Abbildungen

- Bisher haben wir dynamische Probleme der Form $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ untersucht, wobei die Zeit t eine kontinuierliche Variable war. Auf S. ① haben wir schon erwähnt, dass es eine andere Art dynamischer Probleme gibt, wo die Zeit eine diskrete Variable ist. Dies sind die sogen. Abbildungen, die wir nun untersuchen werden.

- Wir werden mit den einfachen Abbildungen anfangen, die 1D Abbildungen der Form:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Die Reihe $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ baut den Orbit der Abbildung (für Anfangsbedingung x_0).

- Warum betrachten wir nun diese Abbildungen?
  * Wir werden bald sehen, dass 1D Abbildungen einfache Beispiele von chaotische Systeme darstellen können. Wie ist das möglich? Wir haben gesagt, dass in 1D (und 2D) ~~für~~ für kontinuierlichen Problemen kein Chaos gibt! ganz einfach:

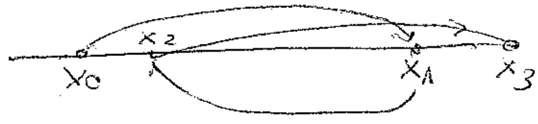
1D Kontinuierliche Probleme

entweder nach Rechts

oder nach links

die Bahnen können sich nicht kreuzen. Das beschränkt die Dynamik ganz stark

Diskrete Abbildungen



Die Abbildung kann sich vorwärts und rückwärts bewegen. Die Dynamik kann nun viel viel komplexer sein!

  * Mit Hilfe von Abbildungen werden wir mit einfachen Modellen sehr wichtige Eigenschaften über Chaos entdecken.

Quellen wir es!

* Fixpunkte von Abbildungen

* Auf S. 80 haben wir die Idee von Poincaré-Abbildung diskutiert. Diese Abbildung, und auch die Lorenz-Abbildung von S. 101, sind Beispiele von diskrete Abbildungen.

* Auf S. 80 haben wir schon über Fixpunkte und Stabilität in der Poincaré Abbildung diskutiert. Ich werde hier nur einige Ideen im Rahmen von 1D Probleme erinnern

* Sei eine Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$

  * x^* ist einer Fixpunkt der Abbildung, wenn $x^* = f(x^*)$, d.h. wenn $x_0 = x^*$, dann $x_{n>0} = x^*$ auch.

  * Man kann die Stabilität des Fixpunktes untersuchen, ähnlich wie auf S. 82. Sei $x_n = x^* + \eta_n$ (kleine Störung). Dann

$$x_{n+1} = x^* + \eta_{n+1} = f(x^* + \eta_n) \simeq f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2)$$

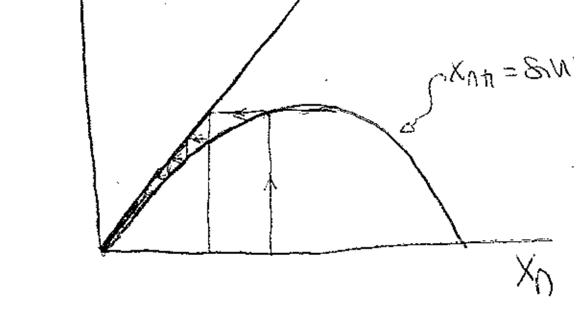
$$\longrightarrow \eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2)$$

Dann $\lambda = f'(x^*) \longrightarrow$ Multiplikator (S. 82)

* Wenn $\lambda < 1 \rightarrow$ der Fixpunkt ist (linear) stabil
  Wenn $\lambda > 1 \rightarrow$ " " " " instabil

Bemerkung: Wenn $\lambda = 1$ müssen wir die nichtlineare Glieder prüfen, ähnlich wie unsere Diskussion von S. 7 für Kontinuierlichen Gleichungen).

* Für die Analyse der Stabilität können wir eine Konstruktion wie die auf S. 81 anwenden, z.B für $x_{n+1} = \sin x_n$, können wir so eine



Konstruktion anwenden um zu sehen, dass $x^* = 0$ ein stabiler Fixpunkt ist.

(* Bemerkung: $f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$, also $\lambda = 1$ für $x^* = 0$, und unsere lineare Analyse sagt uns nichts über die Stabilität von $x^* = 0$!)

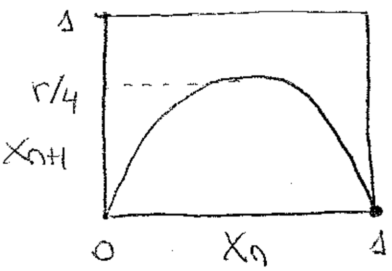
* Die logistische Abbildung

* Wir werden nun eine besondere Art von Abbildung, die sogen. logistische Abbildung, betrachten:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \qquad \text{wobei } r \geq 0 \text{ eine Konstante ist.} \left(\begin{matrix}\text{wir nehmen}\\ r \leq 4\end{matrix}\right)$$

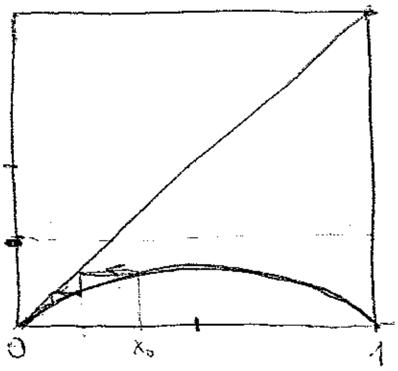
Diese Abbildung ist die diskrete Version der logistischen Gleichung (s. 5), die die Dynamik einer Population beschreibt.
Wir werden bald sehen, dass so eine einfache Abbildung sehr viel zu sagen hat!

Gucken wir wie $f(x)$ aussieht



* $f(x)$ hat ein Maximum in $x = 1/2$, und zwar $f(\frac{1}{2}) = \frac{r}{4}$
(Bemerkung: Deswegen nehmen wir $r \leq 4$, solch dass $0 \leq x_{n+1} \leq 1$ wenn $0 \leq x_n \leq 1$.)

* Gucken wir was passiert wenn $r < 1$. Wir benutzen die Konstruktion von S. 104:

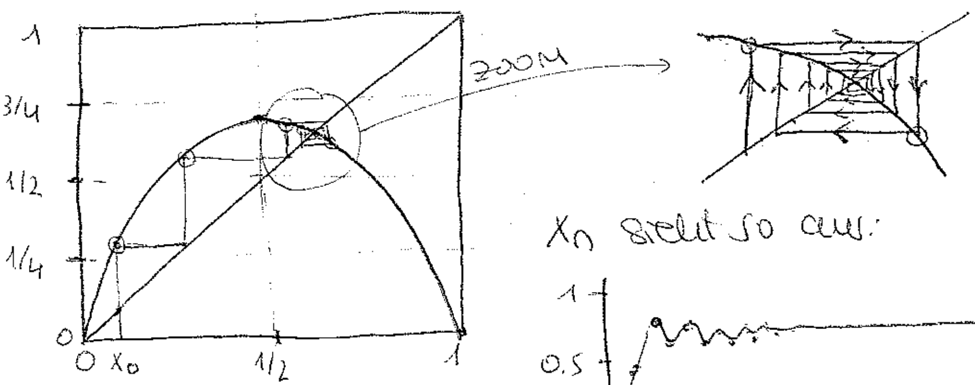


* Also wenn $r < 1$ $\quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(Die Population wird ausgelöscht)

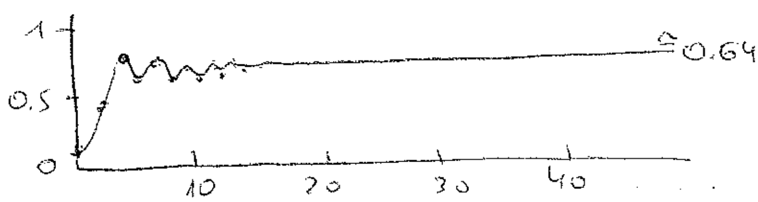
[Bemerkung: Für $r < 1$, $x^* = 0$ is der einzige Fixpunkt, und es ist stabil. Für $r > 1$, sieh unten, $x^* = 0$ wird instabil und es taucht einen Fixpunkt $x^* = \frac{r-1}{r}$ (stabil für $1 \leq r \leq 3$). Man hat für $r = 1$ also eine Art transkritischer Bifurkation (S. 10)]

* Gucken wir nun was passiert für $1 < r < 3$; z.B $r = 2.8$



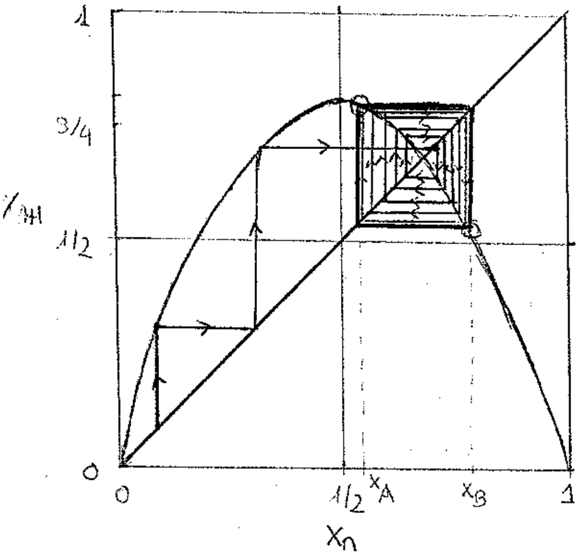
Spiral. Es gibt also ein Fixpunkt in $x^* = \frac{r-1}{r} \simeq 0.64$

x_n sieht so aus:



(* Bemerkung: Der Fixpunkt ist stabil. $f'(x) = r(1-2x) \rightarrow f'(x^*) = 2 - r \rightarrow$ Also $|f'(x^*)| < 1$ für $1 < r < 3$.)

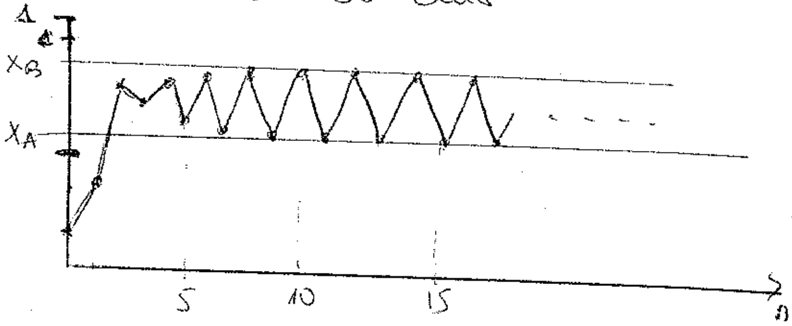
* Schauen wir nun was passiert für $r>3$, z.B. für $r=3.3$



* Ganz klar der Fixpunkt ist nun instabil aber das System endet in einem geschlosse-nen Orbit der Form:

$$\{\ldots, x_A, x_B, x_A, x_B, x_A, x_B, \ldots\}$$

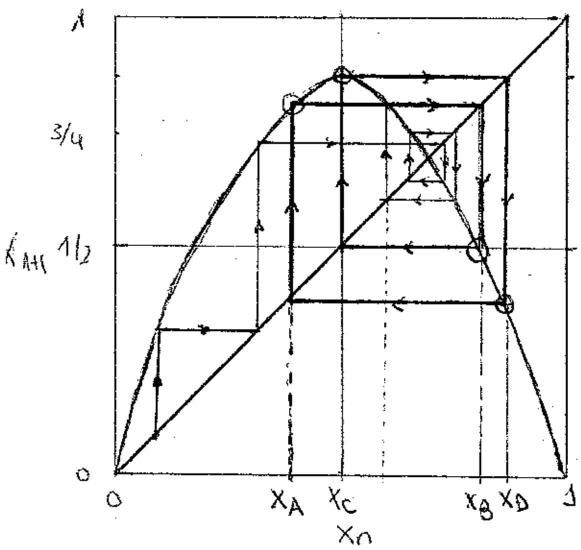
* x_n sieht also so aus



Die Abbildung oszilliert, und x_n wiederholt sich jede 2 Iterationen. Deswegen heißt das ein Zyklus von Periode 2.

(* Bemerkung: für $r=3 \rightarrow f'(x^*) = -1 \rightarrow$ also für $r>3$, $x^* = \frac{r-1}{r}$ ist nicht mehr stabil. Man hat für $r=3$ eine sogen. Flip-Bifurkation)

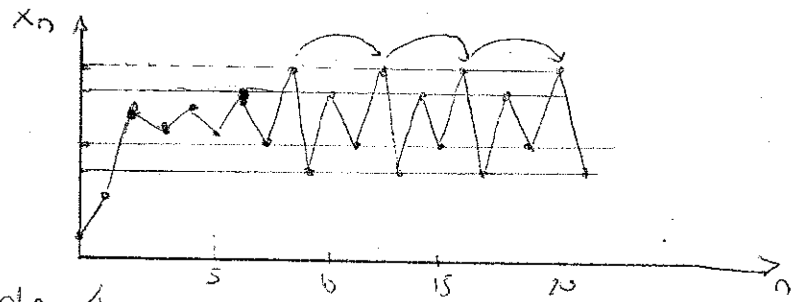
* Schauen wir nun was passiert für $r=3.5$:



* Das System endet nun in einem geschlossenen Orbit der Form:

$$\{\ldots, x_A, x_B, x_C, x_D, x_A, x_B, x_C, x_D, \ldots\}$$

und x_n sieht nun so aus



x_n wiederholt sich nun jede 4 Iterationen! $\longrightarrow$ Zyklus von Periode 4

* Also zwischen $r=3.3$ und $r=3.5$ die Periode hat sich verdoppelt.

Das nennt man Periodenverdopplung, eine extrem wichtige Idee zu verstehen wie ein System geht von Ordnung ins Chaos!

* Für andere Werte von r hat man noch mehr Periodenverdopplung.

* Man kann eine Tabelle vorbereiten, mit den Werte von r, wo die Periode verdoppelt sich:

$r_1 = 3$ (Periode 2 auftaucht)

$r_2 = 3.449..$ Periode 4

$r_3 = 3.54409..$ Periode 8

$r_4 = 3.5644...$ Periode 16

$r_5 = 3.568759...$ Periode 32

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$r_\infty = 3.569946$ $\qquad$ ∞ (!!)

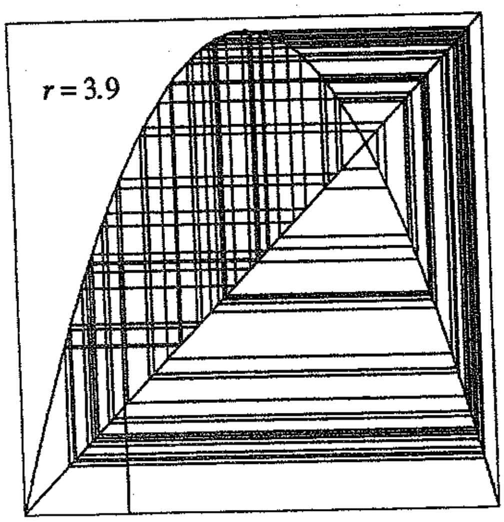
* Die Reihe $\{r_n\}$ von Werten für Periodenverdopplung erfüllt

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669...$$

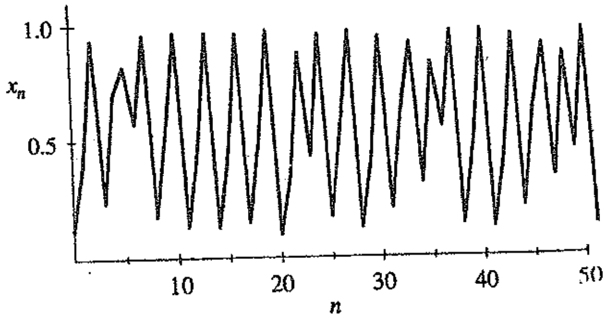
Diese Zahl ist die sogen. erste Feigenbaum-Konstante.
Wir werden später sehen, dass diese Zahl universal ist!

* Was passiert wenn $r > r_\infty$??

* Nehmen wir z.B. $r = 3.9$:



* Der Orbit endet nie in einem geschlossenen Orbit. Das Verhalten des System ist für lange Zeiten aperiodisch!
* Das ist die diskrete Version des Chaos, das wir in dem Lorenz-System gefunden haben (S. 96).

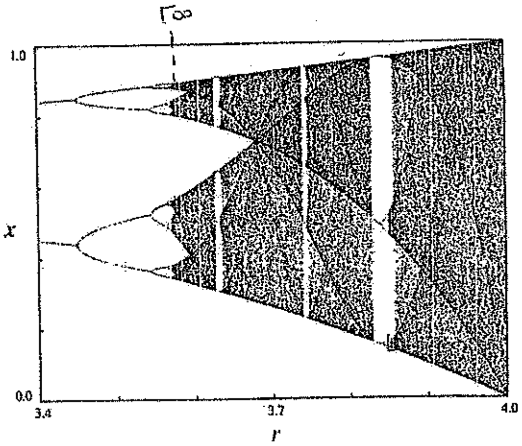


* Man würde naif denken, dass das System chaotischer wird, wenn r größer wird. Die Dynamik des Systems ist aber viel komplizierter und schöner als das!

* Die Dynamik für $r > r_\infty$ ist better untersucht mit Hilfe eines sogen.
<u>Orbitdiagramm</u>:

- Für jedes r, man fängt mit einer willkürlichen Anfangsbedingung x_0. Man entwickelt die Dynamik, bis die Übergangsphase vorüber ist (z.B. 200 Iterationen). Man guckt wie der Orbit aussieht $\{x_{201}, \dots, x_{501}\}$ (z.B.), und man plottet diese Punkte. Die bauen ein Orbitdiagramm.

Für die logistische Abbildung, der Diagramm sieht so aus:

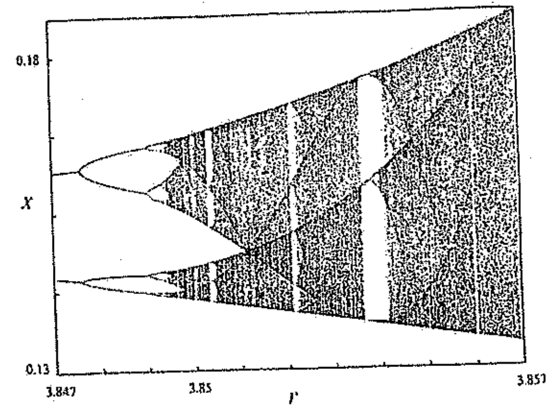


* Wir fangen hier mit r = 3.4 wo wir ganz klar eine Periode-2 haben (2 Punkten auf dem Diagramm).
* Dann sehen wir das Perioddoubling für 3.449... und noch mal in 3.54409. Weitere Verdopplungen sind hier nicht gut aufgelöst.

* Also, wenige Punkten heißt <u>reguläre Bewegung</u> und mehrere Punkte (fast ein Kontinuum von Punkten mit dieser Auflösung) heißt <u>chaotische Bewegung</u>

* Aber für $r > r_\infty$ die Bewegung ist nicht 100% chaotisch! Man hat da <u>Inseln oder Fenstern von regulären Bewegung</u>!

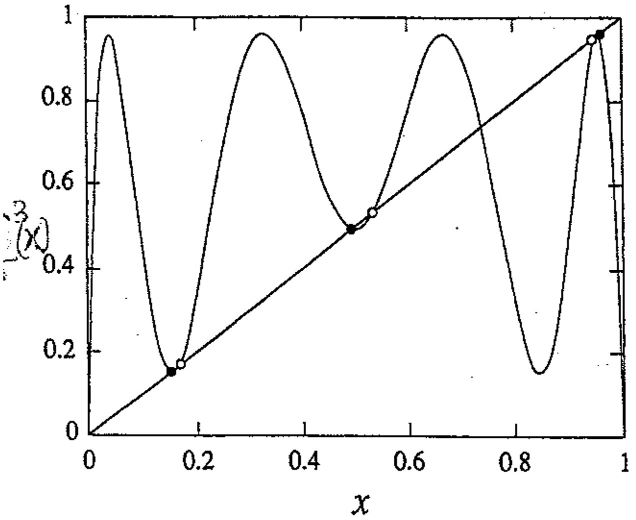
Zum Beispiel, gucken wir die relativ große reguläre Insel in der Nähe von 3.83. Am Anfang dieser Inseln haben wir einen Orbit mit Periode-3, aber dann gibt es Periodenverdopplungen für jeden dieser 3 Punkten. Gucken wir den unteren Punkt ganz genau:



* <u>Überraschung</u>! Der Orbitdiagramm sieht für diesen Unteren Teil der Inseln qualitativ ganz genau wie der gesamte Diagramm!
* Der Orbitdiagramm hat eine fraktale Struktur. Wir werden mehr über Fraktalen später lernen.

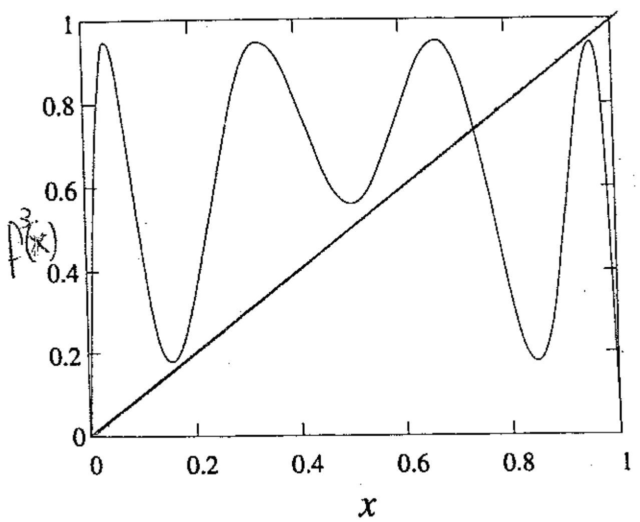
· Gucken wir, warum hat man diese reguläre Inseln. Gucken wir die Inseln mit Periode 3. Entscheidend hier ist die Funktion $f(f(f(x)))=f^3(x)$, sodass $x_{n+3}=f^3(x_n)$. Gucken wir was passiert, wann die Periode-3 Fenster sich öffnet (um $r \simeq 3,8284...$)

· Gucken wir für $r = 3.835$:



* Es gibt also 8 Fixpunkte
  * 2 davon sind die Fixpunkte von $f(x)$, und die sind, wie wir schon wissen, instabil hier.
  * 3 stabile Fixpunkte (mit $|f^{3\prime}(x)|<1$)
  * 3 instabile Fixpunkte (mit $|f^{3\prime}(x)|>1$)
* Die 3 stabile Fixpunkte bedeuten natürlich, dass einen stabilen Orbit mit Periode 3 gibt.

· Gucken wir nun was passiert für $r = 3.80$

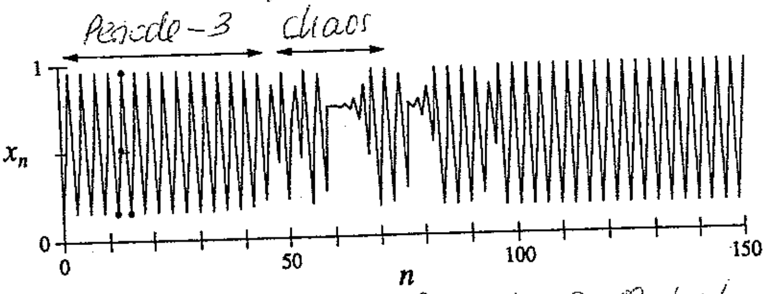


* Die stabile und instabile Fixpunkte (außer die von $f(x)$) sind verschwunden. Der Orbit von Periode 3 ist also zerstört
* Die Minima sind nicht so tief, und die Maxima nicht so hoch.
* Am $r_c \simeq 3.8284$ $(=1+\sqrt{8})$ ist die Gerade $g(x)=x$ tangent zu der $f^3(x)$ Kurve genau an den Minima (links und mitte) und Maximum (rechts). Am $r = r_c$ werden Fixpunkte erzeugt (und zwar als stabil/instabil Paaren)

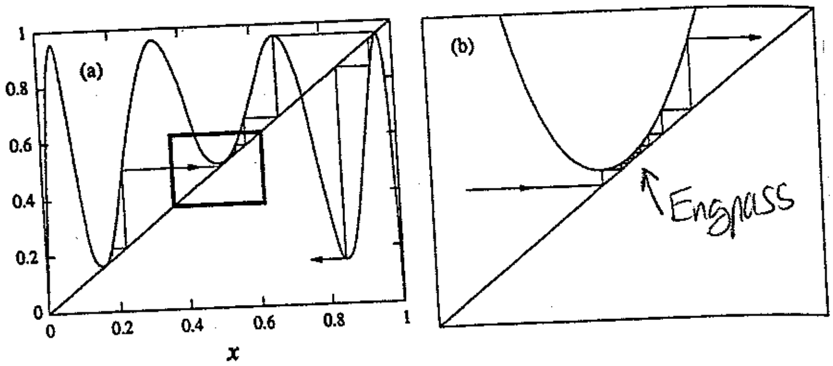
Man hat also da eine Art Saddle-Node Bifurkation (S. 8)
(Bemerkung: diese besondere Art von Saddle-Node Bifurkation wird Tangentenbifurkation genannt).

* Die reguläre Inseln werden also in dieser Art von Bifurkationen geboren.

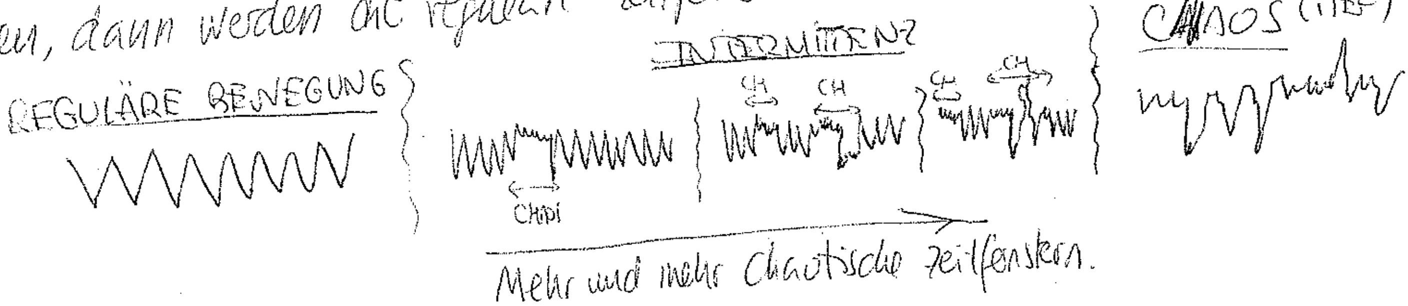
Aus unserer Diskussion von S. (26), wissen wir schon, dass in der Nähe einer Saddle-Node Bifurkation, eine interessante Dynamik passieren kann, sogar wenn es keine Fixpunkte gibt. Etwas ganz interessantes passiert hier auch. Suchen wir was passiert für $r = 3.8282..$ (also gleich $r \leq r_c$)



• Für lange Zeit sieht es wie einer Periode-3-Orbit, aber ab und zu (aperiodisch) gibt es chaotische Zeitfenstern, und dann noch mal Periode-3, usw. Warum? Die Erklärung ist noch mal klar wenn wir $f^3(x)$ untersuchen:



• So ein Effekt nennt man <u>Intermitenz</u>, und passiert oft für Systeme zu der Grenze zwischen reguläre und chaotische Bewegung. Wenn die reguläre Bewegung angenähert wird, werden die chaotische Intermitenzen seltsamer, aber wenn wir in Gegenteil tiefer in das chaotischen Bereich eingehen, dann werden die reguläre Zeitfenstern seltsamer.



• Die Idee von Intermitenz erlaubt eine schöne Intuition von was passiert, wenn das System chaotisch wird.

* Empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

Auf S. 98 haben wir gezeigt, dass chaotische Systeme eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aufweisen. Dort haben wir die Idee von Lyapunov-Exponent eingeführt. Wir werden diese Idee auch für Abbildungen einführen

* Sei die Anfangsbedingung x_0. Nach n Iterationen $\longrightarrow x_n$.

Sei nun $x_0 + \delta_0$. Nach n Iterationen $\longrightarrow x_n + \delta_n$

Wenn $|\delta_n| = |\delta_0| e^{n\lambda} \longrightarrow$ dann $\lambda \equiv$ Lyapunov-Exponent.

Wenn $\lambda > 0 \longrightarrow$ Chaos!

. Der Lyapunov-Exponent wird so am einfachsten berechnet:

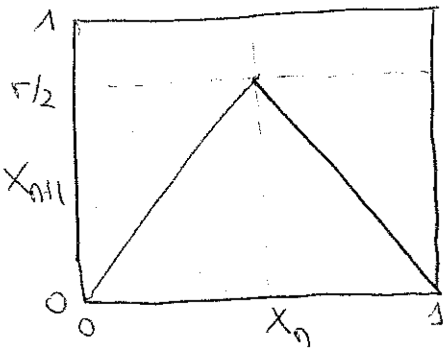
$$\lambda = \frac{1}{n} \ln\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = \frac{1}{n} \ln\left|\frac{f^n(x_0+\delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0}\right| \overset{\delta_0 \to 0}{=} \frac{1}{n} \ln\left|(f^n)'(x_0)\right| \overset{\text{Kettenregel}}{=}$$

$$= \frac{1}{n} \ln\left|\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)| \Longrightarrow \boxed{\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)|}$$

Wenn so ein Limes existiert, dann haben wir unseren Lyapunov-Exponent.

. Beispiel

* Nehmen wir die sogen. Zelt-Abbildung ("tent map" auf Englisch):



$$f(x) = \begin{cases} rx & 0 \le x \le 1/2 \\ r - rx & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{wobei} \begin{Bmatrix} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le x \le 1 \end{Bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{Bmatrix} r & 0 \le x \le 1/2 \\ -r & 1/2 \le x \le 1 \end{Bmatrix} \to |f'(x)| = r$$

Dann $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln r = \ln r$

Dann, für $r < 1 \to \lambda < 0 \longrightarrow$ reguläre Bewegung

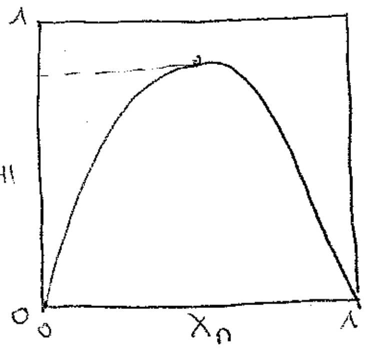
$r > 1 \longrightarrow \lambda > 0 \longrightarrow$ Chaotische Bewegung!

* Universalität

* Eigentlich, Abbildungen wie die logistische Abbildung erfüllen eine ziemlich beeindruckende Eigenschaft. Gucken wir es!
* Gucken wir die Abbildung

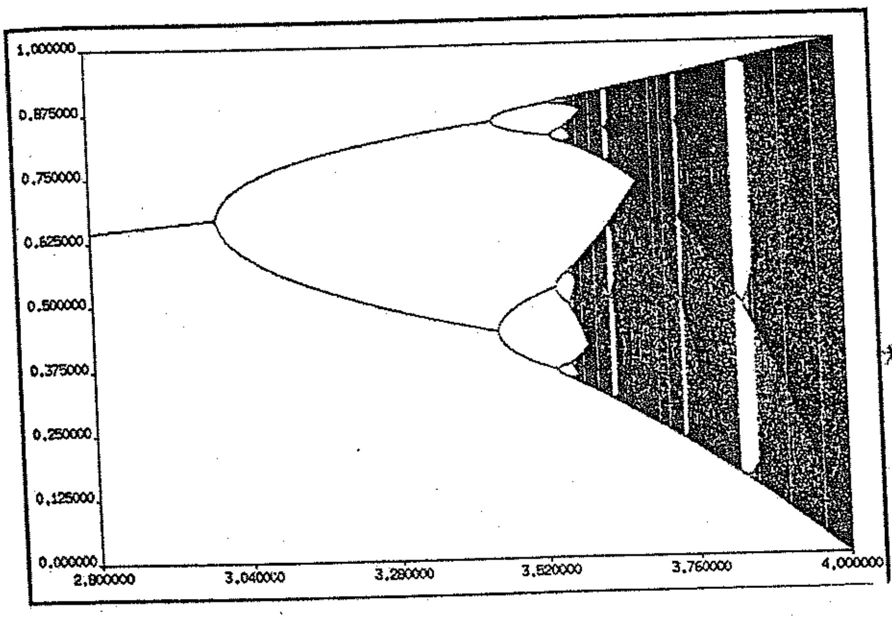
$$x_{n+1} = r \sin \pi x_n \longrightarrow \text{Sinus-Abbildung}$$

Formel sieht nicht wie die logistische Abbildung $[x_{n+1} = r x_n (1-x_n)]$ aber wenn wir die Funktion $f(x) = r \sin \pi x$ plotten:



* $r \sin \pi x$ sieht sehr ähnlich wie $rx(1-x)$.
* Beide Kurven sind glatt, konkav (nach unten), und für beide $f(0)=f(1)=0$ beide haben ein Maximum, und
* Beide sind Beispiele der sogen. unimodale Abbildungen

* Gucken wir nun den Orbitdiagramm der Sinus-Abbildung:



* Qualitativ sieht der Orbitdiagramm genauso wie der Orbitdiagramm der logistischen Abbildung (S. 108) aus!
* Man hat Periodenverdopplung bis ins Chaos, und außerdem reguläre Inseln innerhalb des Chaos.

* Die reguläre Inseln sehen qualitativ genauso aus! Sogar die Perioden innerhalb der Inseln sind gleich (z.B. die 3-Periode Fenster bleibt immer noch mit Periode 3!

Die reguläre Fenster folgen Haar genau dieselbe Reihenfolge in beiden Abbildungen! (Metropolis-Theorem)

Das gilt für alle unimodale Abbildungen der Form $f(x) = r g(x)$!!

* Es gibt also eine qualitative Universalität für unimodale Abbildungen. Die Sache ist sogar bemerkenswerter, weil es dazu eine <u>quantitative Universalität</u> gibt, wie wir auf S. 107 schon angedeutet haben.

* Wie für die logistische Abbildung können wir für alle unimodale Abbildungen $x_{n+1} = rf(x_n)$ die Reihenfolge $\{r_n\}$ bestimmen, wobei r_n (wie auf S. 107) sind, die r-Werte wo eine Periodenverdopplung passiert.

Für alle unimodale Abbildungen:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669\ldots \Rightarrow \text{1. } \underline{\text{Feigenbaum-Konstante}}$$

· Die Feigenbaum-Konstante ist eine <u>universelle-Konstante</u> <u>des Periodenverdopplung</u>, und daher eine extrem wichtige Eigenschaft des Pfads zur Chaos.

* Periodenverdopplung wurde in verschiedenen Systemen beobachtet, z.B. in Rayleigh-Bénard-Experimente (S. 85) und nicht-lineare elektronische Schaltungen. Für alle diese Experimente δ folgt (ungefähr) die Feigenbaum-Konstante!

· Es ist eigentlich ziemlich bemerkenswert, dass echte physikalische Systeme Periodenverdopplungen und Universalität aufweisen, da echte Systeme viel komplizierter als 1D-Abbildungen sind (und außerdem die Dynamik ist in kontinuierlicher Zeit, und nicht in diskrete Zeit).

* Um das zu verstehen, gucken wir noch ein Prototyp von (möglichst) chaotischen Gleichungen, das sogen. <u>Rössler-System</u>

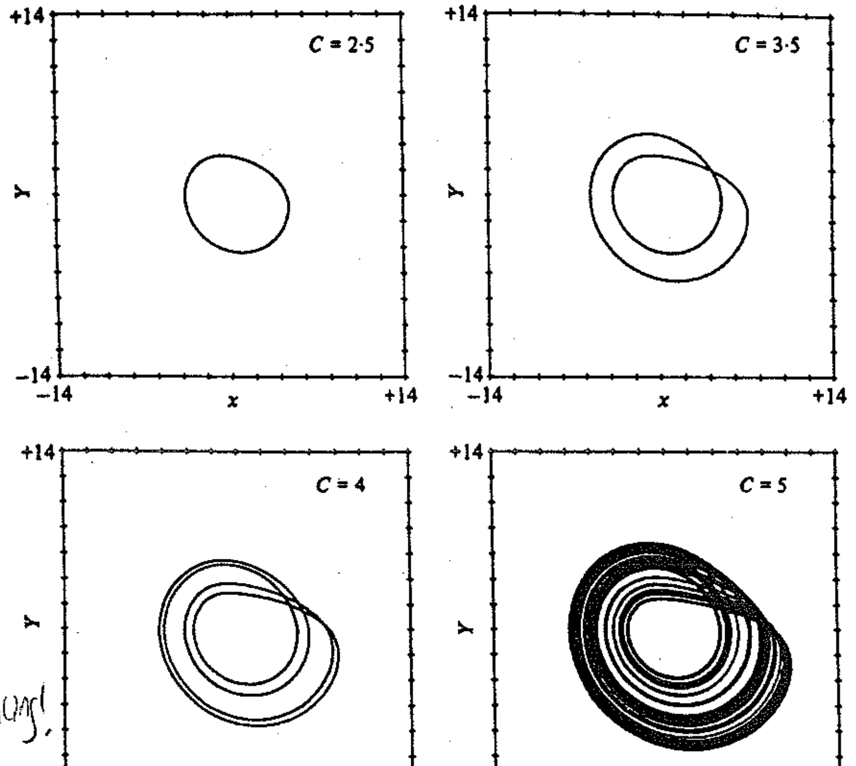
$$\left.\begin{aligned} \dot x &= -y - z \\ \dot y &= x + ay \\ \dot z &= b + z(x-c) \end{aligned}\right\}$$ wobei a, b, c sind Konstanten

Wir haben hier noch mal ein 3D nichtlineare System (eigentlich es sieht ein bisschen wie die Lorenz-gleichungen (aber hier das System hat nur eine Nichtlinearität (in der 3. gleichung) anstatt 2)).

Nehmen wir $a = b = 0.2$, und nehmen wir c als Kontrollparameter. Wollen wir wie die Bahnen aussehen (wir machen hier eine Projektion auf der xy-Ebene):

Nur ein Grenzzyklus (es gibt nur ein Maximum von x)

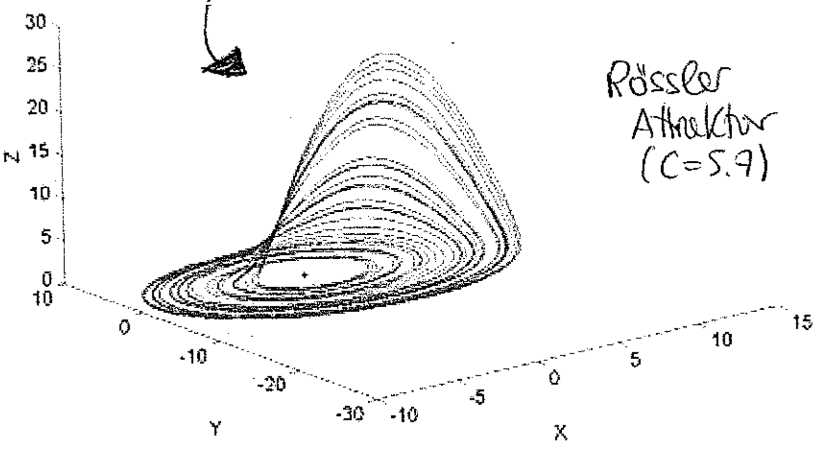
Grenzzyklus mit "Loop" → Periodenverdopplung (es gibt 2 lokale Maxima (und Minima) von x)



Hier haben wir 4 lokale Maxima von x ⇒ Noch eine Periodenverdopplung!

Chaotische Bewegung: Rössler-Attraktor (noch ein Beispiel von seltsamer Attraktor)

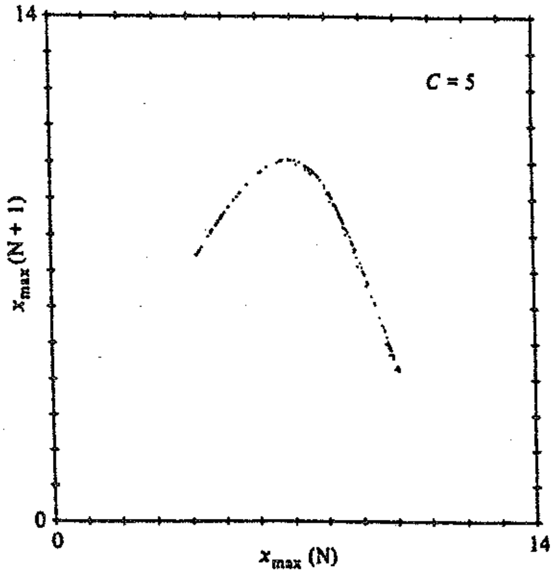
(Bemerkung: Die Bewegung ist natürlich in 3D, und damit haben wir keine echte Kreuzung von Bahnen!!)



Rössler Attraktor (C=5.9)

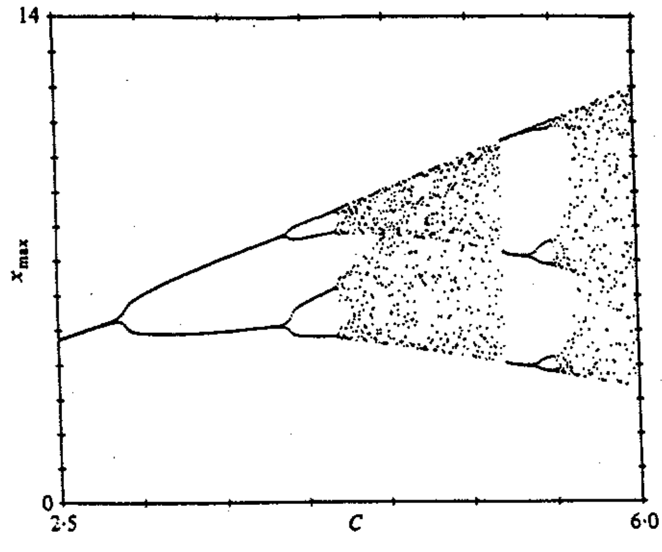
(115)

* Der Pfad von reguläre Bewegung bis ins Chaos geht also durch Periodenverdopplungen, als erwartet von der Theorie von 1D Abbildungen. Aber was haben die Rössler-Gleichungen mit Periodenverdopplungen überhaupt zu tun? Hier kommt die Idee von Lorenz-Abbildung (S. 101) noch mal. Wir untersuchen die Reihe von lokalen Maxima für den Rössler-Attraktor $\{x_n\}$. Wir plotten x_{n+1} vs. x_n:



* Man kriegt (fast) eine perfekte Kurve (mit vernachläßigbarer Ausdehnung).
* Die Lorenz-Abbildung ist also eine 1D-Abbildung, sehr ähnlich wie die logistische Abbildungen → → die ist auch eine unimodale-Abbildung!!

* Wir können dann ein Orbitdiagramm für den Rössler-System vorbereiten. Für jede Wert von C, wir untersuchen die lokale Maxima $\{x_n\}$. Die Anzahl von lokale Maxima sagt uns die Periode der Bewegung!



* Wir sehen wo ganz klar die Periodenverdopplungen bis ins Chaos, und sogar die reguläre Inseln mit Periode 3 !!
* Also wenn für eine physikalisches System, die entsprechende Lorenz-Abbildung fast 1D und unimodal ist, dann Feigenbaums Universalität gilt!!

* Das passiert nur wenn der seltsamer Attraktor sehr flach ist (fast 2D), wie ist der Fall des Rössler-Attraktors (S. 114). Das ist der Fall der Lorenz-Gleichungen auch (und daher das Rayleigh-Bénard-Experiment Periodenverdopplungen aufweist). Aber das ist nicht immer der Fall. Es gibt Fälle die kaum verstanden sind...