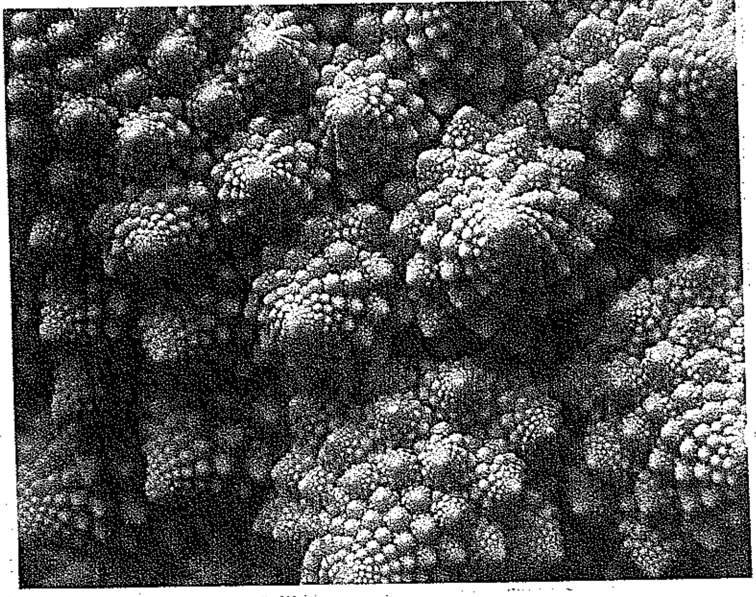
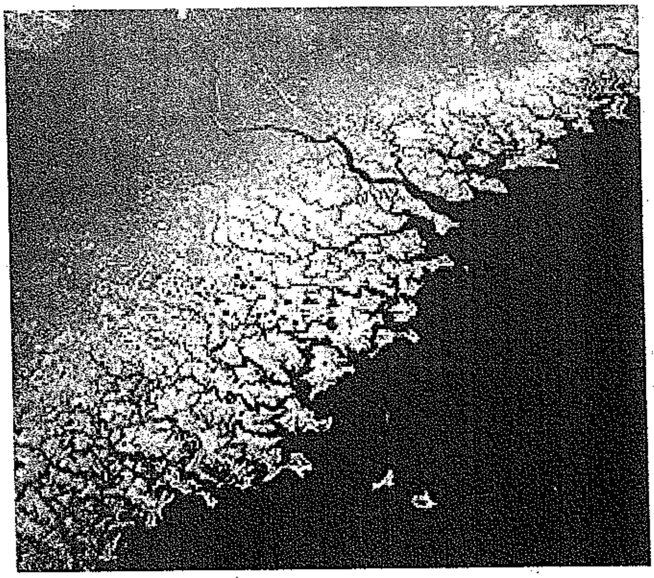
• Fraktalen

• Wir haben schon gesehen, dass die seltsame Attraktoren (z.B. für das Lorenz-System (S. 98) oder das Rössler-System (S. 114)) eine extrem komplizierte Form aufweisen. Die sind eigentlich fast 2D aber nicht ganz (sonst Chaos wäre nicht möglich!). Wir haben auch gesehen, dass die Orbitdiagramme unimodaler Abbildungen eine wunderschöne Selbstsimilarität aufweisen (ich erinnere euch an unserer Diskussion von S. 108). Wir werden sofort sehen, dass Selbstähnlichkeit und nicht-ganzzahlige Dimensionen Eigenschaften der sogen. Fraktalen sind. Allerdings die seltsame Attraktoren weisen eine fraktale Struktur auf, und daher sind Fraktalen wichtig für die Analyse chaotischer Systeme. Wir werden nun einige Ideen von Fraktalen lernen.

Grob gesagt, Fraktalen sind komplizierte geometrische Formen mit einer feinen Struktur für alle Skalen (d.h. wir machen ein Zoom und wir finden eine komplexe Struktur, wir zoomen noch mal und wir finden noch eine komplexe Struktur, usw). Typischerweise sind diese Formen entweder qualitativ oder genau selbstähnlich (d.h. wenn wir ein Zoom machen, finden wir noch mal das gleiche!)

Fraktal-artige Strukturen tauchen überall in der Natur auf, z.B. Blumenkohle, Schneeflocken, Bäume, Küstenlinie, usw.

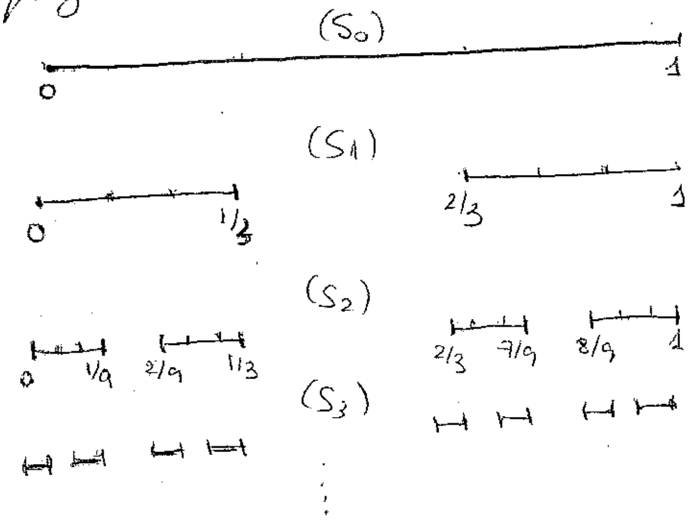




- Fraktalen haben auch viele Anwendungen, z.B. in Computeranimationen und Computerspiele, in Ökonomie (zB. Analyse von Börsedata), in Biologie, Chemie (Belousov-Zhabotinsky-Reaktion), Datakomprimierung und viele andere, natürlich auch in Chaostheorie!

Die Cantor-Menge

- Die Cantor-Menge ist vielleicht der einfachste Beispiel eines Fraktals außerdem sie spielt eine bedeutende Rolle in seltsamen Attraktoren!).
- Die Cantor Menge läßt sich mittels folgender Iteration konstruieren:
  - Man beginnt mit dem Intervalle $[0,1]$: (S_0)
  - Aus diesem Intervall wird das mittlere Drittel entfernt (S_1)
  - Aus diesen beiden Intervallen wird wiederum jeweils das mittlere Drittel entfernt (S_2)
  - usw



Die Limesmenge $C = S_\infty$ ist die Cantor-Menge
Diese Menge hat einige Eigenschaften typisch von Fraktalen

(i) Die hat eine Struktur für alle Skalen, egal wie stark wir zoomen.

(ii) Die ist selbstähnlich, d.h. die enthält Kopien von sich selbst!

(iii) Die Dimension der Cantor-Menge ist keine Ganzzahl!
Die ist eigentlich ≈ 0.63, wie wird bald sehen werden

* DIE KOCH-KURVE

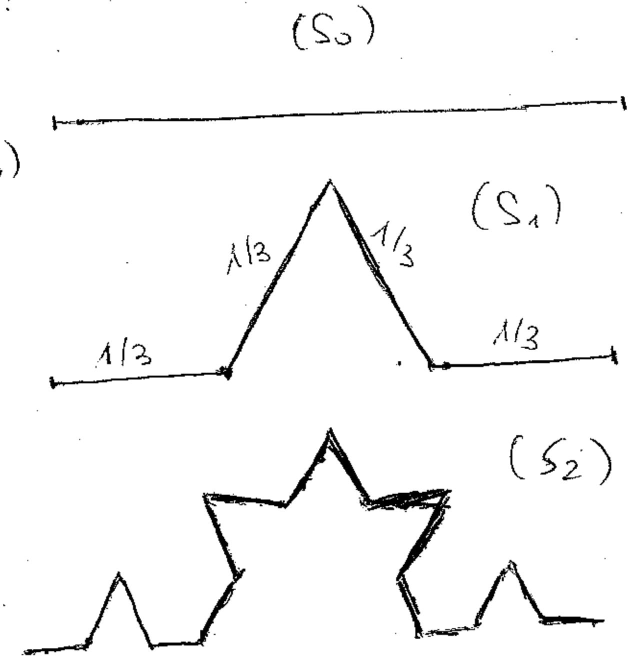
• Noch ein einfacher (und schöner) Beispiel von Fraktal ist die Koch-Kurve. Wie für die Cantor-Menge kann man die Kurve mittels eines iterativen Prozesses konstruieren:

(i) Zu Beginn besteht die Kurve aus einem einzigen Streckenstück (S_0)

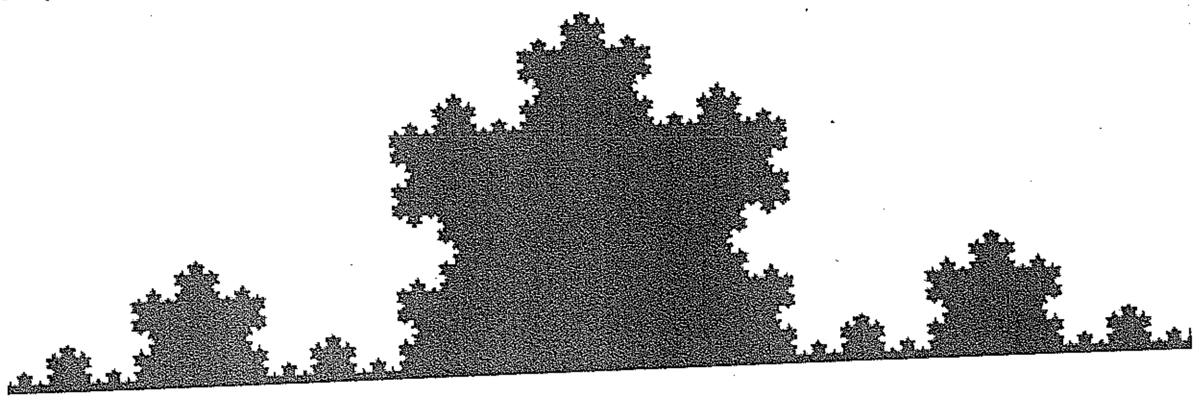
(ii) Aus diesem Stück wird das mittlere Drittel entfernt (wie für die Cantor-Menge) aber nun wie in der Abbildung (S_1) ersetzt

(iii) Wir wiederholen das für jede Strecke (S_2)

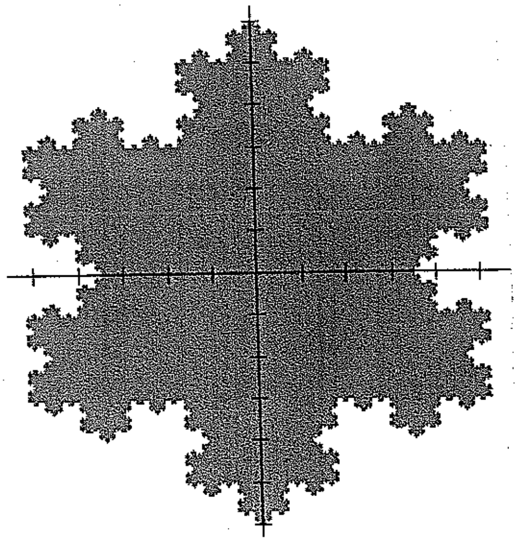
usw



Nach nur 5 Iterationen sieht die Kurve so aus



• Wenn wir anstatt eine Gerade in Schritt (i) ein Dreieck anwenden, dann kriegen wir die sogen. <u>Koch-Schneeflocke</u>:



Die Koch-Kurve ist die Limeskurve $K = S_\infty$

Mit Hilfe der Koch-Kurve werden wir nun die wichtige Idee von <u>Fraktaldimension</u> einführen.

Die Frage ist: <u>welche Dimension hat die Koch-Kurve?</u>

Man würde sagen, dass die 1D ist. Aber ist das eigentlich so?? Sagen wir, dass S_0 eine Länge L_0 hat. Die Länge von S_1 ist ganz klar $L_1 = \frac{4}{3} L_0$. Die Länge von S_2 ist $L_2 = \frac{4}{3} L_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 L_0$. Im Allgemeinen $L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0$. Die Länge von $K = S_\infty$ ist also unendlich!!

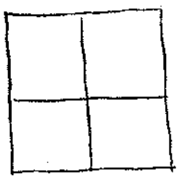
Noch schlimmer die Länge zwischen irgendwelche 2 Punkten auf der Kurve ist auch unendlich!!

Diese Paradox deut an, dass die Dimension von K größer als 1 ist. Die Kurve hat aber keine "Fläche", also die Dimension ist kleiner als 2. Es sieht so aus, dass die Dimension zwischen 1 und 2 liegt!

Wir werden nun die Idee von Dimension erweitern.

Fangen wir mit der Idee von <u>Ähnlichkeitsdimension</u>.

Nehmen wir eine Viereck. Wir schrumpfen ~~jede~~ entlang jeder Richtung um Faktor 2. Wir brauchen dann 4 kleine Vierecken zu addieren, um die ursprüngliche Viereck zurück zu bekommen:

 $\longrightarrow 2^2$; Im allgemeinen wenn wir ein Faktor r schrumpfen, dann <u>brauchen wir r^2</u> kleine Vierecken.

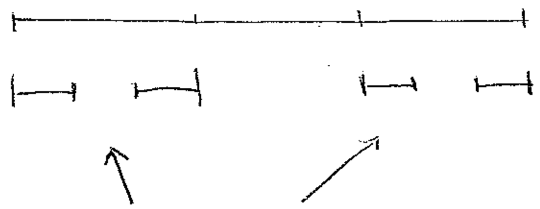
Wenn wir dasgleiche mit einem Würfel machen würden, dann würden wir <u>r^3 kleine Würfeln</u> brauchen

Die Exponenten 2 und 3 spiegeln die 2D oder 3D Natur wieder. Wir können also die Idee von Dimension verallgemeinern (das gilt nur für Systeme, die selbstähnlich sind, und nicht alle Fraktale sind ~~exakt~~ genau selbstähnlich!). Sagen wir, dass eine selbstähnliche Menge von m Kopien (ein Faktor r runterskaliert) von sich selbst zusammengesetzt werden kann. Dann wird die <u>Ähnlichkeitsdimension d</u> so definiert:

$$d = \frac{\ln m}{\ln r} \qquad (\text{also } m = r^d)$$

<u>Zum Beispiel</u>

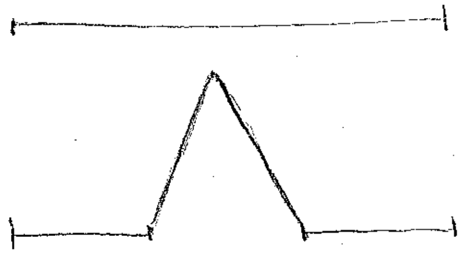
* <u>Die Cantor-Menge</u>:



2 Kopien ($m=2$) jede 3x runterskaliert ($r=3$)

Also $d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0{,}63$ (wie wir auf S. 117 erwähnt haben)

* <u>Die Koch-Kurve</u>



4 Kopien ($m=4$)
jede 3x runterskaliert
($r=3$)

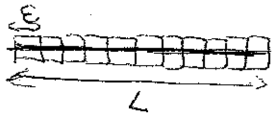
Also $d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1{,}26$ $\rightarrow$ also doch <u>etwas zwischen 1D und 2D</u>!!

Das Problem mit dieser Idee von Dimension ist, dass sie nur für selbstähnlichen Mengen gilt. Wir werden nun andere Definitionen von Fraktaldimensionen einführen, die auch für nicht selbst-ähnlichen Mengen gelten.

Gucken wir nun die Idee von Boxcounting-Dimension.
Man überdeckt die Menge mit einem Gitter der Gitterbreite ε.
Wenn $N(\varepsilon)$ die Zahl der von der Menge belegten Boxen ist, so ist
die Box-Dimension

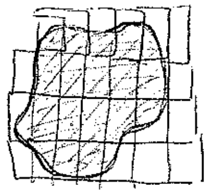
$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

z.B. eine ~~Gerade~~ einfache Kurve
z.B. eine Gerade)



$N(\varepsilon) \propto 1/\varepsilon \;\rightarrow\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = 1$

z.B. für eine Fläche $\Longrightarrow$



$N(\varepsilon) \propto A/\varepsilon^2 \longrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} = 2$

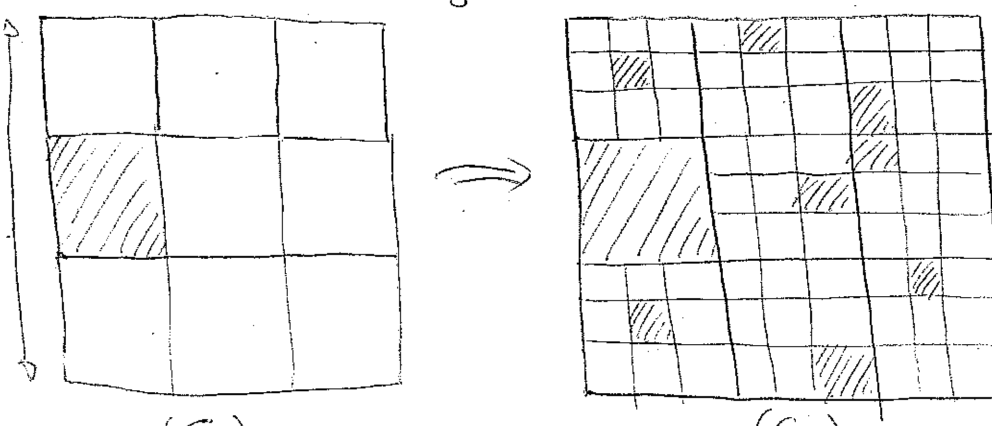
z.B. für die Cantor Menge.

Ich erinnere euch, dass $C = S_\infty$ wobei S_n auf S. 117 definiert wird. Die Cantor-Menge wird von alle S_n übergedeckt. Jede S_n enthält 2^n Intervallen mit Länge $(1/3)^n$. Sei also $\varepsilon = (1/3)^n$, dann
$N(\varepsilon) = 2^n$

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Also wie die Ähnlichkeitsdimension

Nehmen wir nun einen Fraktal, der nicht genau selbstähnlich ist.
Nehmen wir eine Vierecke, wir spalten die Vierecke in 9 Teilen und nehmen eine beliebige Vierecke aus. Wir wiederholen, usw...



(S_1) (S_2)

* Wenn wir ∞ (S_∞) Wiederholen, dann haben wir ein Fraktal, der nur qualitativ (und nicht genau) selbstähnlich ist.

S_1 wird von $N = 8$ Vierecken mit Länge $\varepsilon = 1/3$; S_2 von $N = 8^2$ mit Länge $\varepsilon = 1/3^2$; ... S_n von $N = 8^n$ mit Länge $\varepsilon = 1/3^n$

Dann $d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \simeq 1.89$

Die Menge ist also fast 2D aber nicht ganz!

Die Box-Dimension kann zwar numerisch berechnet werden, ist sie aber relativ aufwendig (die kostet relativ viel Zeit und Speicherung). Suchen wir noch eine Art Dimension, die ~~[illegible]~~ einfacher für die numerische Berechnung der Fraktaldimensionen von seltsamen Strukturen ist.

Nehmen wir einen Punkt $\vec{x}$ auf einem seltsamen Attraktor (z.B. der Lorenz-Attraktor von S. 98).

Bemerkung: $\vec{x}$ ist ein Vektor im Variablenraum, z.B. (x, y, z) für das Lorenz-System.)

Sei $N_{\vec{x}}(\varepsilon)$ die Anzahl von Punkten des Attraktors innerhalb einer Kugels von Radius ε um $\vec{x}$.

Bemerkung: Wir entwickeln die Dynamik des Attraktors für eine lange aber natürlich endliche) Zeit, solch daß wir viele Punkte des Attraktors bekommen.)

$N_{\vec{x}}(\varepsilon)$ misst wie oft ist eine typische Bahn in der Nähe von $\vec{x}$.

Nun, wir ändern den Radius ε. Wenn ε zunimmt, typischerweise $N_{\vec{x}}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{d_{\vec{x}}}$, wobei $d_{\vec{x}}$ die Punktdimension um $\vec{x}$ ist.

Die Punktdimension ist eine lokale und keine globale Eigenschaft, da manche Bereiche im Attraktor dichter als andere sind.

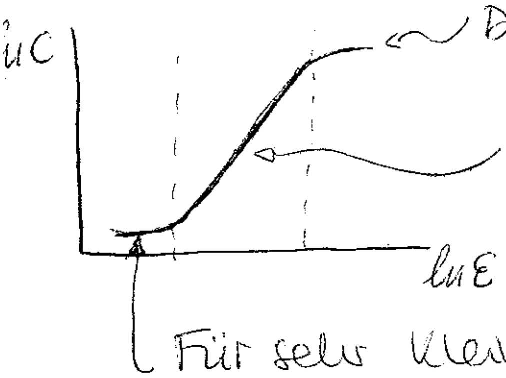
Daher, macht man ein Durchschnitt von $N_{\vec{x}}(\varepsilon)$ über viele $\vec{x}$:

$$C(\varepsilon) = \overline{N_{\vec{x}}(\varepsilon)} \leftarrow \text{Durchschnitt}$$

$$\propto \varepsilon^{d} \longleftarrow \text{diese Potenz hier ist die Korrelationsdimension}$$

: Das ist etwa ähnlich wie die Box-Dimension, aber hier betrachten wir auch die Dichte innerhalb der Boxes, und nicht nur ob die Boxes besetzt sind. Deswegen $d_{\text{CORRELATION}} \leq d_{\text{BOX}}$, aber typischerweise sehr ähnlich.

- Um d zu bestimmen, man plottet $\ln C(\varepsilon)$ vs. $\ln\varepsilon$. Typischerweise ist man etwas wie das



Die Kurve sättigt für große ε, da man die Breite des Attraktors erreicht

Hier $\ln C$ ist eine Gerade von $\ln\varepsilon$, also

$d \Rightarrow$ <u>die Steigung der Gerade</u>

Für sehr kleine ε gibt es kein Punkt um $\bar{x}$

Zum Beispiel, man kann diese Methode für die <u>Lorenz-gleichungen</u> anwenden. Für die prototypische Werte (S. 96) $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$ Attraktor von S. 98) bekommt man <u>$d = 2.05 \pm 0.01$</u>.

Der Lorenz-Attraktor ist also (fast!) 2D.

(* <u>Bemerkung</u>: Es gibt andere Methoden für die Bestimmung von Fraktal-Dimensionen, aber mit diesem 3 Methoden ist es für uns hier genug.)

<u>DIE MANDELBROT-MENGE</u>

- Wir können unsere kurze Diskussion über Fraktalen nicht enden, ohne die vielleicht wohl bekannteste alle Fraktal-Mengen zu erwähnen, die <u>Mandelbrot-Menge</u> (auch <u>Apfelmännchen</u> genannt)

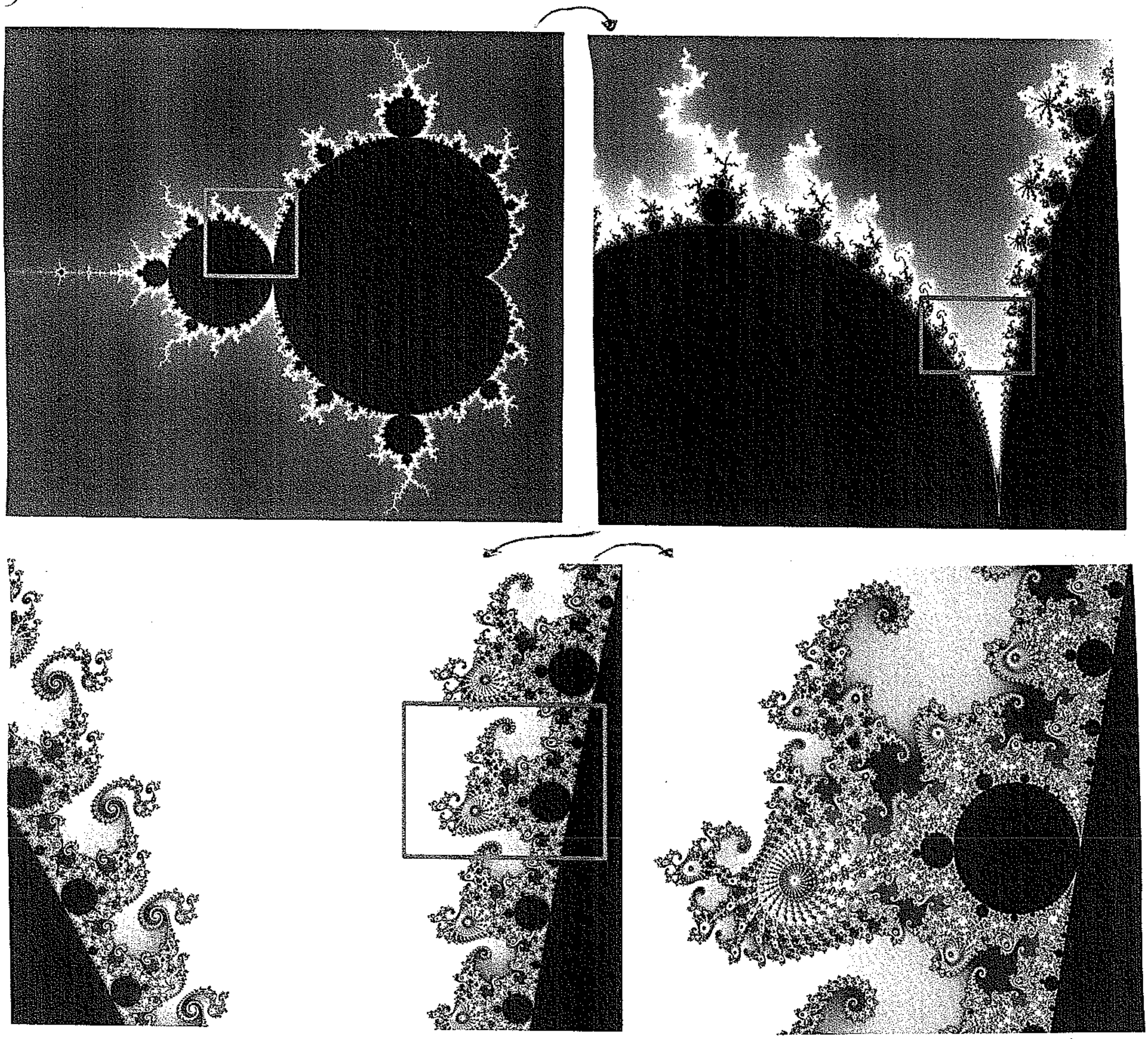
Die Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen c, für welche die rekursiv definierte Folge komplexer Zahlen $z_0, z_1, z_2 \ldots$ mit dem Bildungsgesetz

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

und dem Anfangsglied $z_0 = 0$, beschränkt bleibt (d.h. der Betrag der Folgenglieder wächst nicht über alle Grenzen). Die graphische Darstellung von $\mathbb{M}$ erfolgt in der komplexen Ebene.

* Dieses Bild ist nun das Prototypbild der Fraktalforschung.

* Die Mandelbrot-Menge ist eine wunderschöner qualitativ (aber nicht genau!) selbstähnlicher Fraktal.



und so weiter...

• Die Mandelbrot-Menge ist wie eine Welt in sich, und der Spaß der Entdeckung hört nie auf! Es gibt viele Applets und Videos im Internet. Untersuch diese Welt selbst!