Aufgabe 10-1: Spin-Bahn-Kopplung (6 Punkte)

Ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen befinde sich in einem Orbital mit Drehimpuls $l = 1$. Der Spin des Elektrons sei mit dem Bahndrehimpuls gekoppelt über $\hat{H} = \gamma \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$.

1. Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenenergien von $\hat{H}$ in der Basis $|l, s; J, M\rangle \equiv |J, M\rangle$ der Operatoren $\{\hat{\vec{L}}^2, \hat{\vec{S}}^2, \hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z\}$ an, wobei $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$. Drücken Sie die Eigenfunktionen dann mit Hilfe der Clebsch-Gordan Koeffizienten in der Eigenbasis $|l, s; m_l, m_s\rangle \equiv |m_l, m_s\rangle$ der Operatoren $\{\hat{\vec{L}}^2, \hat{\vec{S}}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z\}$ aus. (3 Punkte)

   Hinweis: Die Clebsch-Gordan Koeffizienten finden Sie z.B. auf *http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_Clebsch-Gordan_coefficients#Formulation*. Diese sind normalerweise nur für $M \geq 0$ angegeben. Hier hilft folgende Beziehung: $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; J, M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_1, j_2; -m_1, -m_2 | j_1, j_2; J, -M\rangle$.

2. Sei $|\psi(t = 0)\rangle = \sum_{m_l, m_s} \alpha_{m_l, m_s} |m_l, m_s\rangle$. Der Kopplungskoeffizient γ sei hier zeitabhängig, $\gamma(t < 0) = 0$, $\gamma(t \in [0, t_0]) = 1$ und $\gamma(t > t_0 = 0)$.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System für $t > t_0$ in einem Zustand $|m_l, m_s\rangle$ zu finden, formal ausgedrückt mit den Clebsch-Gordan Koeffizienten $\langle m_l, m_s | J, M\rangle$. (1.5 Punkte)

   (b) Wenn bei $t = 0$ nur der Koeffizient $\alpha_{0,1/2}$ von Null verschieden ist, was ist dann die Wahrscheinlichkeit, das System bei $t > t_0$ immer noch in diesem Zustand zu finden? Geben Sie diese als Funktion von γ und t an. (1.5 Punkte)

Aufgabe 10-2: Tensor-Kraft (4 Punkte)

Die sogenannte Tensor-Kraft zwischen zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, die z.B. aufgrund einer Dipol-Dipol-Wechselwirkung entsteht, ist in der Ortsdarstellung definiert durch eine Wechselwirkungs-Energie der Form $\hat{V}(\vec{r}) = U(r)\hat{T}_{12}$, wobei

$$\hat{T}_{12} = \frac{(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \vec{r})(\hat{\vec{\sigma}}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \frac{1}{3}(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2).$$

Hierbei ist $\hat{\vec{\sigma}}$ der Vektor der Pauli-Matrizen, und die Indices $1, 2$ beziehen sich auf das Teilchen, auf das die Matrizen wirken. Sei $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$ mit Eigenzuständen $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; J, M\rangle \equiv |J, M\rangle$, dann ist $|0, 0\rangle$ der Singulett Zustand und $|1, M\rangle$ mit $M = 0, \pm 1$ die Triplett Zustände.

Zeigen Sie, dass man $\hat{T}_{12}$ in der Basis $\{|0, 0\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle, |1, -1\rangle\}$ darstellen kann als

$$N \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2Y_{2,0} & -\sqrt{3}Y_{2,1} & -\sqrt{3}Y_{2,-1} \\ 0 & \sqrt{3}Y_{2,-1} & Y_{2,0} & \sqrt{6}Y_{2,-2} \\ 0 & \sqrt{3}Y_{2,1} & \sqrt{6}Y_{2,2} & Y_{2,0} \end{pmatrix},$$

wobei $Y_{l,m}$ die Kugelflächenfunktionen sind und $N = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}$ gilt.