale

Also wenn es ~~2~~ Fixpunkte gibt, einer ist ein Sattelpunkt und der andere ein stab. Knoten oder Spirale.

* gucken wir nur nach unten wenn $I \geq 1$

- * Nun gibt es kein Fixpunkt mehr.
- * Gucken wir die Kurve $y = \frac{1}{\alpha}(I - \sin\theta)$. Auf dieser Kurve haben wir $\dot{y} = 0$. Unter dieser Kurve $\dot{y} > 0$, über dieser Kurve haben wir $\dot{y} < 0$, also:



* Wir können 2 Werte von y finden

- (i) $0 < y_1 < (I-1)/\alpha$
- (ii) $y_2 > (I+1)/\alpha$

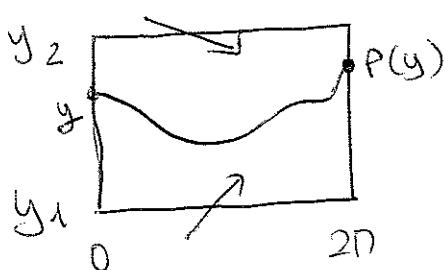
○ ferner daß alle Bahnen gehen

im Bereich $y_1 < y < y_2$ und nie raus. Innerhalb dieses Bereichs

"fließen" die Pfeile nach rechts.

Da θ ist 2π -Periodisch, wir können einfach gucken, was

geschieht in die Kiste $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $y_1 \leq y \leq y_2$ (dies ist eigentlich ein

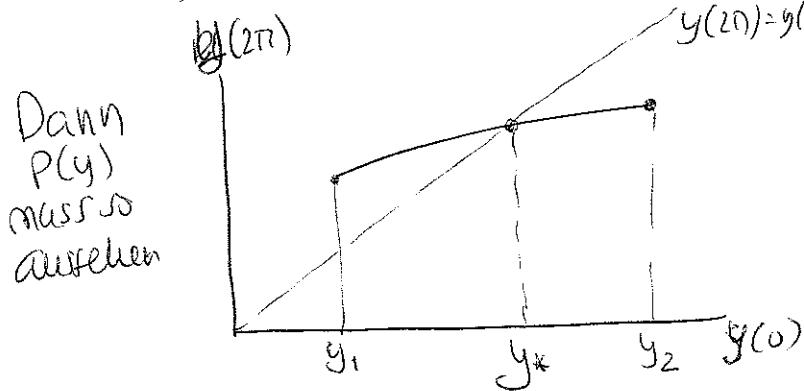


* Sagen wir, dass eine Bahn für $\theta = 0$ in y ist ($y(0) = y$), und nach 2π : $y(2\pi) = P(y)$)

P(y) ist die sogen. Poincaré-Abbildung

(wir werden diese Abbildung in nun an mehrmals benutzen!)

- * Es ist einfach zu sehen, dass es ein y^* gibt, sodass $P(y^*) = y^* \rightarrow \underline{\text{geschlossene Bahn!}}$
- * Wenn $y(0) = y_1 \rightarrow P(y_1) > y_1$ (per Definition)
- * Wenn $y(0) = y_2 \rightarrow P(y_2) < y_2$ (" ")
- * $P(y)$ ist eine stetige Funktion
- * $P(y)$ muss auch monoton sein (sowohl 2 Bahnen würden sich kreuzen!)



* Es gibt also einen Grenzyklus für $I > 1$.
 das ist eine rotierende Lösung

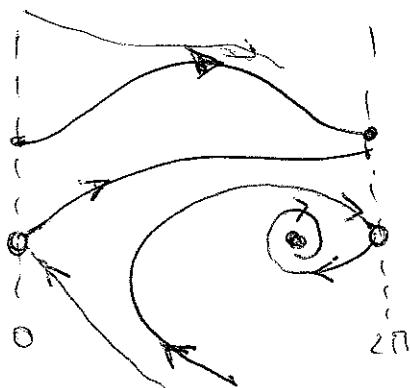
- * Also für
 - * $I > 1 \rightarrow$ Grenzyklus
 - * $I < 1 \rightarrow$ 2 Fixpunkte (Sattelpunkt und stabiler Knoten oder spirale)
 - * gucken wir was passiert wenn wir $I > 1$ haben und I nimmt nun ab.
- Ich erkläre euch, dass I ist der Drehmoment (in geeigneten Einheiten). Wenn der Drehmoment abnimmt, dann wird schwerer und schwerer die Rotation zu beibehalten. Unter einer gewissen Grenze $I_c < 1$, ist der Drehmoment nicht mehr genug, um die Schwerkraft und die Dämpfungskraft zu kompensieren. Dann die Rotation verschwindet, und die Lösungen konvergieren (wegen der Dämpfung) bis ins Gleichgewicht ($\dot{\theta} = 0$).

* Wie sieht das in Phasenraum aus?

- $I_c < I < 1$

Bi-Stabilität

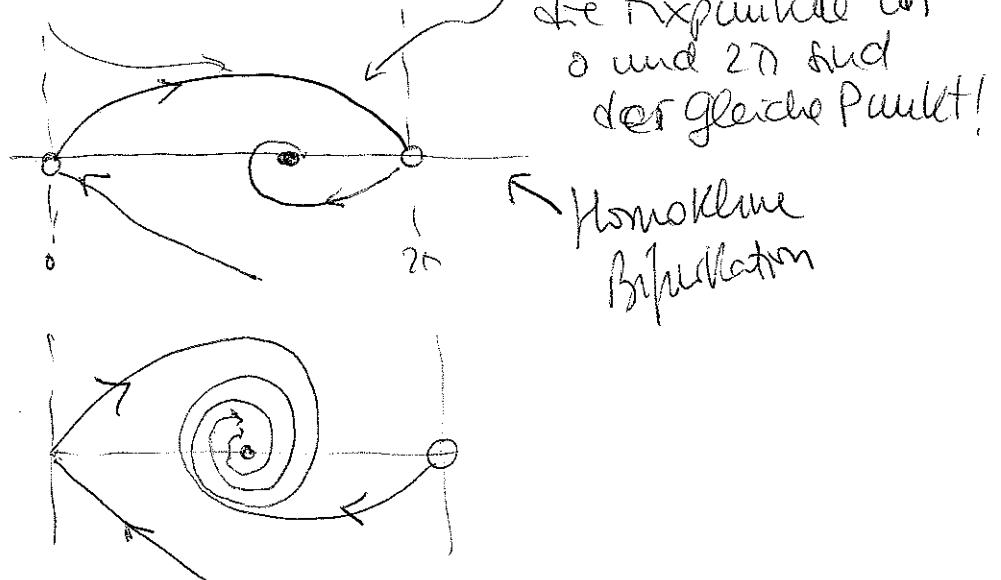
To-Existenz von
einem stabilen Grenzzyklus
und einem stabilen
Fixpunkt



An $I=1$ hat
man eine Saddle-
-Node Bifurkation

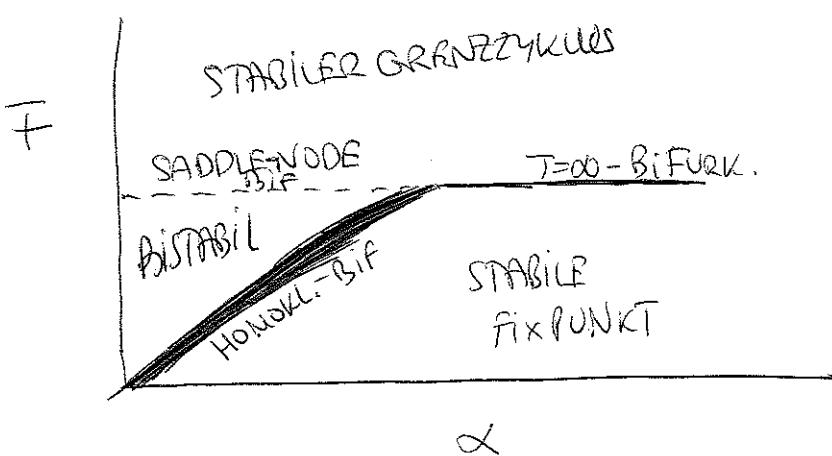
Wenn $I \rightarrow I_c$ wird der Grenzzyklus näher und näher
an den S-Fixpunkt bewegen, bis

- $I = I_c$



Für $I < I_c$

* Was wir bisher diskutiert haben gilt für α klein. Für α gross, dann haben wir einen übergedämpften Pendulum (S. 27), und dort haben wir eine Bifurkation mit unendlicher Periode.
Man muss also eine Art Phaseendiagramm haben:

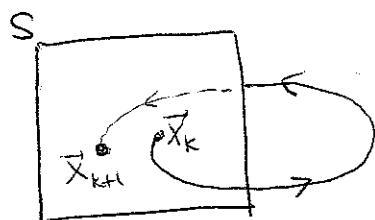


* POINCARÉ-ABBLIDUNG

- * Auf S. 77 haben wir die Idee um Poincaré Abbildung getroffen. Das ist eine wichtige Idee, und daher werden wir nun diese Idee untersuchen genauer ausarbeiten.
 - * Sei ein n -dimensionales System $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ (also \vec{x} ist ein n -dimensionaler Vektor).
- Sei S eine $(n-1)$ -dimensionale Schnittfläche (für $n=2$, S ist eine Kurve, für $n=3$ eine Fläche, usw.)
 S ist senkrecht zu der Bahn der Gleichung $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$
Bemerkung: d.h. dass ~~alle~~ alle Bahnkurven liegen durch die Fläche und mit auf der Fläche)

* Die Poincaré-Abbildung (P) ist eine Abbildung von S auf sich selbst.

Sei $\vec{x}_k \in S$, dann $\vec{x}_{k+1} = P(\vec{x}_k)$ ← nächster Schnitt der Bahn mit S



* Die Fixpunkte x^* von P , sodass $P(x^*) = x^*$, spielen eine wichtige Rolle → die bedeuten eine geschlossene Bahn der Gleichung $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. Eigentlich das Verhalten von $P(x)$ oder Nähe eines Fixpunktes x^* ergibt die Stabilität der geschlossenen Bahn.

Damit wandeln wir ein Problem von geschlossenen Orbits in einem Problem von Fixpunkten um. Das ist im Prinzip einfacher, aber nemals kennen wir P nicht.

* ~~Gezeigt: Gibt es zwischen den Orbits der geschlossenen Fläche kein Fixpunkt?~~

* Beispiel

Die Schnittfläche ist $S = \{(r, \theta) : \theta = 0 \text{ mod } 2\pi\}$ (81)

- * Sei $\dot{r} = r(1-r^2)$
 $\dot{\theta} = 1 \rightarrow \theta = t \rightarrow \text{Periode } T = 2\pi$

Sei $r = r_0$ für $t=0$, wo ist $r(\pi)$? Sei $r_1 = r(2\pi)$:

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r^2) \rightarrow \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

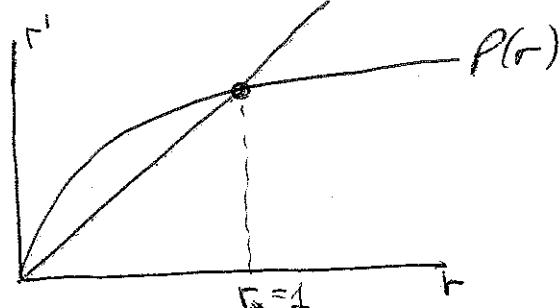
$$\begin{aligned} (\text{Bemerkung:}) \quad \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1-r^2)} &= \frac{1}{2} \int_{r_0^2}^{r_1^2} \frac{ds}{s(1-s)} = \frac{1}{2} \int_{r_0^2}^{r_1^2} ds \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{s}{1-s} \right) \right]_{r_0^2}^{r_1^2} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{r_0^{-2}-1}{r_1^{-2}-1} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Also } e^{4\pi} = \frac{r_0^{-2}-1}{r_1^{-2}-1} \rightarrow r_1 = \sqrt{1 + e^{-4\pi}(r_0^{-2}-1)}^{-1/2}$$

Die Poincaré-Abbildung ist also:

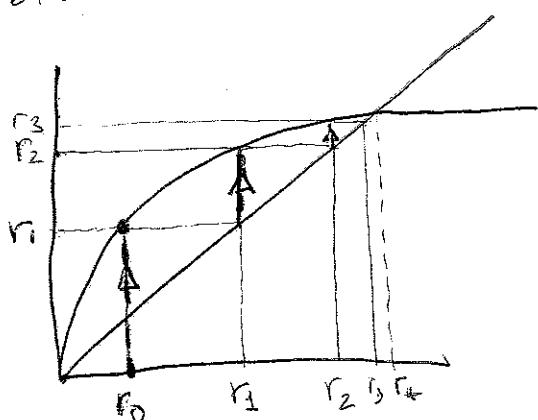
$$P(r) = \sqrt{1 + e^{-4\pi}(r^{-2}-1)}^{-1/2}$$

Das sieht so aus:



Es gibt ein Fixpunkt ($r_* = 1$)

* Die Stabilität des Fixpunktes kann durch Iteration bestimmt werden:



- * Wir fangen in r_0 an
- * $P(r_0) = r_1 \rightarrow P(r_1) = r_2 \rightarrow P(r_2) = r_3 \cdots$

Es ist klar, dass eine Iteration um P um $r = r_*$ konvergiert.

- * $r_* = 1$ ist also stabil

↓
stabiler Grenzyklus

(dafür müssen wir schon aus dem Beispiel an S. 61))

* Diese Idee der Stabilität kann sich ein bisschen genauer formulieren.

Sei x^* ein Fixpunkt $P(x^*) = x^*$. Nehmen wir nun eine infinitesimale Störung $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $\vec{x}^* + \vec{v}_1 = P(\vec{x}^* + \vec{v}_0)$:

$$\vec{x}^* + \vec{v}_1 = P(\vec{x}^* + \vec{v}_0) \simeq P(\vec{x}^*) + [\widehat{DP}(x^*)] \cdot \vec{v}_0 + O(|\vec{v}_0|^2)$$

Also: $\vec{v}_1 = [\widehat{DP}(x^*)] \cdot \vec{v}_0$ wobei $\widehat{DP}(x^*)$ ist eine $(n-1) \times (n-1)$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_j, j=1, \dots, n-1$

Der geschlossene Orbit (x^*) ist (linear) stabil wenn (und nur wenn)

$$|\lambda_j| < 1 \text{ für alle } j=1, \dots, n-1$$

(Beweis: das ist genau wie die Linearanalyse von S ②)

* Quellen wir nur kurz warum. Nehmen wir an, dass eine kleine entartete Eigenwert gibt. Sei $\{\vec{e}_j\}$ die Eigenvektorbasis.

Dann können wir \vec{v}_0 in dieser Basis schreiben:

$$\vec{v}_0 = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \vec{e}_j \quad \widehat{DP}(x^*) \cdot \vec{e}_j = \lambda_j \vec{e}_j$$

$$\text{Dann } \vec{v}_1 = [\widehat{DP}(x^*)] \cdot \sum_{j=1}^{n-1} v_j \vec{e}_j \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j \vec{e}_j$$

$$\text{Dann } \vec{v}_2 = [\widehat{DP}(x^*)] \cdot \vec{v}_1 = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j^2 \vec{e}_j$$

usw. Also

$$\vec{v}_k = \sum_{j=1}^{n-1} v_j (\lambda_j)^k \vec{e}_j$$

Wenn $|\lambda_j| < 1 \rightarrow \vec{v}_k$ geht zu Null

$|\lambda_j| > 1$ für irgend $j \rightarrow \vec{v}_k$ wächst und x^* ist instabil.)

(Beweis: Die λ_j 's sind die zugehörigen Eigenwerte oder charakteristischen Multiplikatoren)

* Als Beispiel gucken wir noch mal $\left\{ \begin{array}{l} r^* = \gamma(1-\gamma^2) \\ \theta^* = 1 \end{array} \right\}$

Wir wissen, dass $\gamma^* = 1$.

$$\text{Sei } \gamma = 1+\eta \rightarrow r^* = \gamma^* = (1+\eta)(1-(1+\eta)^2) \approx 2\eta$$

$$\rightarrow \eta(t) = \eta_0 e^{-2t} \xrightarrow[t=2\pi]{} \eta_1 = e^{-4\pi}\eta_0 \xrightarrow[t=2\pi]{} \eta_2 = e^{-8\pi}\eta_0 \dots$$

$e^{-4\pi}$ \Rightarrow Floquet Multiplikator

$$\Rightarrow |e^{-4\pi}| < 1 \rightarrow \gamma^* = 1 \text{ ist stabil!}$$

* Wir werden die ~~Poincaré~~ Poincaré-Abbildung und die Folie von Poincaré-Schmitt mehrmals in unserer Diskussion um Chaos anwenden.