

## • Die Lorenz-Gleichungen

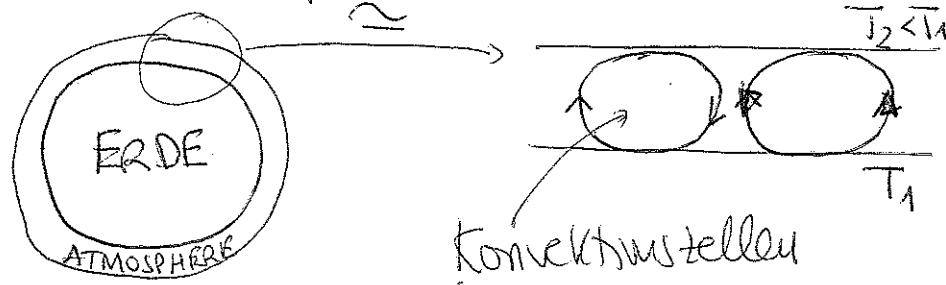
- \* Bisher haben wir nur 1D und 2D Probleme gesehen  
Bemerkung: Ich erinnere euch, dass 1D und 2D betrifft die Dimension des Phasenraumes.
- \* Das Poincaré-Bendixson-Theorem sagt uns, dass es kein Chaos in 2D gibt. Wir sind nun bereit, ein Schritt weiter zu machen. Wir werden nun 3D Probleme untersuchen, wo das Poincaré-Bendixson-Theorem nicht anwendbar ist, und wo Chaos tatsächlich auftreten kann.
- \* Wir werden in dieser Vorlesung wichtige Ideen über Chaos lernen (seltsamer Attraktor, Lyapunov-Exponent) im Rahmen eines Beispiels, nämlich die sogen. Lorenz-Gleichungen, sehen. Diese Gleichungen sehen so aus:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = r x - y - x z \\ \dot{z} = x y - b z \end{array} \right\} \quad \rightarrow \text{das ist jetzt eine } 3D \text{ Problem!} \rightarrow (x, y, z)$$

- \* Diese Gleichungen spielen eine bedeutende historische Rolle in der Chaos-Theorie. Sie waren eine der ersten Systeme wo Chaos untersucht wurde (Lorenz, 1963).
- \* Bevor wir über die Eigenschaften dieser Gleichungen diskutieren, sollten wir erst mal gucken, wo diese Gleichungen eigentlich herkommen, und welche physikalischen Systeme sie beschreiben.

## \* Rayleigh-Bénard-Konvektion

- \* Eigentlich, was heute in 1963 lösen wollte, war ein Modell der Erdatmosphäre.



- \* Die Atmosphäre ist ein extrem komplexes System, das um Flüssigkeitodynamik und Wärmeleitung getrieben wird.

- \* Die Physik der Atmosphäre kann (aber nur teilweise) von einem einfachen Experiment beschrieben werden, das jetzt.

### Rayleigh-Bénard-Experiment

Bei diesem Experiment wird eine dünne, homogene Flüssigkeitsschicht ~~unter~~ von der Unterseite erhitzt, während die Oberseite auf einer niedrigeren Temperatur gehalten wird.

- (Bemerkung: Dazu wirkt hier die Schwerkraft (natürlich nach unten))
- \* Beim Experiment bilden es sich geometrisch strukturierte, vertikal angeordnete Konvektionszellen aus (siehe die Abbildung oben). Warum? Ganz einfach:

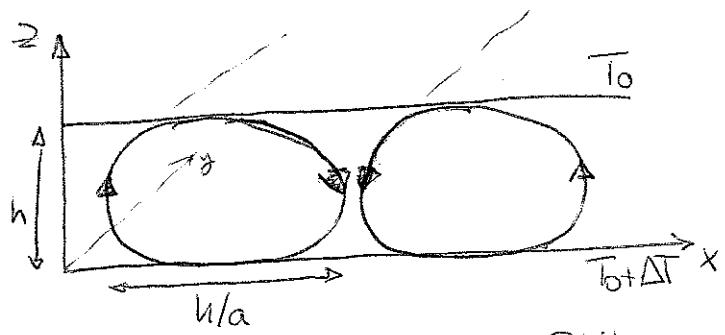
- \* Kalte Flüssigkeiten sind dichter, und daher fallen ~~abwärts~~ in der Schwerkraft, warme Flüssigkeiten sind dagegen leichter.



- \* Wie sich die Flüssigkeit verhältet, ~~hängt~~ hängt viel von der Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_1 - T_2$  ab.

Die Flüssigkeit hat eine gewisse Viskosität, die der Fluss der Flüssigkeit verhindert.

- \* Deswegen, wenn  $\Delta T$  unter eine gewisse Grenze liegt, dann gibt es keine Konvektion (das hat mit dem sogen. Rayleigh-Zahl zu tun, wie wir bald sehen werden).
  - \* Wenn  $\Delta T$  wächst, dann die Flüssigkeit bewegt sich in so einen Konvektionsmuster wie in der Abbildung.
  - \* Aber wenn  $\Delta T$  weiter wächst (größer als eine gewisse 2. Grenze) dann der Konvektionsmuster wird instabil. Die Konvektionsgeschwindigkeit wird größer, das verkleinert die  $\Delta T$  Gradienten, das verkleinert die Flüssigkeitsgeschwindigkeit des Konvektionsrollen, d.h. Alles wird nun unvorhersagbar! Hier ist wo Chaos auftritt! (Die Konvektionsgeschwindigkeit kann jeder das Vorzeichen, d.h. die Richtung, chaotisch ändern!)
- (Bemerkung: für  $\Delta T$  sogar größer, hat man Turbulenz, und die Woraus-gleichungen können das System nicht mehr beschreiben).
- \* gelten nur (nur kurz) was haben die Lösungsgleichungen mit dem Rayleigh-Bénard-Experiment zu tun.



\* Wir betrachten 2 waagrechte aufgedehnte Platten, eine mit  $T = T_0$  (oben) und die andere mit  $T = T_0 + \Delta T$  (unten).

- \* Die Bewegung der Flüssigkeit wird von 3 Gleichungen bestimmt

#### \* Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

↓ Dichte      ↓ Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit      ↓ Schwerkraft  $\vec{F} = \rho g \vec{e}_z$       ↓ Viskosität      ↓ Druck

\* Wärmeleitung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad \rightarrow k = \text{Wärmeleitfähigkeit}$$

\* Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

\* Die Randbedingungen sind  $\begin{cases} T(x, y, 0, +) = T_0 + \Delta T \\ T(x, y, h, t) = T_b \end{cases}$

(Bemerkung: ich erinnere euch dass  $\frac{d}{dt} f = \frac{\partial}{\partial t} f + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f$ )

- \* Nun macht hier 2 Näherungen:
  - \* Keine  $y$ -Abhängigkeit (die Konvektionswellen sind in  $y$  unendlich ausgedehnt)
  - \* Keine  $\Delta T$ -Abhängigkeit der Koeffizienten  
Nur  $\rho = \bar{\rho} (1 - \alpha \Delta T)$  (nicht  $T$ -abhängig)  $\rightarrow$  je größer  $T$  desto kleiner  $\rho$  werden.

Dann  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

Sei  $v_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}; v_z = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \rightarrow$  die Kontinuitätsgleichung wird sofort erfüllt.

- \* Sei  $T(x, z, t) = T_0 + \Delta T - \underbrace{\frac{\Delta T}{h} z}_{\text{lineare Abhängigkeit}} + \underbrace{\Theta(x, z, t)}_{\text{nicht-lineare Abweichungen}}$

\* Nun bekommt schon die Gleichungen:

\* Wärme Gleichung: 
$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + k \nabla^2 \Theta$$

wobei  $\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x}$

und

- Navier-Stokes-Gleichung

(Bemerkung: Eigentlich nimmt man hier die Rotation der Gleichung, welche dass den Druck verschwindet, weil  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} p) = 0$ )

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

wobei  $\nabla^4 \psi = \nabla^2(\nabla^2 \psi)$  und  $\nu = \mu/\rho =$  kinematische Viskosität.

- \* Und nun kommt die (sehr stark) Simplifikation von Lorentz.

Er nahm:

- \* Freie Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \theta(0, 0, t) &= \theta(0, h, t) = \psi(0, 0, t) = \psi(0, h, t) = \\ &= \nabla^2 \psi(0, 0, t) = \nabla^2 \psi(0, h, t) = 0 \end{aligned}$$

- \* Nur die erste Glieder der Fourer-Entwicklung um  $\psi$  und  $\theta$ . Er schlug den folgenden Ansatz vor:

$$\psi = \frac{b(1+\alpha^2)}{\alpha} \sqrt{2} \sum (+) \sin\left(\frac{n\alpha}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$$

$$\theta = \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \left\{ \sqrt{2} \sum (+) \cos\left(\frac{n\alpha}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \right\}$$

- \* Sei  $\tau = \frac{\pi^2}{h^2} (1+\alpha^2) b t \rightarrow$  dimensionlose Zeit

$\sigma \equiv \frac{\nu}{h} \equiv$  so gen. Brandnummer

$$b = 4(1+\alpha^2)^{-1} \quad \left( \text{Q} = \frac{g \alpha}{\nu K} \Delta T h^3 \rightarrow \text{Rayleigh-Zahl} \right)$$

$$r = \frac{Q}{Q_c} \quad \left( Q_c = \text{kritische Rayleigh-Zahl} \right)$$

(Bemerkung: wenn  $r < 1 \rightarrow$  ~~Wärmeleitung~~ durch Wärmeleitung,  $r > 1 \rightarrow$  Wärmeübertragung durch Konvektion)

Dann:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\overline{X}} = -\sigma \overline{X} + \sigma \overline{Y} \\ \dot{\overline{Y}} = -\overline{X}^2 + r \overline{X} - \overline{Y} \\ \dot{\overline{Z}} = \overline{X} \overline{Y} - b \overline{Z} \end{array} \right\} \text{also die Wenz-Gleichungen!}$$

\* Also zusammengefasst:

- \*  $\overline{X}$   $\propto$  Konvektionsgeschwindigkeit  
(kann  $>0$  oder  $<0$ )
- \*  $\overline{Y}$  und  $\overline{Z}$  beschreiben das Verhalten der Temperatur.

- \*  $\sigma$   $\propto$  Viskosität

$r \propto \Delta T \rightarrow \underline{\text{Schlussparameter hier!}}$

$$b = \frac{4}{11a^2} \rightarrow \text{nicht so wichtig.}$$

- \* Was Wenz damals sah, ist dass unter bestimmten Bedingungen das Verhalten des Systems unvorhersehbar wird. Wir werden später sehen, wann das passiert.

- \* Obwohl das Wenz-Modell zu einfache für die Beschreibung der Atmosphäre ~~ist~~ ist, die Tatsache, dass die Dynamik der Atmosphäre chaotisch ist, und daher unvorhersehbar bleibt, <sup>Wetter</sup> ist es so schwierig eine gute Vorhersage ~~ist~~ für Zeiten über 2-3 Tage zu machen.

\* Es gibt andere Systeme, wo die Wenz-Gleichungen auftauchen,

z.B.:

### \* Laserz

\* Unter bestimmten Bedingungen sind die Gleichungen eines Lasers, genauso wie die Wenz-Gleichungen (Haken, 1975)

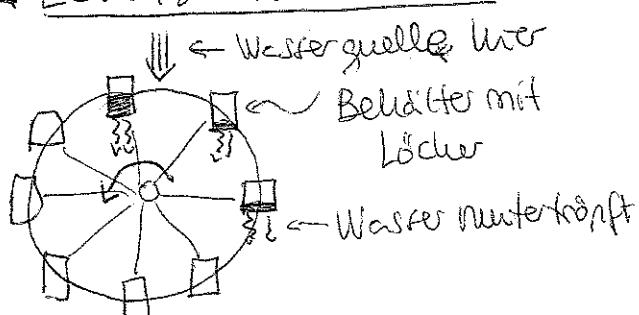
- \* Hier  $x \propto E$  = Amplitude des elektrischen Feldes  
 $y \propto$  Imaginärer Teil der Polarisatorm des Mediums

$z \propto$  Population Inversum

(Bemerkung: in einem 2-Niveau-Modell  $\frac{1}{z}$ , die Population -Inversum ist Population(1) - Population(2))

- \* Für mehr Entzettelheiten sieh z.B. "Elements of quantum optics" P. Meystre und M. Sargent, Springer.

### \* Lorenz-Wasserrad



\* Eine spektakuläre visuelle Demonstration von chaotischer Bewegung wird an der sogenannten Lorenz-Wasserrad gezeigt (Matthus und Howard, 1970)

- \* Hier
  - $x \propto$  Drehgeschwindigkeit des Rades
  - $y \propto$  Horizontale Komponente des Schwerpunktes des Rades
  - $z \propto$  Vertikale Komponente
  - $r \propto$  Wasserfluß der Quelle

Über eine gewisse Grenze ist die Bewegung chaotisch.

- \* Es gibt Videos z.B. in YouTube, guck mal an! Die Drehgeschwindigkeit wird chaotisch!

## \* Eigenschaften der Lorenz-Gleichungen

\* Und nun, zurück an der Lorenz-Gleichungen:

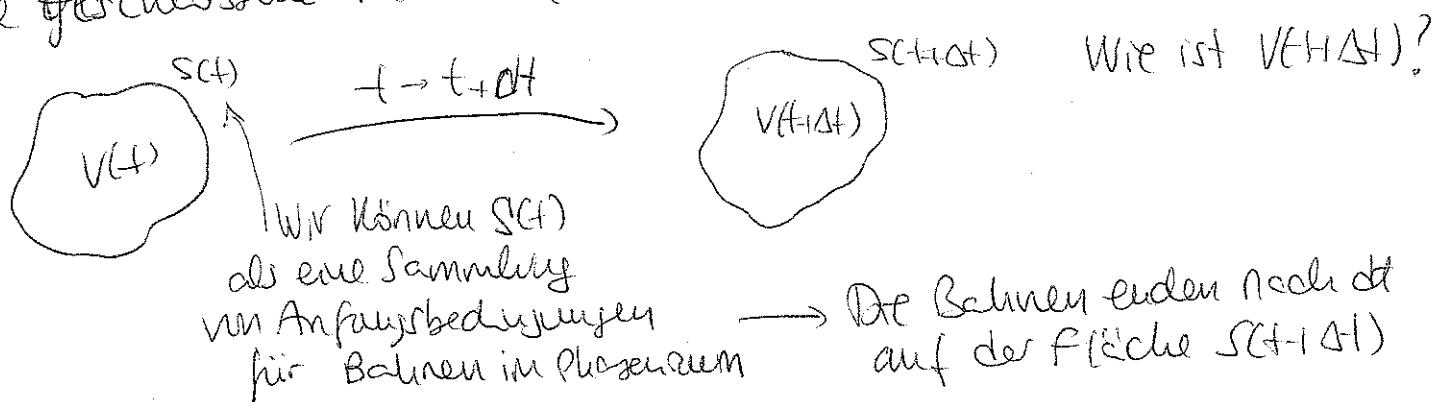
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= r x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma > 0 \rightarrow \text{Prandtl-Nummer} \\ r > 0 \rightarrow \text{Rayleigh-Nummer (normiert zu } R_c \text{)} \\ b > 0 \end{array} \right.$$

\* Die Gleichungen sind ganz klar nicht-lineär ( $\dot{y} \propto xz$ ,  $\dot{z} \propto xy$ ).

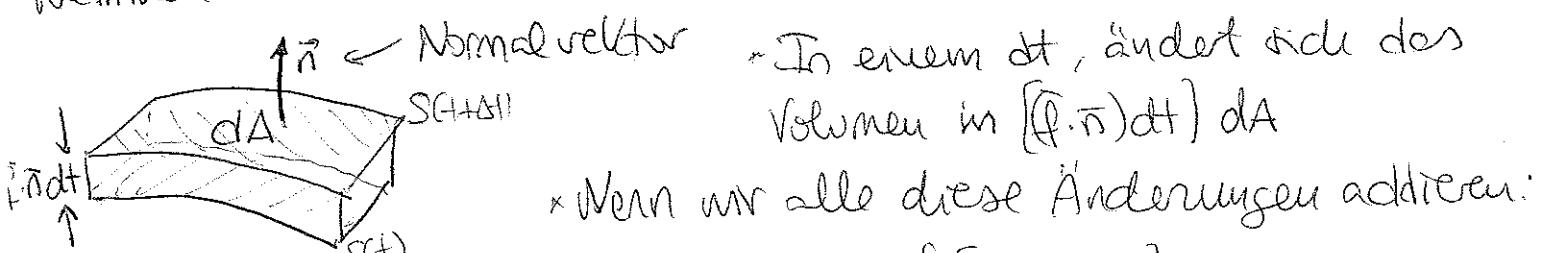
Diese sind ebenfalls symmetrisch: Wenn  $(x(+), y(+), z(+))$  eine Lösung ist, dann  $(-x(+), -y(+), z(+))$  ist auch eine Lösung.

\* Das Lorenz-System ist auch dissipativ, d.h. dass Volumina im Phasoraum mit der Zeit abnehmen.

Gucken wir das. Sei  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$  ein 3D-System. Sei  $S(+)$  eine geschlossene Fläche (um einen Volumen  $V(+)$ )



Nehmen wir eine Stück der Fläche:



$$\rightarrow \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dA = \int_V (\nabla \cdot \vec{f}) dV$$

Gauß-Satz

Wobei  $\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$ . Für das Lorenz-System:

(Q7)

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} [\sigma(y-x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx-y-xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy-bz]$$

$$= -(\sigma+b+1)$$

Dann:  $\frac{dV}{dt} = -(\sigma+b+1) V \rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+b+1)t} V(0)$

Das Phasenraumvolumen nimmt exponentiell mit der Zeit ab!

Alle Bahnen die auf dem Volumen aufgehen enden in ~~unendlich~~  
Null Volumen (also Fixpunkte, Grenzyklen oder, wie vor bald  
sehen werden, seltsame Attraktoren!). Alle Fixpunkte ~~wurde gefunden~~ müssen  
entweder stabil oder sattelartig sein.

\* Fokussieren wir nun die Fixpunkte des Lorenz-Systems.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(y-x) = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{• Ganz klar } \rightarrow (x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0) \text{ ist} \\ \text{ein Fixpunkt immer.} \\ \text{• Nun könnte 2 andere Fixpunkte haben:} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=x \\ (r-1-z)x=0 \rightarrow z=r-1 \\ x^2=bz \rightarrow x^2=b(r-1) \end{array} \right\}$$

$$\text{Also } \left. \begin{array}{l} x^* = y^* = \pm \sqrt{b(r-1)} \\ z^* = r-1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Diese Fixpunkte existieren nur} \\ \text{wenn } r > 1 \end{array}$$

\* Wir werden diese Fixpunkte  $C^+$  und  $C^-$  nennen.

- \* Für das Rayleigh-Bénard-Experimente:  $(0, 0, 0)$  heißt keine Flüssigkeitsbewegung (wie schon erwähnt, wenn  $r < 1$  gibt es keine Konvektion (S. 88));  $C^+$  (gegenuhrräderig) und  $C^-$  (uhrzeigerisch) bedeuten Konvektion mit einer gegebenen Grundrundigkeit.
- \* Wenn  $r \rightarrow 1^+$ ,  $C^+$  und  $C^-$  zerstören sich gegenseitig in einer Pitchfork-Bifurkation (S. 13) ( $C^+$  geht zu  $(0, 0, 0)$ )

\* Gucken wir die (lineare) Stabilität von  $(0,0,0)$ . Wir linearisieren:

$$\begin{cases} \dot{x} \approx \sigma(y-x) \\ \dot{y} \approx rx-y \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 2D \text{ System}$$

$$\dot{z} \approx -bz \implies z \text{ geht zu Null exponentiell}$$

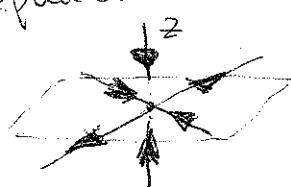
$$\text{Für die Matrix der } XY\text{-Ebene} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma+1)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4r(r-1)}$$

$$\Rightarrow \tau = \lambda_1 + \lambda_2 = -(\sigma+1) < 0$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 = \sigma(1-r)$$

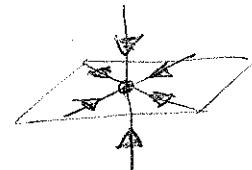
Also:  $r > 1 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$  Schelpunkt  $\rightarrow$  aber nun im 3D?

Es sieht so aus:



\* 2 Richtungen gehen hin und 1 Richtung geht nach außen.

$$\begin{cases} r < 1 \rightarrow \Delta > 0, \tau < 0 \\ \zeta^2 - 4\Delta = (\sigma-1)^2 + 4r(r-1) > 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Stab. Knoten} \\ \text{Stab. Sattelpunkt} \end{array} \right\}$$



(Bemerkung: man kann eigentlich zeigen, dass  $(0,0,0)$  für  $r < 1$  global stabil ist (also, nicht nur linear stabil).)

\* Gucken wir nun die (lineare) Stabilität von  $C^\pm$ .

$$\text{Die Jakobi-Matrix ist } \hat{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-2 & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

$$\text{Für } C^\pm \rightarrow \hat{A}(C^\pm) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte erfüllen:

$$\lambda^3 + (b+\sigma+1)\lambda^2 + b(r+\sigma)\lambda + 2b(r-1)\sigma = 0.$$

Man kann zeigen (versucht es!), dass für  $\tau = \Gamma_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-(b+1)}$

(Bemerkung: hier wird  $\sigma > (b+1)$  verlangt)

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \quad \text{wobei } \omega = \sqrt{b(r-\sigma)}$$

$$\lambda_3 = -(b+\sigma+1) < 0$$

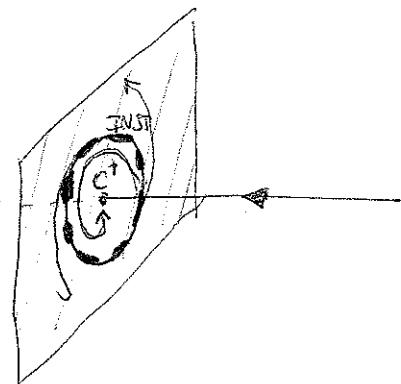
- \* An diesem Punkt hat man eine Hopf-Bifurkation. Die Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$  gehen von  $\alpha < 0$  (stabil) für  $r < r_H$  zu  $\alpha > 0$  (unstabil) für  $r > r_H$  (und natürlich für  $r = r_H, \alpha = 0$ )
- (Bemerkung: Ich erinnere euch an unserer Diskussion um S. 70)

- \* Diese Hopf-Bifurkation ist eigentlich subkritisches (S. 72), d.h. dass für  $r = r_H$  ein instabiler Grenzyklus um die  $C^+$  (oder  $C^-$ ) Lösung schließt, wodurch dass nach  $r_H$  und  $C^\pm$  unstabil

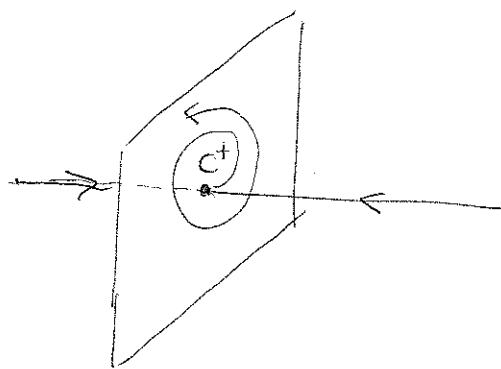


- \* In 3D, das sieht so aus. Für  $r < r_H$

- \* Da eine Richtung stabil ist, ist unser instabiler Grenzyklus eigentlich einer Sattelzyklus

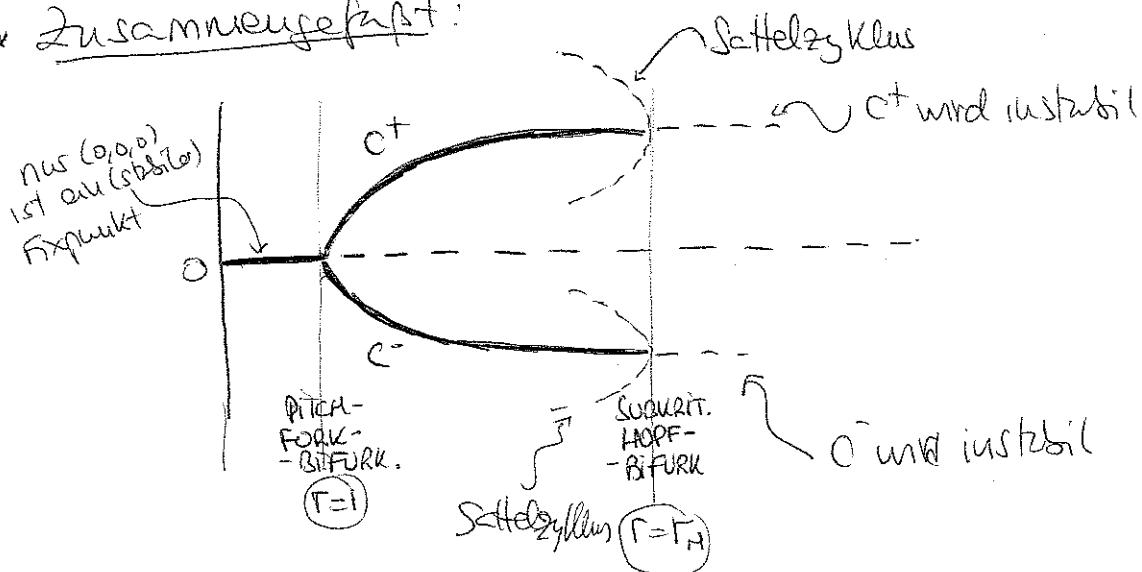


- \* Für  $r > r_H$



- \* Der Fixpunkt "abschreibt" den Grenzyklus und wird damit ein Sattelpunkt

- \* Zusammengefasst:



\* Also, nun die Frage ist: was passt für  $r > r_h$ ?  
Fliegen alle Bahnen bis ins Unendlich? Man kann zeigen, dass das nicht der Fall ist.

Nehmen wir einen Ellipsoid:  $r^2x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2 = C$



Wir wollen zeigen, dass  $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$  für alle  $(x, y, z)$  des Ellipsoids,  
wobei  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ :

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= rx\dot{x} + \sigma y\dot{y} + \sigma(z-2r)\dot{z} \\ &= rx\sigma(y-x) + \sigma y(-y-xz+rx) + \sigma(z-2r)(xy-bz) \\ &= r\sigma xy - r\sigma x^2 - \sigma y^2 - \sigma xyz + \sigma rx y + \sigma xyz - bz^2 - 2\sigma xy + 2\sigma b z^2 \\ &= -\sigma \{ rx^2 + y^2 + bz^2 - 2r bz \} \\ &= -\sigma \{ rx^2 + y^2 + b(z-2r)^2 + 2br(z-2r) \}\end{aligned}$$

Es ist klar dass  $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$  für  $(z-2r) > 0$ . Nun kann man passen  
für  $z-2r < 0$  • Sei  $\xi = 2r-z$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -\sigma \{ rx^2 + y^2 + b\xi^2 - 2br\xi \}$$

Am schlimmsten wäre es wenn  $\xi$  ist am größten, also  $x=y=0$ ,  
und  $\sigma\xi^2 = C \rightarrow \xi = \sqrt{C/\sigma}$ :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -\sigma \left\{ b \frac{C}{\sigma} - 2br\sqrt{\frac{C}{\sigma}} \right\} = -\sigma b \sqrt{\frac{C}{\sigma}} \left\{ \sqrt{\frac{C}{\sigma}} - 2r \right\}$$

Also wenn  $\sqrt{\frac{C}{\sigma}} - 2r > 0 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} < 0$  für alle Punkte des Ellipoids.

Also wenn  $C > 4r^2\sigma$  ~~die~~ die Bahnen fliegen in das Ellipsoid rein und nie raus (weil  $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$  immer).

\* Also, die Bahnen gehen nicht bis ins  $\infty$ , die werden innerhalb eines Ellipsoids gefangen.

Heißt das, das es sowas wie ein stabiler Grenzzyklus gibt? Das ist aber nicht der Fall (wir werden später an diesem Punkt zurückkehren).

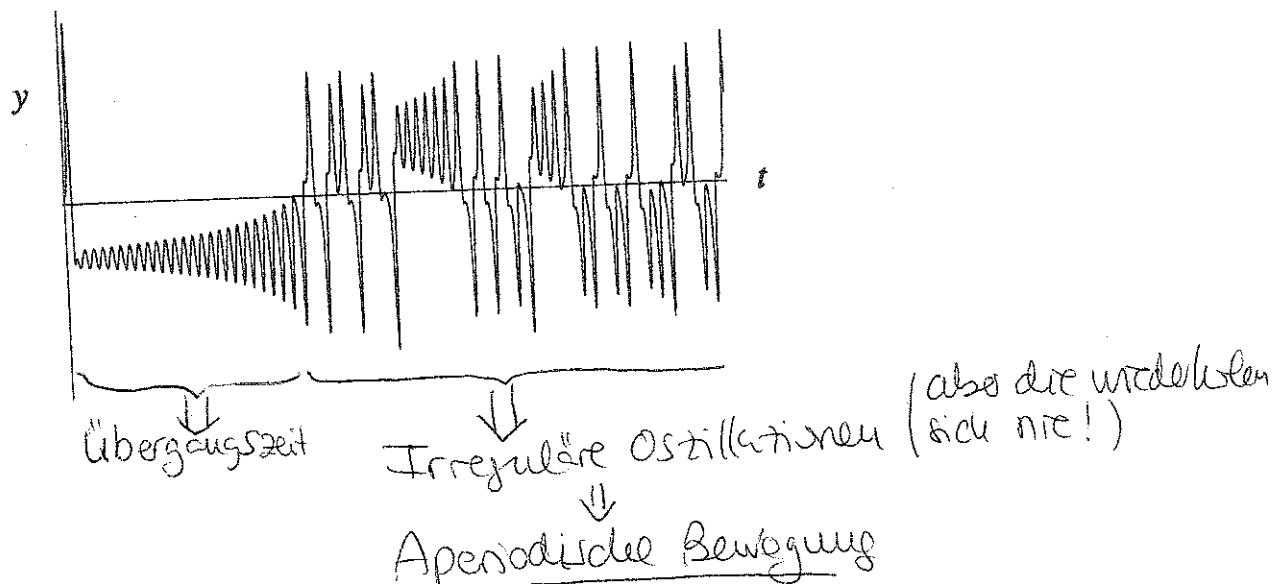
Die Bahnen machen aber etwas ganz Komisches. Sie werden von den instabilen  $O^{\pm}$  abgestoßen, aber die können ~~ausfliegen~~ aus einem Bereich nicht ausfliegen! Irgendeine die schlangendine Ende (und ohne sich zu kreuzen!). Das bringt uns zu der Idee des seltsamen Attraktors.

### \* Der Lorenz-Attraktor

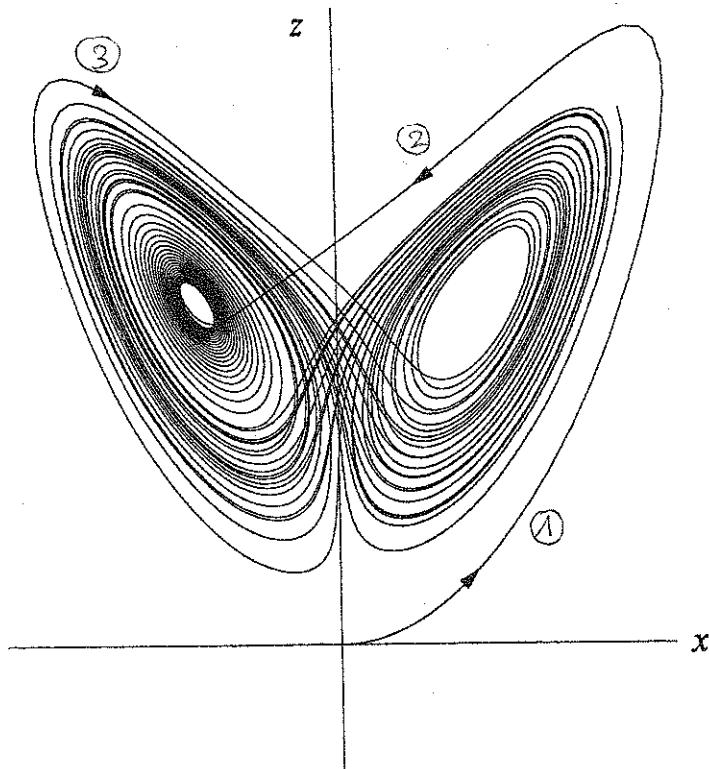
\* Nehmen wir (wie Lorenz damals)  $\sigma = 10$  und  $b = \frac{8}{3}$ .

$$\text{Dann } r_H = \frac{\sigma(\tau+b+3)}{\sigma-(b+1)} \cong 24,74.$$

\* Nehmen wir  $r = 28 > r_H$ . Fangen wir mit  $(0, 1, 0)$  an (also in der Nähe von  $(0, 0, 0)$  (ein Schleppunkt für  $r = 28$ )). Gucken wir, wie  $y(t)$  aussieht ( $x(t)$  wäre ziemlich ähnlich):



\* Lorenz entdeckte, dass die Bahnen im Phasenraum  $(x, y, z)$  eine wunderschöne Struktur bauen. Zum Beispiel, gucken wir ein Graph  $(x(t), z(t))$  für die Beschleunigungen von vorher:



(Bemerkung:

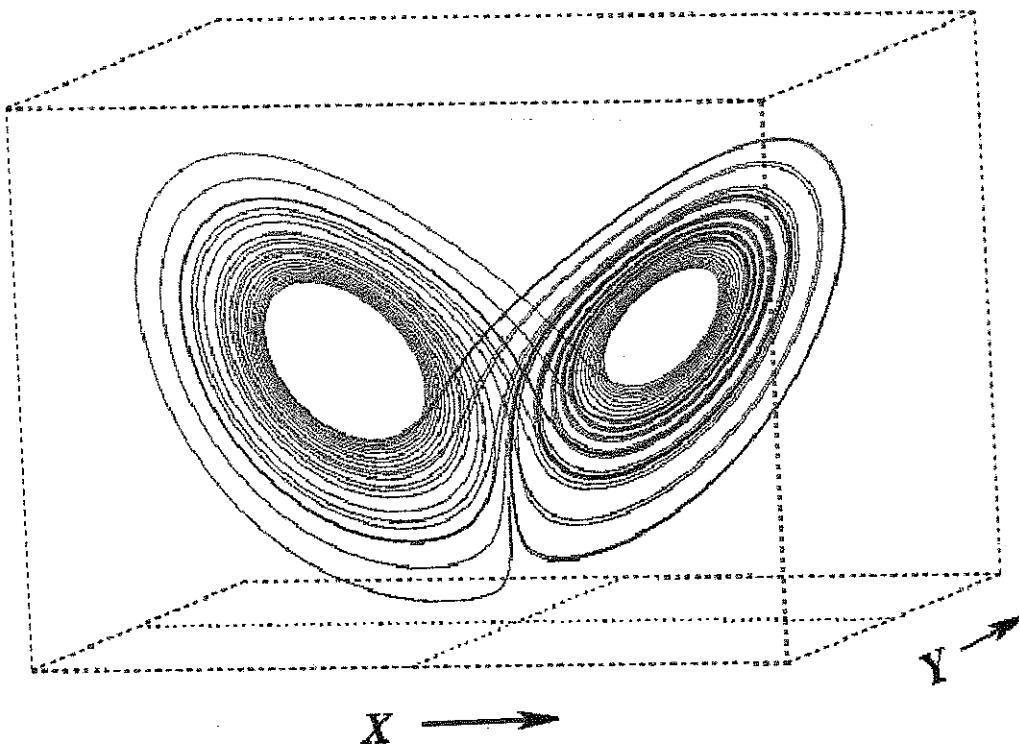
Die Bahnen kreuzen sich nie. In der Abbildung es sieht nur so aus, weil wir ein 3D grafisch auf 2D projizieren.)

Gucken wir die Bahnen genauer:

- ① Die Bahn fängt in der Nähe des  $(0,0,0)$ -Punkts und geht nach Rechts.
- ② Dann geht nach links. Dann folgt eine langsame Spirale nach außen
- ③ Die Bahn fliegt noch mal nach Rechts, wo nochmal eine spirale Bewegung folgt
- ④ Noch mal nach links, noch mal spiralen, noch mal nach Rechts, usw.  $\rightarrow$  aperiodische Bewegung

Die Anzahl von Spiralkreisen ist jedes Mal unvorhersagbar  
(diese Anzahl baut eine wirkliche Sequenz!)

\* In 3D sehen die Bahnen so aus:

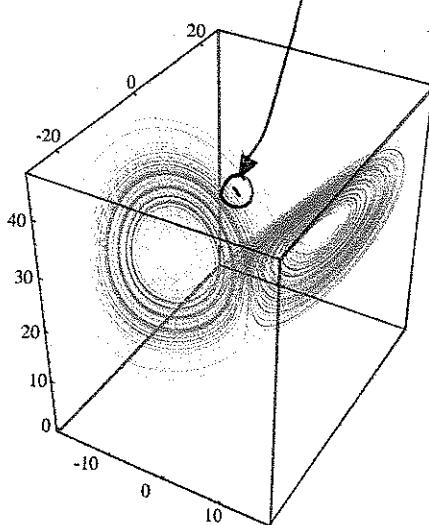


Das ist der sogen. Lorenz-Attraktor, ein Beispiel eines sogen. seltsamen Attraktors. So eine Figur hat eine fraktale Struktur

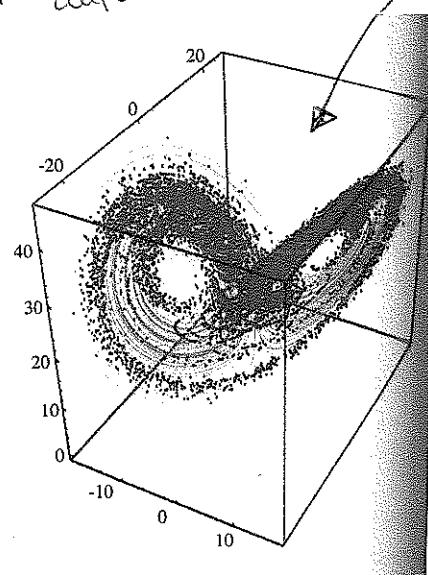
(wir werden später mehr über fraktalen erfahren).  
 (Bemerkung: Ein stabiler Fixpunkt oder Grenzkurve sind Attraktoren. Ein seltsamer Attraktor hat dazu eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen)

\* Empfindlichkeit gegen Anfangsbedingungen

• Eine wichtige Eigenschaft der Lorenz-Gleichungen betrifft die Empfindlichkeit der Lösungen gegen den Anfangsbedingungen. Gucken wir, was passiert mit Bahn mit sehr ähnlichen Anfangsbedingungen.

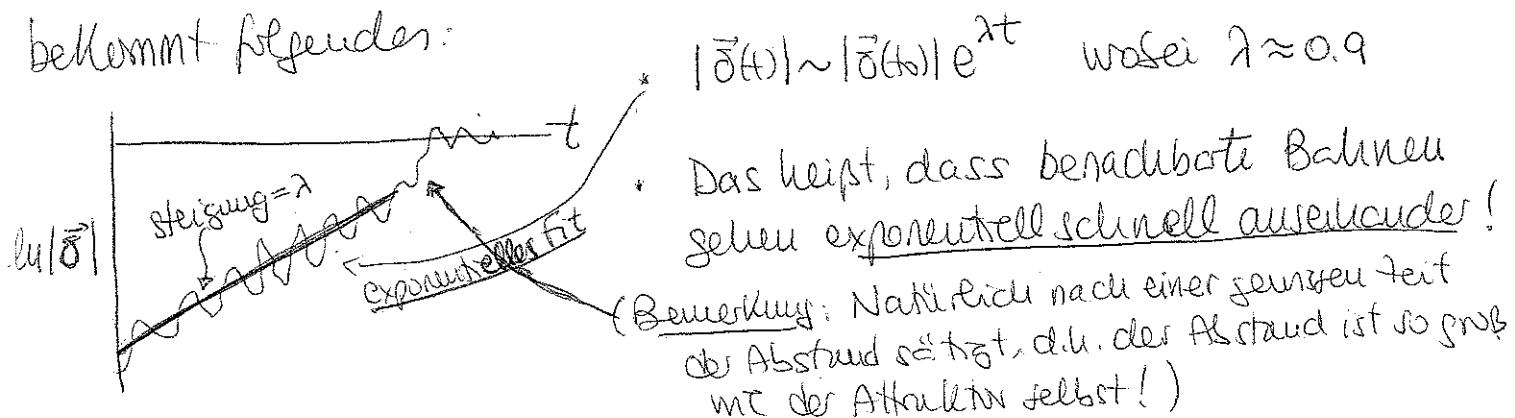


In  $t=0$  fangen die Bahnen hier fast nahezu aufeinander an



In  $t=15$  sind die Endpunkte der Bahnen fast überall auf der Lorenzattraktor gestreut!

- \* Das heisst, dass für diese Systeme unmöglich ist, eine Voraussage jenseits einer relativ kurze Zeit zu machen!
- \* Das ist eine wichtige Idee, die wir ein bisschen genauer gucken werden. Sei  $\tilde{x}(t)$  ein Punkt auf dem Attraktor für eine gewisse Zeit  $t$ . Sei  $\tilde{x}(t) + \tilde{\delta}(t)$  ein Punkt ganz in der Nähe, wo sei für die Anfangszeit  $t_0$ ,  $|\tilde{\delta}(t)|$  sehr klein ist. Die Frage ist, wie  $|\tilde{\delta}(t)|$  mit der Zeit wächst. Man hat das numerisch in dem Lorenz-Modell untersucht, und man bekommt folgendes:



- \* Der Exponent  $\lambda$  ist der sogen. Lyapunow-Exponent.
- Wenn  $\lambda > 0$  (wie fürs Lorenz-Modell für  $r > r_H$ ) dann gibt es ganz klar eine gewisse Zeit  $t_H$ , solch dass für  $t > t_H$  keine gute Voraussage gemacht werden kann. Gucken wir das:
- \* Um eine gute Voraussage zu machen, müssen wir die Anfangsbedingungen gut bestimmen. Aber keine Messung ist perfekt, es gibt immer einen Fehler  $|\tilde{\delta}_0|$  zwischen unserer Messung und die wahre Werte.
  - \* Nach einige Zeit  $t$ ,  $|\tilde{\delta}(t)| \sim |\tilde{\delta}_0| e^{\lambda t}$
  - \* Sei  $a$  eine Messung der Genauigkeit der Voraussage, solch dass ~~die~~ die Voraussage schlecht ist, wenn  $|\tilde{\delta}(t)| \geq a$ . Das passt für eine Zeit:  $t_H \sim \Theta\left[\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a}{|\tilde{\delta}_0|}\right)\right]$

$$* \text{z.B. sei } a = 10^{-3} \text{ und } |\tilde{\delta}_0| = 10^{-7} \rightarrow t_H \sim \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{10^{-3}}{10^{-7}}\right) = \frac{4 \ln 10}{\lambda}$$

Was passiert wenn  $|\tilde{\delta}_0| = 10^{-13}$  (<sup>unserer Messung</sup>  
<sup>an Anfang ist  $10^5$</sup>   
<sup>Meß besser!</sup>)  $\rightarrow t_H \sim \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{10^{-3}}{10^{-13}}\right) = \frac{10 \ln 10}{\lambda}$

Also, wir messen  $10^5$  Mal besser am Anfang, und trotzdem können wir nur 2,5 Mal länger vorhersagen.

- \* Es sollte also klar sein, dass für so ein System keine gute Vorhersage jenseit  $t_0 \sim$  wenige  $\frac{1}{\lambda}$  gemacht werden kann.

(Bemerkung: Obwohl das Lorenz-Modell keine gute Näherung der Atmosphäre ist, ähnliche Gründe erklären warum die Wettervorhersage jenseits einiger Tage so schwer ist.)

- \* Nur haben wir alle die Ingredienten für eine Definition von Chaos

Chaos ist ein aperiodisches Verhalten eines deterministischen Systems,  
das eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen  
aufweist.

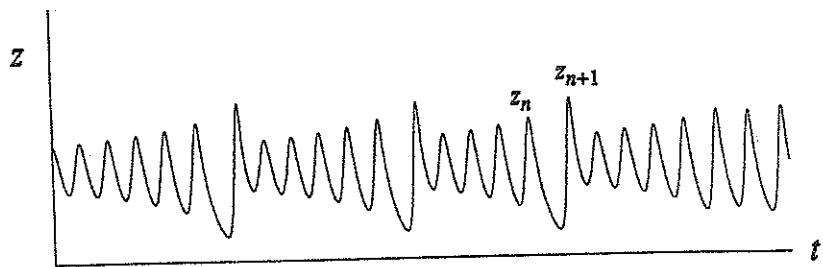
- \* Aperiodisches Verhalten: bedeutet, dass die Bahnen ~~schließen~~ führt  $\rightarrow \infty$  nicht in Fixpunkten oder Grenzyklen hinfallen, und trotzdem ist die Bewegung im Phasenraum begrenzt (S. 95)

\* Deterministisches System heißt, dass das System keine wirkliche oder geräuselige Inputs oder Parameters hat. Das irreguläre Verhalten kommt direkt aus der Nichtlinearität des Systems!

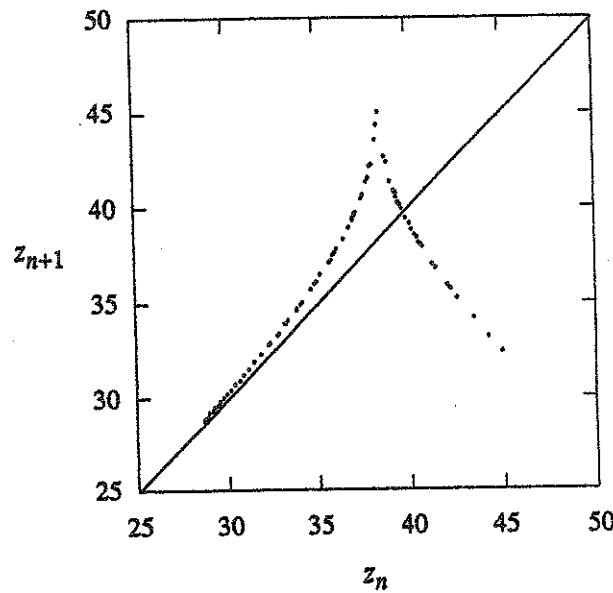
- \* Empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen heißt,  
 dass der Lyapunov-Exponent positiv ist.

(Bemerkung: reine Instabilität ist natürlich kein Chaos, z.B.,  
 $\dot{x} = x \rightarrow x(t) = e^{xt} \rightarrow$  das ist ganz klar exponentiell empfindlich von den Anfangsbedingungen, aber für  $t \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow \infty$ , und das ist keine aperiodische Bewegung ( $x = \infty$  punktiert wie ein Fixpunkt hier).

- \* Die Lorenz-Abbildung und die Absenz von <sup>stabilen</sup> Grenzyklen für  $r > r_0$
- \* Auf S. 96 haben wir (vorläufig) die Existenz von <sup>einem</sup> stabilen Grenzyklus ausgeschlossen. Nun werden wir das beweisen, und zwar mit der Hilfe der sogen. Lorenz-Abbildung
- \* Gucken wir das Verhalten von  $z(t)$  auf dem Attraktor:



- \* Wir werden nun die Höhe eines Maximums als Funktion der Höhe des vorherigen Maximums, also  $z_{n+1}$  ~~als Funktion von  $z_n$~~ . Und wie kommt die große Überraschung,  $z_{n+1}$  ist fast perfekt eine Funktion von  $z_n$ , also  $z_{n+1} = f(z_n)$ .
- \* Diese Funktion ist die offen. Lorenz-Abbildung
- \* Die Lorenz-Abbildung erfüllt die Eigenschaft  $|f'(z)| > 1$  ('heißt Ableitung')  
Das ist entscheidend, zu beweisen dass es keinen stabilen Grenzyklus gibt.



- \* Gucken wir nunum.
- Nehmen wir an, dass es eine geschlossene Bahn gibt. Diese Bahn wird eine Reihe  $\{z_n\}$  von Maxima von  $z(t)$  geben, soldi dass  $z_{n+p} = z_n$  (für irgendeudliche  $p \geq 1$ , da die Bahn geschlossen ist).
- Wir untersuchen nun die Stabilität der Bahn. Wir machen eine Kleine Abweichung  $\eta_n$ , wenn  $|\eta_{n+p}| > |\eta_n|$  dann die Bahn

ist instabil. Gucken wir das:

$$\eta_{n+1} \approx f'(z_n) \eta_n$$

[Bemerkung:  $\mathbb{Z}_{n+1} + \eta_{n+1} = f(z_n + \eta_n) \approx f(z_n) + \eta_n f'(z_n)$   
 $= \mathbb{Z}_n + \eta_n f'(z_n)$ ]

Nach 2 Iterationen

$$\eta_{n+2} \approx f'(z_{n+1}) \eta_{n+1} = f'(\mathbb{Z}_{n+1}) f'(z_n) \eta_n$$

Nach  $p$  Iterationen

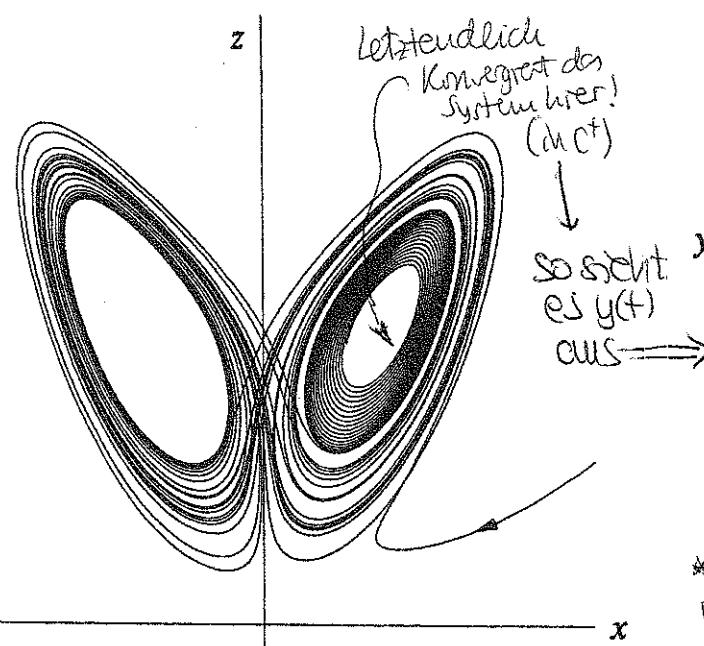
$$\eta_{n+p} \approx \left[ \prod_{k=0}^{p-1} f'(z_{n+k}) \right] \eta_n$$

$$\text{Da } |f'(z)| > 1 \text{ für alle } z \rightarrow \prod_{k=0}^{p-1} f'(z_{n+k}) > 1 \rightarrow |\eta_{n+p}| > |\eta_n|$$

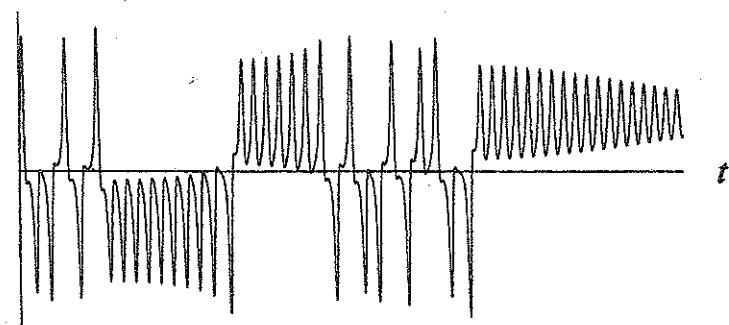
\* Also es gibt keine geschlossene stabile Bahn, wie wir weiter angenommen haben.

### \* Transient Chaos

\* Wenn wir weitere Parameter der Lorenz-Gleichungen ändern, sollten wir erwähnen, dass die Dynamik des Lorenz-Modells extrem reich ist, und dass viele andere Bahnen möglich sind (bisher haben wir nur  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$  und  $r = 28$ ). Gucken wir z.B. was passiert wenn  $b = 2.1$  (also  $r < r_u$ ) → Im Prinzip war erwartet dass für  $t \rightarrow \infty$  das System entweder in  $C^+$  oder  $C^-$  konvergiert. Aber wie das System konvergiert ist nicht ganz uninteressant! Am Anfang sieht es wie der seltsame Attraktor, aber dann konvergiert das System doch in  $C^+$  (für andere Anfangsbedingungen würde das System in  $C^-$  konvergiern). Das nennt man Transient Chaos.



Aber das ist keines echten Chaos, weil für  $t \rightarrow \infty$  das System auf einem Fixpunkt konvergiert. Das System ist aber doch empfindlich gegen den Anfangsbedingungen!



\* Wel mehr ist möglich mit den Lorenz-Gleichungen.  
 Versuch es mal!