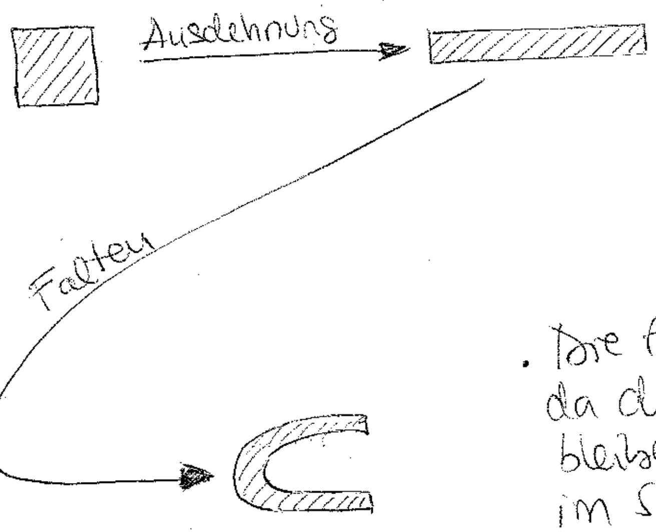
• Seltsame Attraktoren

• In unserer Diskussion der chaotischen Systeme haben wir schon mehrmals die wichtige Idee von seltsamen Attraktor getroffen, z.B. der Lorenz-Attraktor (S. 58) oder der Rössler-Attraktor (S. 114). Diese Formen sind wirklich bemerkenswert. Die Bahnen auf dem seltsamen Attraktor sind zwar in einem Bereich gefangen, die divergieren aber exponentiell voneinander!

• Wie ist das überhaupt möglich? Wir werden das hier im Rahmen von einfachen Beispiele untersuchen.

Die wichtigste Idee ist die wiederholte Anwendung von Ausdehnung und Falten. Gucken wir es.

• Nehmen wir einen Würfel im Variablenraum. Wir werden diesen Würfel als den Teig eines Bäckers behandeln.

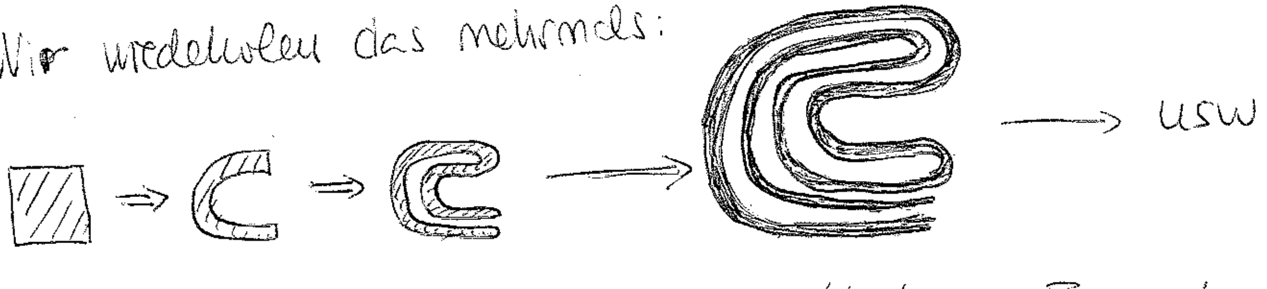


• Der Teig wird in einer Richtung komprimiert (das hat mit der Dissipation in dem System zu tun)

• Der Teig wird in einer Richtung ausgedehnt (das führt zu einer empfindlichen Abhängigkeit von Anfangsbedingungen!)

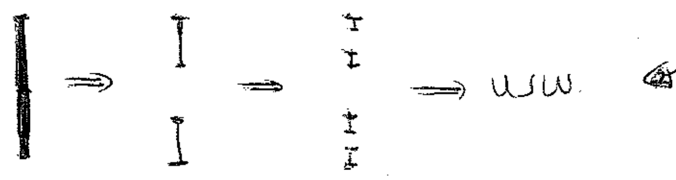
• Die Ausdehnung darf nicht beliebig sein, da die Bahnen innerhalb eines Bereiches bleiben müssen. Hier kommt das Falten im Spiel

• Wir wiederholen das mehrmals:



Es ist ziemlich klar das so was erfüllt die 2 Eigenschaften eines seltsamen Attraktors: gefangene Bahnen und empfindliche Abhängigkeit von Anfangsbedingungen.

* Machen wir einen Schnitt (entlang die y-Richtung) in der Mitte des Teiges:



Wir bekommen hier die Cantor-Menge !!

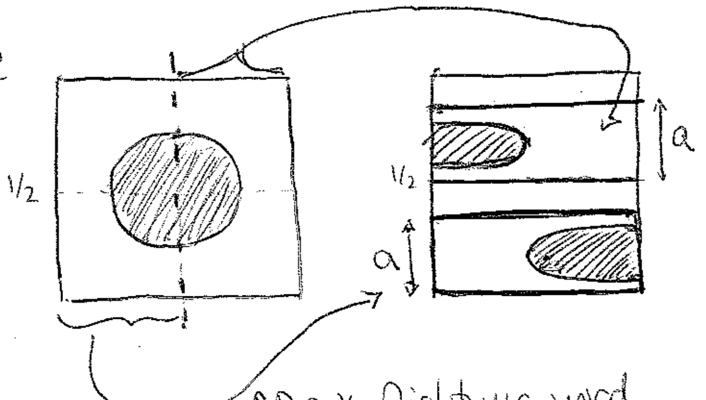
* Die fraktale Struktur des Attraktors kommt also als Folge einer wiederholten Anwendung von Ausdehnung und Falten.

* BEISPIEL: DIE BÄCKER-ABBILDUNG

* Die Bäcker-Abbildung ist eine 2D-Abbildung der Form:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, a y_n) & \text{für } 0 \leq x_n < 1/2 \\ (2x_n - 1, a y_n + 1/2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \qquad \text{wobei } 0 \leq a \leq 1/2$$

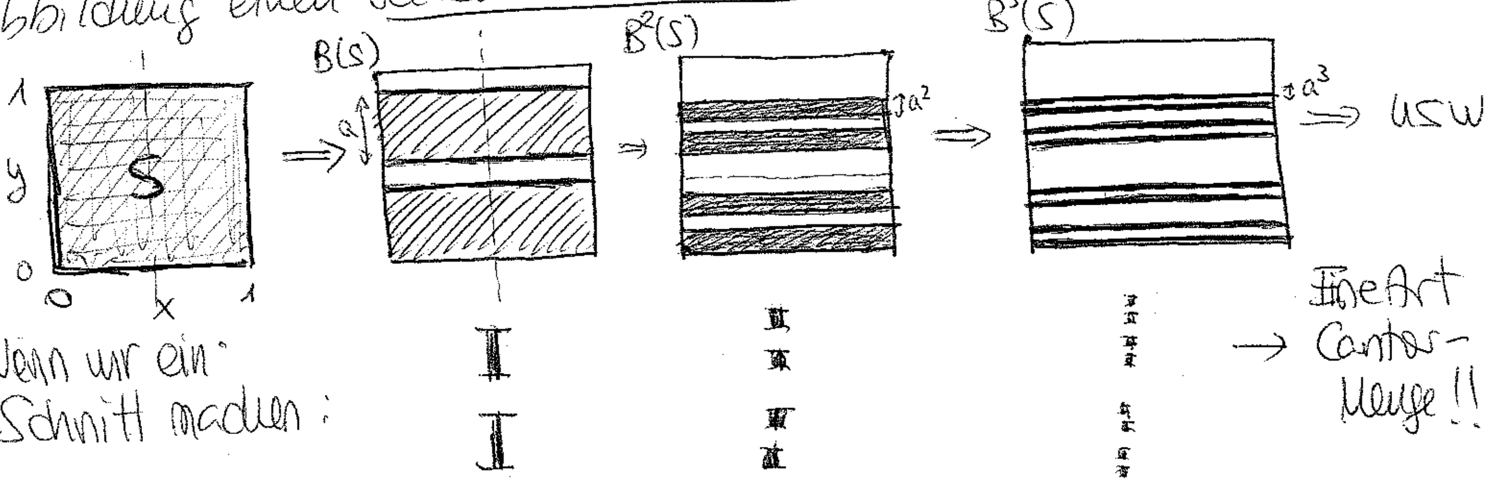
* Nehmen wir eine Viereck (mit Seite 1) ~~und~~ mit einem Kreis in der Mitte



Die x-Richtung wird ausgedehnt (×2) und die y-Richtung wird gequetscht (×a)

* Wegen der Ausdehnung in der x-Richtung weisst die Bäcker-Abbildung eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

* Es ist ganz einfach zu sehen dass für $a < 1/2$ die Bäcker Abbildung einen seltsamen Attraktor hat



Wenn wir ein Schnitt machen:

→ Eine Art Cantor-Menge!!

* $B^\infty(S)$ baut also einen seltsamen-Attraktor, eine Art Cantor-Menge von Geraden.

Suchen wir nach der Box-Dimension für diesen seltsamen Attraktor.

$B^\infty(S)$ wird von allen $B^n(S)$ überdeckt. $B^n(S)$ hat 2^n Streifen mit Breite a^n und Länge 1.

Wir benutzen also kleine Vierecken mit Seitenlänge $\epsilon = a^n$. Da die Länge einer Streife ist 1, wir brauchen also a^{-n} Vierecken pro Streife, und daher $2^n a^{-n}$ Vierecken insgesamt für $B^n(S)$.

Dann $$d = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{2}{a}\right)^n\right)}{\ln\left(\frac{1}{a^n}\right)} = \frac{\ln a - \ln 2}{\ln a} = 1 + \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln a}$$

Da $a \leq 1/2 \to 1 < d \leq 2$, nur für $a = 1/2 \to d = 2$

Das macht intuitive Sinn, da je großer ist a, desto mehr Fläche von dem ursprünglichen S transformiert wird.

* Für $a < 1/2 \Rightarrow$ Fläche$[B(S)]$ < Fläche$[S]$ (das sollte intuitiv klar sein!)

Das deut an, dass die Abbildung dissipativ ist.

(Bemerkung: die Kontraktion der Fläche spielt hier eine ähnliche Rolle wie die Kontraktion des Volumens für die Lorenz-Gleichungen (S. 92)).

Wie für die Lorenz-gleichung das hat auch Folgen für die Bäcker-Abbildung. Der Attraktor hat Fläche Null. Die Bäcker-Abbildung hat auch keine abstossende Fixpunkte.

* Für $a = 1/2$ ist die Lage ganz anders: Fläche$[B(S)]$ = Fläche$[S]$.

Die Abbildung erhaltet die Fläche, und die Dynamik, die auch chaotisch sein kann, geht nun nicht mehr in einem Attraktor!

* Wir werden später die Dynamik in Konservativen Systemen untersuchen (im Rahmen von Hamiltonischen Systeme der klassischen Mechanik).

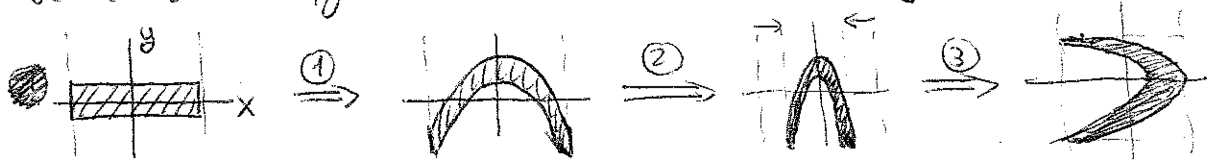
* HÉNON-ABBILDUNG

* Die Hénon-Abbildung ist noch eine 2D Abbildung mit einem seltsamen Attraktor. Diese Abbildung erlaubt uns eine einfache Analyse der fraktalen Natur der seltsamen Attraktoren (wie z.B. der Lorenz-Attraktor).

* Die Hénon-Abbildung ist dieser Form:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - a x_n^2$$
$$y_{n+1} = b x_n$$

Diese Abbildung ist die Zusammensetzung von 3 Schritte



① : $x' = x$, $y' = y + 1 - ax^2$ → Parabolisches Falten

② : $x'' = bx'$, $y'' = y'$ $(-1 < b < 1)$ → Weiteres Falten

③ : $x''' = y''$, $y''' = x''$ → Drehung (45°)

* Die Hénon-Abbildung erfüllt einige Eigenschaften, die auch das Lorenz-System erfüllt, und daher ist die Hénon-Abbildung eine einfache Weise, um die Kerneigenschaften des Lorenz-Systems (und oder ähnliche Systeme) zu untersuchen. Quellen wir diese Eigenschaften:

• (i) Die Hénon-Abbildung ist umkehrbar:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{b} y_{n+1} \\ y_n &= x_{n+1} - 1 + \frac{a}{b^2} y_{n+1}^2 \end{aligned}\right\}$$ d.h. für jede (x_{n+1}, y_{n+1}) gibt es nur ein (x_n, y_n)

(Bemerkung: Das war anders für die Logistische Abbildung; (S. 105) wo für jede (x_{n+1}, y_{n+1}) (außer das Maximum) gibt es immer 2 mögliche (x_n, y_n).)

· Diese Eigenschaft taucht auch (in einer kontinuierlichen Form) in das Lorenz-System, wo es immer eine einzige Bahn durch alle Punkte gibt.

· (ii) Die Hénon-Abbildung ist dissipativ (wie das Lorenz-System).

· Für eine gegebene Abbildung $T(x,y)$, eine infinitesimale Fläche $dxdy$ wird nach der Abbildung $|\det J(x,y)|\,dx\,dy$, wobei $J \equiv \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix}$ $\left[\text{wenn } T(x,y) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{array} \right\}\right]$ die Jakobi-Matrix der Abbildung ist.

· Wenn $|\det J(x,y)|$ wird die neue Fläche kleiner, d.h. die Abbildung ist dissipative.

· Für die Hénon-Abbildung: $J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det J = -b$

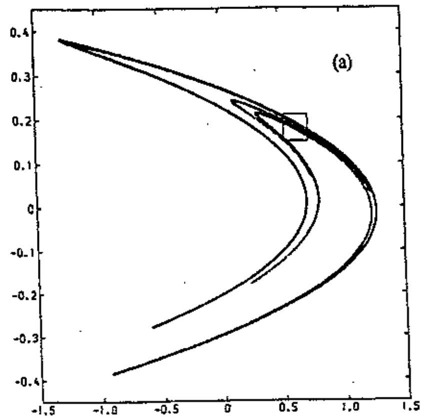
$\rightarrow |\det J| = |b| < 1 \longrightarrow$ die Fläche nach jeder Abbildung wird ein Faktor $|b|$ kleiner.

· (iii) Für bestimmte Parametern a und b werden die Bahnen in einem Bereich von (x,y) Werten gefangen. Wie für das Lorenz-System liegt der seltsame Attraktor auf diesem Bereich.

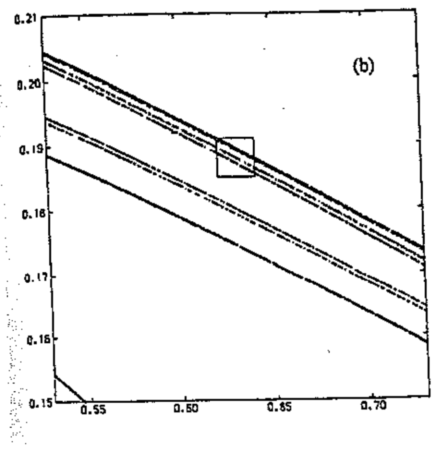
(Bemerkung: eigentlich für das Lorenz-System liegen die Bahnen immer in einem geschlossenen Bereich, und nicht nur für besondere Werten der Parameter.)

Wir werden $a = 1.4$ und $b = 0.3$ nehmen (wie M. Hénon in 1976). Wenn man so macht, dann wird die Abbildung nach mehreren Iterationen einen seltsamen Attraktor bauen, die die erste Visualizierung der fraktale Struktur 1976 erlaubt hat.

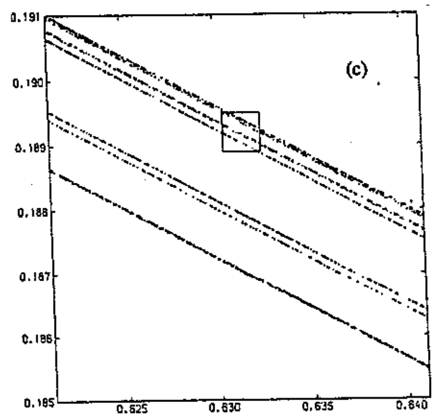
* Der seltsame Attraktor (Hénon-Attraktor) sieht so aus:



: Wir werden nur ein Zoom machen



und noch ein Zoom ⟹



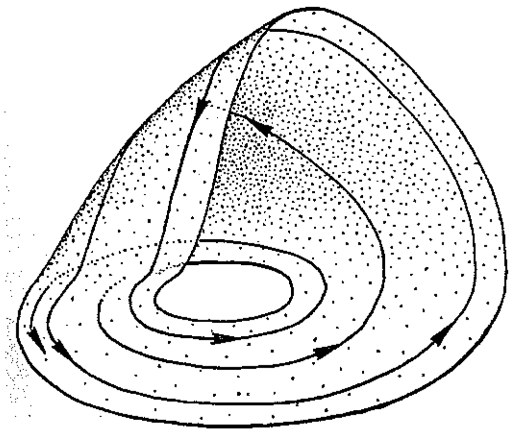
Man hat also:

* Eine feine Struktur für alle Skalen (weitere Zooms ergeben das gleiche)
* Eine klare Selbstähnlichkeit!

Man sieht also klar, dass der Hénon-Attraktor eine fraktale Natur aufweisst.

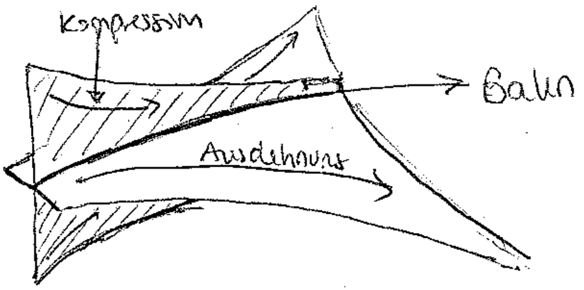
Die einfache Hénon-Abbildung zeigt also klar, dass die wiederholte Anwendung von Ausdehnung und Falten hinter die wunderschöne fraktale Natur der seltsamen Attraktoren steht (auch für den Fall von viel komplizierteren Systemen, wie das Lorenz-System oder das Rössler-System.).

· Dieser Zwischenspiel zwischen Ausdehnung (und daher empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen) und Falten (und daher gefangene Bahnen) ist klar wenn wir den Rössler-Attraktor genau untersuchen

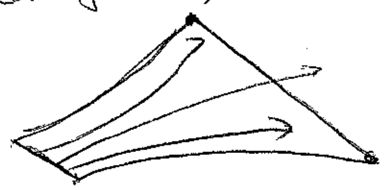


* Benachbarte Bahnen trennen sich voneinander wegen der auswärtigen Spirale (Ausdehnung)
· Die Bahnen gehen in die 3. Dimension, die kehren um, und die ~~[illegible]~~ kommen ~~[illegible]~~ die Spirale wieder (Falten)
* Wir sehen ganz klar das für kontinuierliche Bahnen gibt es kein Falten (und daher kein Chaos) wenn es keine 3. Dimension gibt.

Nehmen wir nun eine Bahn auf der Attraktor. In einer Richtung gibt s Komprimierung, während in der anderen Richtung gibt es Ausdehnung.

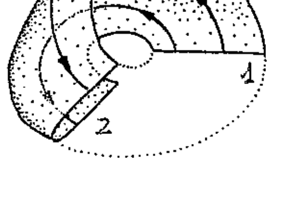


* Nehmen wir die empfindliche (divergente) Schicht:

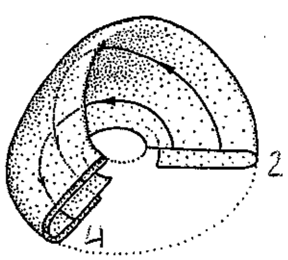


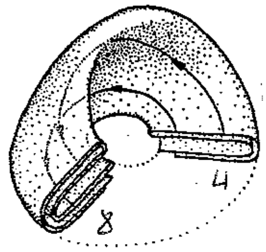
· Der Fluss in dem Attraktor faltet die breite Kante dieser Schicht und faltet noch mal wie in der Abbildung

· Also nach einem Umkreis die ursprüngliche Schicht ist nun in 2 Schichten umgewandelt



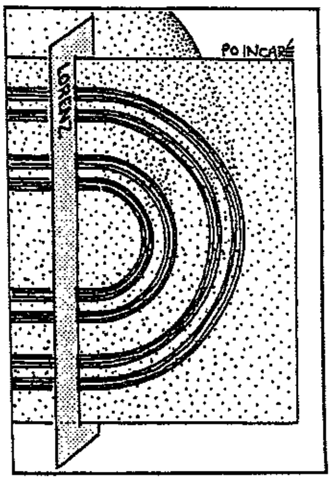
* Nach 2 Umkreise die 2 Schichten werden 4, und dann die 4 werden 8, usw:





Das sieht also noch mal wie ein Teig! (S. 125)

Wenn wir nun den Rössler-Attraktor mit einer Ebene schneiden, dann kriegen wir den sogen. <u>Poincaré-Schnitt</u>.



- Der Poincaré-Schnitt zeigt eine Schachtelung von Flächen (von Kurven in dem Schnitt). Man hat also eine Art Cantor-Menge von Flächen

* Wenn wir nun ein 1D Schnitt der Poincaré-Schnitt nehmen (Lorenz-Schnitt), dann bekommen wir eine Cantor-Menge.

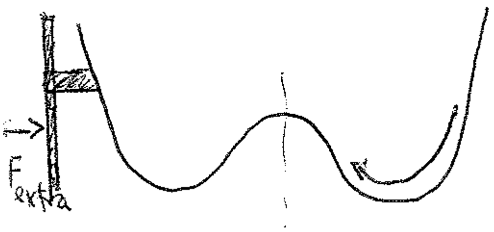
- Die spezielle Eigenschaften des Rössler- (oder Lorenz-) Attraktors sind also mit dieser <u>Cantor-artige Schachtelung</u> verknüpft, die die Ausdehnung + Falten verursachen.

- Bisher war unsere Diskussion eher mathematisch. Wir werden nun sehen, dass seltsamen Attraktoren in echten physikalischen Systemen auftauchen kann. Suchen wir ein Beispiel.

* BEISPIEL: GETRIEBENE DOPPELMULDE-POTENTIAL

(Beispiel eines chaotischen Systems mit seltsamen Attraktor in der Klass. Mechanik)

* Wir werden nun untersuchen, wie ein Teilchen sich in einem doppelmuldigen Potential sich bewegt. Wir nehmen an, dass das Teilchen eine gewisse Reibung erfährt, und dass das Potential periodisch getrieben ist (es gibt eine extra zeitabhängige Kraft $F\cos\omega t$). Diese extra Kraft "schüttelt" das doppelmuldige Potential seitweise:



* Wenn das "Schütteln" schwach ist, wir erwarten dass das Teilchen in der Nähe eines Minimums bleibt.
* Wenn das "schütteln" stärker wird, dann kann das Teilchen die beide Töpfe besuchen.

* Es gibt also 2 mögliche Bewegung:
  * Kurze Oszillationen: nur innerhalb eines Töpfes
  * lange Oszillationen: in beiden Töpfen.
* Für sehr starke Schüttelungen wir erwarten komplizierte Bewegungen.
* Gücken wir es genauer. Die Dynamik dieses Systems wird von die folgende Newton'sche Bewegungsgleichung gegeben:

$$\boxed{\ddot{x} + \delta\,\dot{x} \underbrace{- x + x^3} = F\cos\omega t}$$

← das Treiben (dimensionslose Form)

$\delta\dot{x}$: Reibung mit Reibungskonstante δ

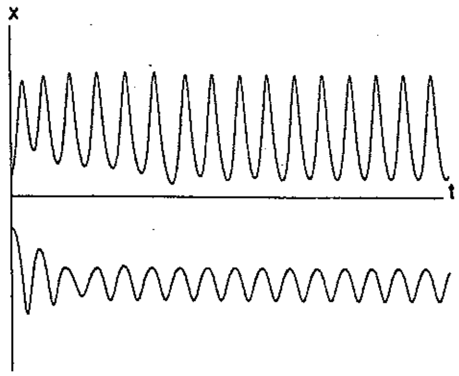
$\hookrightarrow V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ (doppelmuldiges Potential) $\rightarrow f_{Pot} = -\partial_x V = -x^3 + x$

(Bemerkung: das Treiben des Potentials verursacht eine Scheinkraft $F\cos\omega t$ fürs Teilchen)

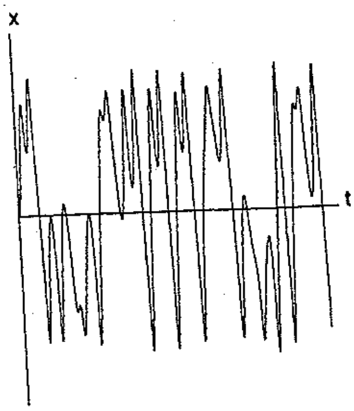
* Nehmen wir z.B. $\delta = 0.25$, $\omega = 1$, und gucken wir was passiert für verschiedene Werte von F.

(Bemerkung: die Gleichung daoben ist explizit zeitabhängig, Man braucht also $(x, \dot{x}, t)$ für die Beschreibung des Systems → 3D Problem!)

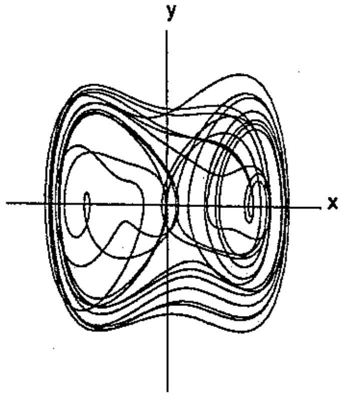
* Sei $F = 0.18$. Als Funktion der Anfangsbedingungen bekommt man verschiedene Grenzzyklen (Oszillationen innerhalb eines Töpfes)



* Gucken wir was passiert für $F = 0.40$ mit $x(0)=0,\ y(0)=0$ (Bemerkung: wie immer $y = \dot{x}$):

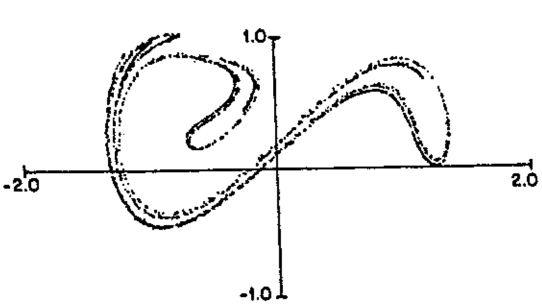


* Die Bahn baut eine komplizierte Form auf der XY-Ebene



Bemerkung: Ich erinnere euch dass das Problem eigentlich 3D ist, also ein Diagramm in xy ist eigentlich eine 2D-Projektion).

* Nehmen wir nun einen Poincaré-Schnitt $(x(t), y(t))$ für $t_n = n2\pi$ d.h. wir plotten ein Punkt $(x(t), y(t))$ für alle Zeiten $t = 2n\pi$. Dann bekommt man folgendes.



* Die Poincaré-Abbildung weist eine fraktale Struktur auf!!
* Man hat hier den Poincaré-Schnitt eines seltsamen Attraktors!!
* Man hat hier eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen + gefangene Bahnen $\Longrightarrow$ Chaos!