

• CHAOS IN KONSERVATIVEN SYSTEMEN

- * Bisher haben wir nur dissipative Systeme untersucht, wo das Volumen im Phasenraum ~~zunimmt~~ mit der Zeit (oder den Iterationen in Abbildungen) abnimmt.
- * Es gibt eine breite Klasse von dynamischen Systemen wo Chaos gefunden wurde (eigentlich vor der Entdeckung des Lorenz-Attraktors), nämlich die Konservative Systeme. (S. 53)
- * Konservative Systeme sind:
 - * Systeme die die Hamiltonsche Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} ; \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$
erfüllen. Für diese Systeme werden Volumina im Phasenraum erhalten (Liouville Theorem).
 - * Diskrete Abbildungen, die das Volumen im Phasenraum erhalten.
 - * Die Tatsache dass Volumina erhalten werden, heißt, dass es keinen attraktiven Bereich im Phasenraum gibt (also keine attraktive Fixpunkt, Grenzzyklen oder seltsamen Attraktoren). Man darf aber Chaos haben. Wir werden das hier (lediglich kurz) untersuchen.

* INTEGRABLE SYSTEME

- * Eine Hamiltonsche Funktion $H(\vec{p}, \vec{q})$ ist integrierbar, wenn es eine kanonische Transformation ~~in~~ $S(\vec{q}, \vec{J})$ in neuen Variablen $\vec{J}, \vec{\theta}$ (Winkel-Wirkung Variablen) gibt: ~~mit~~
- $$\vec{q}, \vec{p} = \frac{\partial S(\vec{q}, \vec{J})}{\partial \vec{q}} \Leftrightarrow \vec{J}, \vec{\theta} = \frac{\partial S(\vec{q}, \vec{J})}{\partial \vec{J}}$$

sodass in den neuen Koordinaten die Hamiltonsche Funktion nur von \vec{J} abhängt, d.h. dass $S(\vec{q}, \vec{J})$ eine Lösung der

Hamilton-Jakobi-Gleichung:

$$H_0' \left[\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} (\vec{q}, \vec{J}) \right] = H_0(\vec{J})$$

ist. Damit:

$$\dot{\vec{J}} = - \frac{\partial H_0}{\partial \vec{q}} = 0 \quad \rightarrow \text{die } \vec{J} \text{ Koordinaten sind also konstante} \rightarrow \vec{J} = \text{const}$$

$$\dot{\vec{\theta}} = \frac{\partial H_0}{\partial \vec{J}} = \vec{\omega}(\vec{J}) \rightarrow \vec{\theta} = \vec{\omega} \cdot \vec{t} + \vec{\delta} \quad \begin{array}{l} \text{die Winkel arithm.} \\ \text{mit } \vec{J} \text{-Abhängige} \\ \text{frequenzen } \vec{\omega}(\vec{J}). \end{array}$$

* Beispiel

- Ein Beispiel eines integrablen Systems ist der harmonische Oszillator:

$$H_0' = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

- Die Hamilton-Jakobi-Gleichung ist also:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] = H_0(\vec{J}) \rightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2}$$

- Andererseit \vec{J} ist eine Wirkung ($J \Rightarrow \int p ds$)

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq \quad \begin{array}{l} \text{Integral entlang eines Zyklus um } q \\ q: 0 \rightarrow \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{2H_0} \end{array}$$

$$\text{Also: } J = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2} dq = \frac{1}{2\pi\omega} 2H_0 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-y^2} dy$$

$$= \frac{H_0}{\pi\omega} \cdot \pi = \frac{H_0}{\omega} \rightarrow \boxed{H_0(J) = J\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{J} = 0 \Rightarrow J = \text{const} \\ \dot{\theta} = \omega \rightarrow \theta = \omega t + \delta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Aus } \theta = \frac{\partial S}{\partial J} \text{ man bekommt} \\ \text{die angeführte Transformation:} \end{array}$$

$$q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos \theta$$

$$p = -\sqrt{2J\omega} \sin \theta$$

137

$$\begin{aligned} * \text{ Nach einer Re-Skalierung: } & \left\{ \tilde{q} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} q = \sqrt{3} \cos \theta \right\} \\ & \left\{ \tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{2}\omega} = -\sqrt{3} \sin \theta \right\} \end{aligned}$$

* Die Bewegung im Phasoraum findet auf einem Kreis statt.
Wegen der Erhaltung von J wird die Bewegung ^{im Phasoraum} 1D statt 2D.

* In allgemeinen kann es n Bewegungskonstanten (J_1, \dots, J_n) geben und die Bewegung im Phasoraum ($q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$) besteht 2D-dimensional, nur n -dimensional. Im Fall $n=1$, das heißt einer Kreis, in $n=2$ d.h. ein Torus. In allgemeinen in einem n -Torus.

Wir werden nun nur $n=2$ betrachten, d.h. 2 Bewegungskonstanten (J_1, J_2) und 2 Frequenzen ω_1, ω_2 für die 2 Winkelvariablen q_1 und q_2 . Die Bewegung findet also auf einem Torus.

* geschlossene Orbiten finden nur statt, wenn

$$n \cdot 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2\pi \cdot m$$

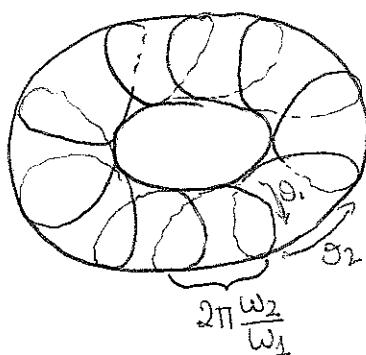
also wenn

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}}$$

$m, n = 1, 2, 3, \dots$

↳ Rationale Frequenzverhältnisse.

- * Für irrationale Verhältnisse wird der Orbit sich nie wiederholen, und die Bewegung ist ergodic ⇒ der gesamte Torus wird ^{berandet} irgendwann,
- * Zählen wir nur was passiert wenn wir hören.



$$\star \text{Sei } H(\vec{J}, \vec{\theta}) = H_0(\vec{J}) + \epsilon H_1(\vec{J}, \vec{\theta})$$

Wir werden nun versuchen diese Hamilton-Funktion zu integrieren, d.h. wir werden nun die entsprechende ^{versuchen} Hamilton-Jakobi-Gleichung zu lösen:

$$H\left[\frac{\partial S}{\partial \theta}, \vec{\theta}\right] = H_0(\vec{J}') \quad \text{wobei } \vec{J}' \text{ neue Bewegungsconstante wären.}$$

Wir schreiben nun die neue kanonische Transformation in der Form:

$$S(\vec{J}', \theta) = \vec{\theta} \cdot \vec{J}' + S_1(\vec{J}', \theta)$$

und wir entwickeln (bis zur Ordnung ϵ) die Hamilton-Jakobi-Gleichung:

$$H_0(\vec{J}') + \epsilon \underbrace{\frac{\partial H_0}{\partial J} \cdot \frac{\partial S_1(\vec{J}', \theta)}{\partial \theta}}_{\substack{\text{aus } \vec{\omega} \\ \rightarrow}} + \epsilon H_1(\vec{J}', \theta) + O(\epsilon^2) = H_0(\vec{J}')$$

$\vec{\omega}$ Das muss Null sein, da die rechte Seite der Gleichung θ -unabhängig ist

$$\rightarrow \vec{\omega} \cdot \frac{\partial S_1(\vec{J}', \theta)}{\partial \theta} = -H_1(\vec{J}', \theta)$$

Da S_1 und H_1 periodische Funktionen von θ , dann können wir für die beiden die entsprechende Founer-Reihe schreiben:

$$\left. \begin{aligned} S_1(\vec{J}', \theta) &= \sum_{R=0}^{\infty} S_{1R}(\vec{J}') e^{iR\cdot\vec{\theta}} \\ H_1(\vec{J}', \theta) &= \sum_{R=0}^{\infty} H_{1,R}(\vec{J}') e^{iR\cdot\vec{\theta}} \end{aligned} \right\} \text{wobei } R = 2\pi(n_1 + n_2) \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Dann } i\vec{\omega} \cdot \vec{R} S_{1R}(\vec{J}') = -H_{1,R}(\vec{J}') \Rightarrow S_{1R}(\vec{J}') = \frac{i H_{1,R}(\vec{J}')}{R \cdot \vec{\omega}(\vec{J}')}$$

und damit:

$$S(\vec{J}', \theta) = \vec{\theta} \cdot \vec{J}' + i\epsilon \sum_{R=0}^{\infty} \frac{H_{1,R}(\vec{J}')}{R \cdot \vec{\omega}(\vec{J}')} e^{iR\cdot\vec{\theta}}$$

* Es ist klar, dass der Nenner (und damit S) divergiert, wenn:

$$\vec{R} \cdot \vec{\omega} = 2\pi(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) = 0 \Rightarrow \text{also wenn } \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$

⇒ Das gestörte System kann mit Hilfe der Störungstheorie nicht integriert werden, wenn das Verhältnis der Frequenzen eine rationale Zahl ist!
Man hat Resonanzen und die sind einfach zu stark.

* Was passiert wenn ein integrables System mit $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ in der Nähe einer irrationalen Zahl gestört wird? Das bringt uns zu dem wichtigen KAM-Theorem. (KAM = Kolmogorov-Arnold-Moser) (39)

* Der KAM-Theorem sagt uns, **groß** formuliert, dass unter sehr allgemeinen Bedingungen für eine kleine Störung ϵ die Mehrheit der Tori der ausgestrittenen Hamilton-Funktion überleben.

Genauer Ausdruck (für $n=2$): Wenn die Jekobi-Matrix $\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \end{vmatrix} \neq 0$,

dann die Ton mit irrationalen Verhältnis w_1/w_2 , solch dass

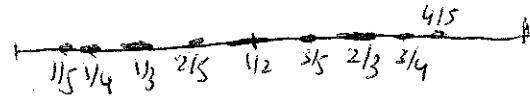
$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{s} \right| > \frac{k(\epsilon)}{S^{1/2}} \quad \begin{bmatrix} k(\epsilon \rightarrow 0) \rightarrow 0 \\ m, s \text{ sind ganzzahlig und teilerfremd} \end{bmatrix} \quad (\text{sei } \omega_1/\omega_2 < 1)$$

sud stabil für eine Störung $\in \mathcal{H}_1$ in dem Limes $\epsilon \ll 1$.

* Also um jeder rationale Zahl m/s gibt es ein Intervall mit Länge $K(c)/s^{1/2}$ wo die obengenannte Bedingung nicht erfüllt wird. Wenn wir alle diese Intervalle addieren, dann die total Länge $\zeta(s)$ erfüllt

$$L < \sum_{S=1}^{\infty} \frac{k(\varepsilon)}{S^{3/2}} S = k(\varepsilon) \underbrace{\sum_{S=1}^{\infty} S}_{\text{const}}^{-3/2} \xrightarrow[k(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ wenn } \varepsilon \rightarrow 0]{} 0$$

Anzahl von
n Werten mit
 $m/S \leq 1$



$M/S \leq 1$
 Das ist genau was wir da oben gesagt haben, die Mehrheit der
 Teilchen bleibt erhalten, wenn $E^{\frac{1}{2}+n}$ Null gilt.

Bei $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ ist $f(x)$ im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ definiert, falls $x \neq x_0$.
 Wenn $f(x) = y$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt, dann ist f in x_0 stetig.

* Aber es sollte auch klar sein, dass μ ein lokales Maximum (um jeder \bar{x}) ist. D.h. dass beliebig nah zu stabilen Ton von Löcher (um jeder \bar{x}) ist. D.h. dass beliebig nah zu stabilen Ton finden wir instabile Ton (wir werden gleich sehen was passiert mit den instabilen Ton). Die Menge der stabilen Ton hat also eine

den Anstalten sei). Es liegt eine fraktale
komische Struktur im Pleasureum, eigentlich eine fraktale
Struktur!! Wir werden nun diese komplexe Struktur untersuchen.

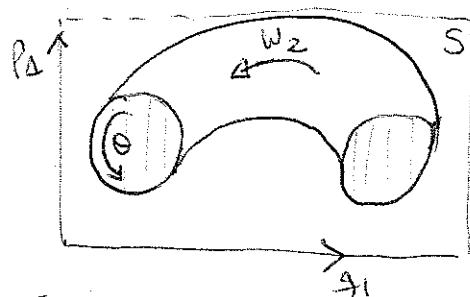
Bewirkung: Natürlich wenn ϱ groß genug ist, dann werden alle Toi gespielt. Der Cette ist der mit $w_1/w_2 = (\sqrt{5}-1)/2 \approx$ der goldene Schnitt!

* INSTABILE TORI: POINCARÉ-BIRKHOFF-THEOREM

* Gucken wir nun, was passiert wenn ω_1/ω_2 irrationell ist. Der Torus ist dann instabil. Wir werden sehen, dass der Torus in kleinere und kleinere Tori zerlegt wird, bis eine ganz komplexe fraktale Struktur auftritt.

(erstens ohne Störung)

* Wir machen nun einen Poincaré-Schnitt des Torus. Wir schneiden den Torus mit einer Ebene S . Wir sind interessiert an dem Punkt nach einer Periode um den Torus ($2\pi/\omega_2$). Das definiert eine Abbildung der Form:



$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (r, \theta) \rightarrow \text{Polar-Koordinaten} \\ \text{des Schnitts} \end{array} \right\}$$

Bemerkung: diese Abbildung ist konservativ, d.h. die Flächen werden gleichfest

* Da $\omega_2 = \frac{\partial H_0(\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2)}{\partial \mathbb{J}_2} \Rightarrow \cancel{\text{Energie}} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = f(\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2)$

und $H_0(\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2) = E$ (konstant) (Energieerhaltung)

dann $\mathbb{J}_2 = \mathbb{J}_2(\mathbb{J}_1) \rightarrow$ aber $\mathbb{J}_1 = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int p_1 d\mathbb{J}_1}_{\text{Fläche des Kreises}} = \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$

Dann $\omega_1/\omega_2 = \alpha(r)$

Und damit wird die Abbildung:

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = r \\ \theta' = \theta + 2\pi \alpha(r) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Twist-Abbildung}} T(S)$$

Wenn $\alpha(r) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{S}$ (rationell) dann $\underbrace{T \cdot T \cdots T}_{(s)} = T^s$ erfüllt:

$$T^s \left(\begin{matrix} r_0 \\ \theta_0 \end{matrix} \right) = \left\{ \begin{array}{l} r_0 \\ \theta_0 + 2\pi \frac{m}{S} S = \theta_0 + 2\pi m \equiv \theta_0 \end{array} \right.$$

Alle Punkte der Kreise sind Fixpunkte von T^s

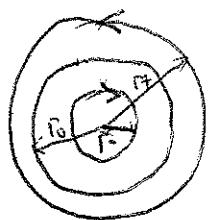
* Gucken wir was passiert wenn es eine Störung ϵH_1 gibt. (41)

Dann wird die Twist-Abbildung auch geändert:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i + \epsilon f(r_i, \theta_i) \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + 2\pi\alpha(r_i) + \epsilon g(r_i, \theta_i) \end{aligned} \quad \left. \right\} = T_\epsilon(r_i) \quad \begin{array}{l} \text{wobei } f \text{ und } g \\ \text{von } H_1 \text{ abhängen} \end{array}$$

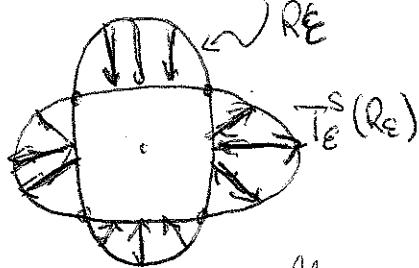
(Bemerkung: wegen des Liouville-Theorems ist T_ϵ auch eine konservative Abbildung)

* Nehmen wir an, dass $\alpha(r)$ eine milde wachsende Funktion wrt r in der Nähe um $r_0 = m/s$ ist. Gucken wir erstmal für $\epsilon = 0$ (keine Störung). Nehmen wir einen Kreis mit Radius $r_+ > r_0$, es ist klar dass T^s die Winkel auf dem Kreis mit Radius r_+ werden nur gegen Uhrzeigersinn gedreht (also θ wächst). Für einen Kreis mit Radius $r_- < r_0$ wird die Drehung Uhrzeigersinn. Natürlich r_0 wird nicht gedreht.



* Wenn ϵ klein ist dann wird diese Überlegung immer noch OK, aber die radiale Koordinate wird von T_ϵ^s auch mitgeändert. Die Punkte von r_+ werden immer noch im gegen Uhrzeigersinn gedreht, und r_- im Uhrzeigersinn.

* Es gibt also eine Kurve R_ϵ mit $r_\epsilon(\theta)$ (also nun kein Kreis mehr) wo es keine Dehnung gibt (die Abbildung bleibt also nur radial) [diese Kurve ist in der Nähe des Kreises mit r_0 aber da $\epsilon \neq 0$ ist die nicht mehr dieser Kreis]

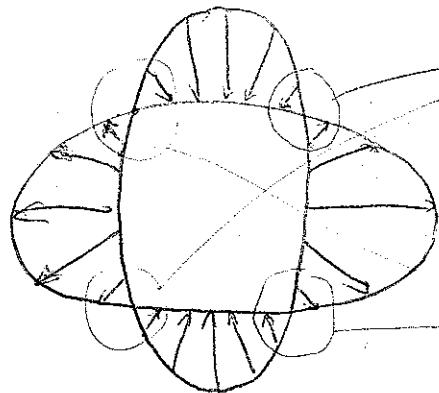


* Die Kurve R_ϵ wird also nur radial mit T_ϵ^s transformiert. Dann kommt man eine Kurve: $R'_\epsilon = T_\epsilon^s(R_\epsilon)$. Diese neue Kurve hat dieselbe Fläche wie R_ϵ , und daher

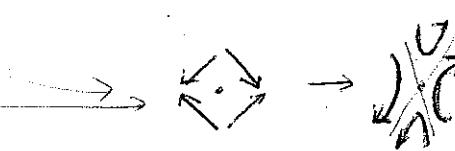
hat man in allgemeinen eine endliche Zahl von Schnittpunkten. Diese Schnittpunkten sind die Fixpunkte von T_ϵ^s !!

* Also statt eines gesamten Kreis von Fixpunkten hat man nur eine diskrete Zahl von Fixpunkten von T_ϵ^s .

* gucken wir nun diese Fixpunkte etwas genauer.



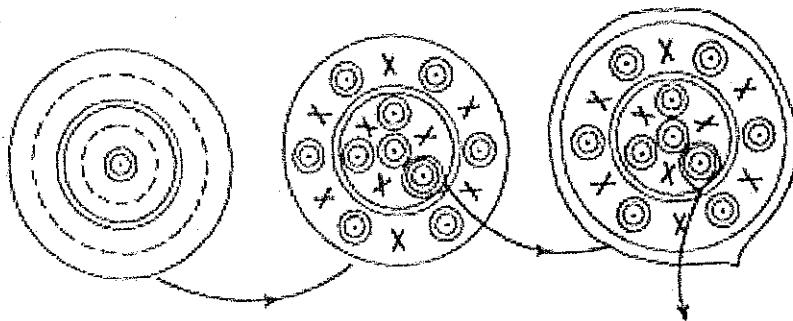
Elliptische Punkte



Hyperbolische Punkte
(Sattelpunkte)

* Die Tori werden also zerstört (die sind keine Fixpunkte mehr), aber die werden durch neue Fixpunkte ersetzt, und zwar mit genau soviel elliptischen wie hyperbolischen Fixpunkten
 \Rightarrow Das ist der sogen. Poincaré-Birkhoff-Theorem

* gucken wir erstmals die elliptischen Punkte. Ganz in der Nähe haben wir noch mal Kreise. Diese sind Poincaré-Schritte um kleinere Tori, und wir können noch mal hier dieselbe Argumente anwenden (also KAM + Poincaré-Birkhoff-Theorem). Die Struktur um elliptischen und hyperbolischen Punkten wiederholt sich, eigentlich ad infinitum!!



Fraktale Struktur

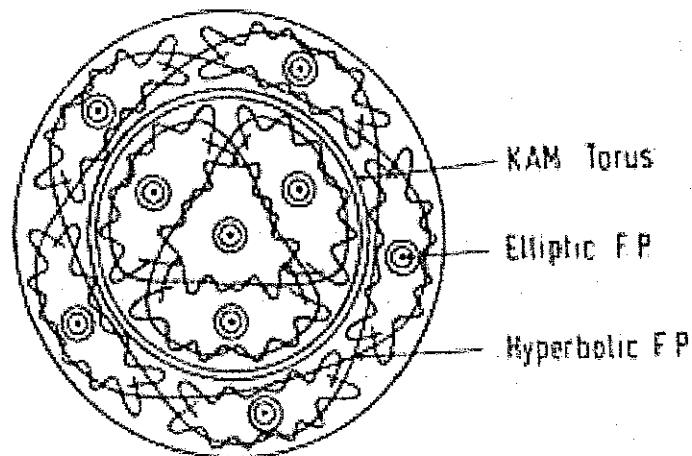


* Die hyperbolischen Punkte bauen eine extrem komplexe Welt von heteroklinen (S. 57), die zu einer chaotischen Bewegung führen (siehe Abbildung auf der nächsten Seite).

* Also, für ein integrables System haben wir reguläre Orbiten (Tori im Phaserraum), mit verschiedenen Anfangsbedingungen \vec{J} und $\vec{\Theta}$ (die Drehzahlung von Θ). Wenn wir nun eine nicht-integrierte Störung über, dann reguläre oder ganz irreguläre (chaotische) Bewegung folgt, und ob ^{die} eine oder die andere folgt hängt sehr sensitiv von Anfangsbedingungen ab.

* Für jedes rationale Frequenzverhältnis muss man eine komplexe Struktur im Phaserraum (wegen der elliptischen Punkten) und im kleinen und kleinen Tori (wegen der hyperbolischen Punkten). Daher eine Änderung der Anfangsbedingungen führt zu einer ganz anderen Dynamik nach einer gewissen Zeit.

Der Phaserraum weist also eine komplexe ^{fraktale} Struktur mit kleinen Toren plus chaotische Bereiche, ganz verschachtelt miteinander! Sowas ist sehr typisch für konservative Systeme, wo ich erinnere, wo kein Attraktor haben können.



Beispiel: HÉNON-HEILES-SYSTEM

* Wir werden nun ein Beispiel untersuchen, wo wir ganz klar sehen können, wie reguläre und irreguläre Dynamik gleichzeitig existieren können.

* Wir werden hier das sogen. Hénon-Heiles-System studieren, das z.B. die Bewegung um Sterne um galaktischen Zentren beschreibt.

Das Hörnig-Heiles-System hat 2 harmonischen Oszillatoren, (somit damit integrale Systeme), die durch nicht-integrierte zufällige Gliedern gekoppelt sind:

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} q_2^2 + [q_1^2 q_2 - \frac{q_1^3}{3}]$$

Von daher ist die Energie E eine Konstante der Bewegung.

Wir können diese ~~Bewegung~~ ganz einfach untersuchen.

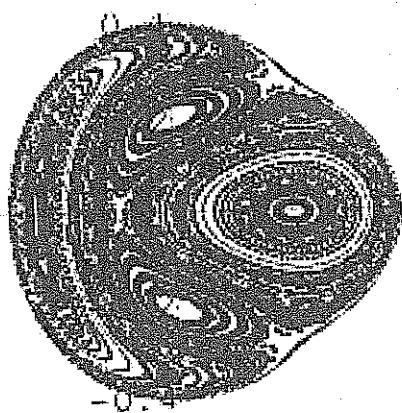
$$p_j = \dot{q}_j \quad (m=1 \text{ hier}), \quad V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} q_2^2 + q_1^2 q_2 - \frac{q_1^3}{3}$$

und die Newton'sche Bewegungsgleichungen sind (mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$)

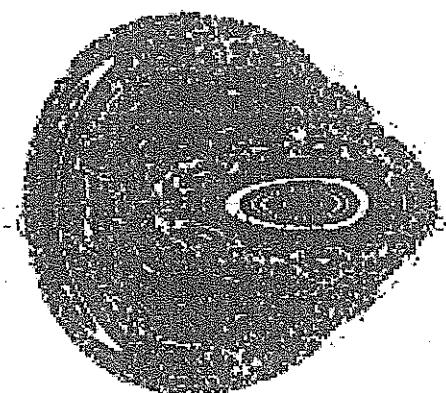
$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -q_1 - 2q_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2 \end{cases} \quad \text{Wir können diese Gleichung für gegebenen Anfangsbedingung z.B. mit Runge-Kutta lösen. Damit bestimmen wir die entsprechenden Bahnen.}$$

Wir werden nun die Poincaré-Schnitte auf der $y-p_y$ -Ebene untersuchen, und zwar für verschiedene E -Werte.

* Gucken wir erstmal die möglichen Energien ($E = 1/12$)



* Gucken wir nun $E = 1/8$



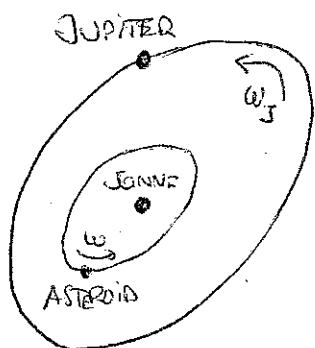
- * Wir sehen 4 Bereiche mit elliptischen Orbits.
- * Im Zentrum dieser Bereiche gibt es einen elliptischen Fixpunkt
- * Die Grenze der Bereiche treffen sich in hyperbolischen Punkten.

* Wir haben immer noch reguläre Inseln aber die Regionen zwischen den Inseln sind nur unregelmäßigen Bahnen gefüllt

* gännen wir nur für $\beta = 1/6$. Nur die chaotische Bahnen füllen fast den gesuchten Phasenraum



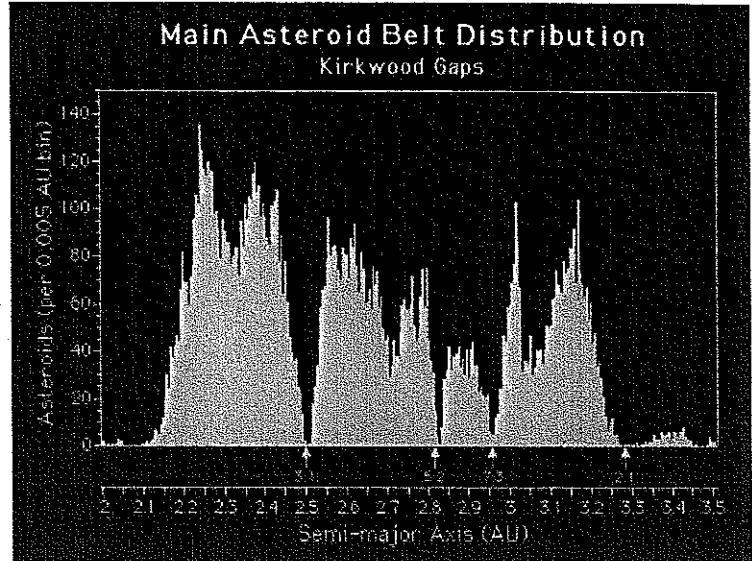
Noch ein Beispiel der wichtigen Rolle der Resonanzen wird um den Satelliten und Asteroiden Bewegung gegeben. Nehmen wir einen Asteroid, der um die Sonne geht. Der Asteroid wird in der Sonne, aber auch von Jupiter gravitativ beeinflusst.



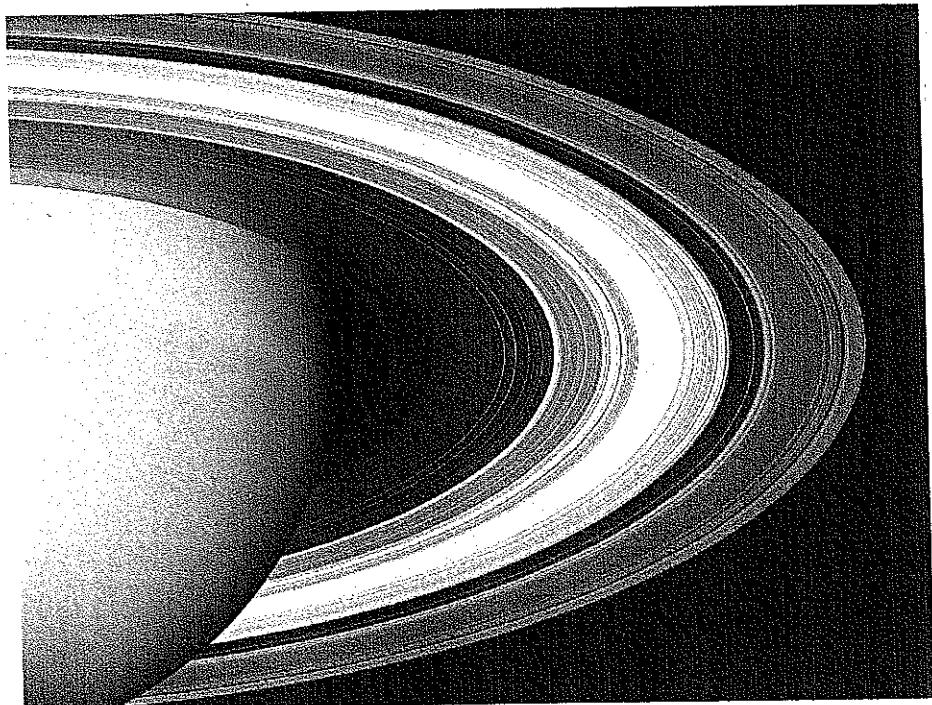
- * Der Asteroid geht um die Sonne mit Frequenz w (ohne Störung von Jupiter) und Jupiter geht um die Sonne mit Frequenz w_J .
- * Die Jupiter-Sonne und Asteroid-Sonne Probleme sind 2-Körper-Probleme, die eigentlich Integrbare sind (ich erinnere euch an den Kepler-Gesetze). Aber wenn man die gravitative Föhlung von Jupiter auf den Asteroid untersucht, dann haben wir ein 3-Körper-Problem und das ist nicht mehr Integrbel!!

Der Einfluss von Jupiter ist natürlich viel kleiner als der der Sonne, aber wenn w/w_J rational ist, dann erwarten wir einen großen Einfluss wegen der Resonanzen. Wir erwarten also, dass für diese Resonanzen chaotische Bewegung auftritt. Daher, erwarten wir Lücken in der Asteroidenverteilung, da die Asteroiden die chaotisch werden, werden ausgeworfen.

* Wir können die Existenz von Lücken (aber auch von regulärer Bewegung als KAM Verkörpert) in der Asteroidenverteilung zwischen Mars und Jupiter beobachten (die sind die sogen. Kirkwood-Wallen):



* Noch ein spektakulärer Beispiel der Kraft der Resonanzen sind die Saturnringe, die viele Lücken aufweisen:



* DIE STANDARD-ABBILDUNG

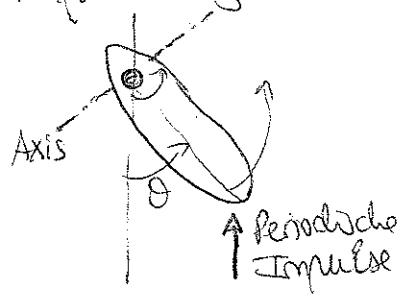
* Geilen wir zum Schluss ein Beispiel um konserniven Abbildung wo nur die Zerstörung der regulären Orbiten ganz klar beschrieben sind.

* Wir untersuchen nun die sogenn. Standard-Abbildung

$$P_{n+1} = P_n + K \sin \Theta_n t$$

$$\Theta_{n+1} = (\Theta_n + P_n) \bmod 2\pi$$

Beweis: diese Abbildung kommt als Folge des sogen. Kicked-Rotor-Problem, In diesem Problem eine Stange wird periodisch impulsiv getrieben:



$$H(P_0, \Theta_0, t) = \frac{P_0^2}{2I} + K \cos \Theta \sum \delta(t - n\tau)$$

Trägheitsmoment
Drehimpuls

Dann, werden die Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{dP_0}{dt} = K \sin \Theta \sum \delta(t - n\tau)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = P_0/I$$

Wir sind an den Werten $P_n = P_0(t = n\tau)$, $\Theta_n = \Theta(n\tau)$. Wenn wir die Hamilton-Gleichungen integrieren, dann

$$P_{n+1} - P_n = K \sin \Theta_n t$$

$$\Theta_{n+1} - \Theta_n = P_0 \tau / I$$

Sei $\tau / I = 1$, dann wir bekommen die Standard-Abbildung.)

* Die Standard-Abbildung kommt also als Folge um einem Hamiltonschen Problem, und ist daher konserniv.

- Wenn $K=0$ (keine Störung): $P_{n+1} = P_n$

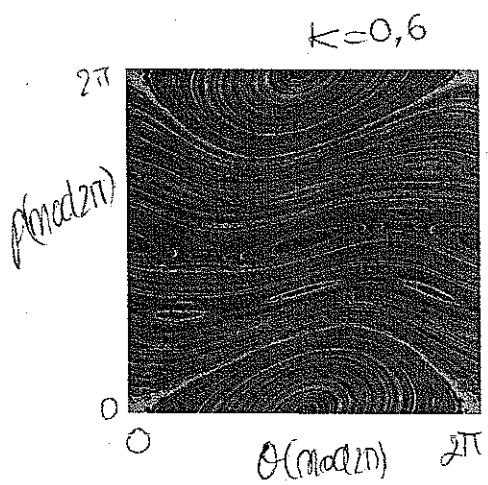
$$\Theta_{n+1} = \Theta_n \bmod 2\pi$$

dann ist die Bewegung integrbale.

* Die integrale Bewegung ist charakteristisch von einem Konstanten $\lambda(48)$, $p=p_0$, und $\Theta_n = (\Theta_0 + n\varphi_0) \bmod 2\pi$. Wenn $\varphi_0/2\pi$ rational ist, dann einer einzigen Orbit fällt die Gerade $p=p_0$. Wenn $\varphi_0/2\pi$ irrational ist dann gibt es nur eine diskrete Anzahl von Punkten auf der Geraden (die spielen hier die Rolle der resonanten Tori)

Wenn $K \neq 0$, dann werden die integralen Orbits gestört

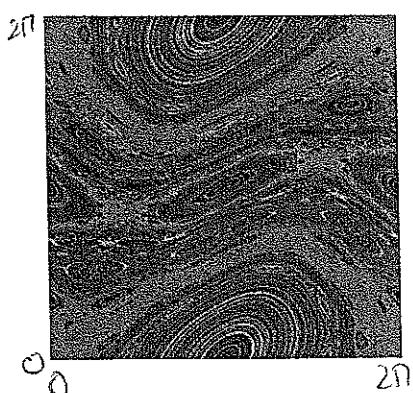
$\text{für } K=0,6$ identifizieren immer noch die KAM-Tori als fast gerad Linien zwischen 0 und 2π . Wir sehen ebenfalls die neuen elliptischen Orbits, die die Störung verursacht hat (die kommen aus resonanten Tori)



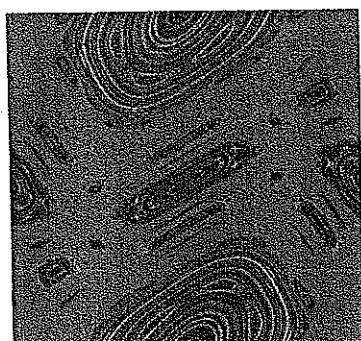
- Wir sehen ganz klar die elliptischen Orbits die aus $(0,p)=(\pi,0)$ und $(0,p)=(\pi,\pi)$ (Orbits von Periode 1) kommen. Wir sehen ebenfalls $(0,\pi)$ und (π,π) (Orbits von Periode 2)
- Nur identifiziert auch andere Orbits mit anderen Perioden, eine Art Insel-Ketten.

* Wenn K willkürlich, dann werden die regulären Bereiche zerstört. Für $K=1$ gibt es keine ursprünglichen Orbit (um 0 bis 2π) mehr, aber man hat immer noch reguläre Bereiche, die für größeres K zerstört werden.

$$K=0,97635$$



$$K=1,2$$



$$K=2,0$$

