
Das ist das letzte Hausübungsblatt. Alle Aufgaben drehen sich um die zeitunabhängige Störungstheorie.

Aufgabe 11-1: Kastenpotential mit linearer Störung (3 Punkte)

Der Kreis schließt sich: Wie zu Beginn der Vorlesung betrachten wir ein Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden,

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0(x), \quad \text{wobei} \quad V_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } |x| < a, \\ \infty \text{ für } |x| \geq a. \end{cases}$$

Wir wollen nun eine kleine Störung des Potentials der Form $\hat{H}_1 = Fx$ betrachten, wobei $Fa \ll \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ gilt.

1. Berechnen Sie die erste von Null verschiedene Korrektur der Grundzustandsenergie vom Hamilton Operator $\hat{H}_0$. Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^5} = \frac{\pi^2}{2^{12}}(5 - \frac{\pi^2}{3})$.

Aufgabe 11-2: Gestörter starrer Rotator (3 Punkte)

Der Hamilton Operator eines starren Rotators in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\hat{z}$ ist gegeben durch

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\theta}\hat{\vec{L}}^2 + gB\hat{L}_z \equiv \frac{\alpha}{\hbar^2}\hat{\vec{L}}^2 + \frac{\beta}{\hbar}\hat{L}_z,$$

wobei θ das Trägheitsmoment ist und g das gyromagnetische Verhältnis. Ein zweites homogenes Magnetfeld $\vec{B}' = B'\hat{x}$ wird angelegt, wobei $\gamma = g\hbar B' \ll \beta$ gelten soll. Dann haben wir eine Störung $\hat{V} = \frac{\gamma}{\hbar}\hat{L}_x$.

1. Berechnen Sie die Korrekturen der Energien der ungestörten Eigenzustände $|l, m\rangle$ bis zur zweiten Ordnung in γ. (1 Punkt)
2. Berechnen Sie für $l = 1$ die exakten Eigenenergien des gestörten Hamilton Operators. (1.5 Punkte)
3. Entwickeln Sie die exakten Eigenenergien in $\epsilon \equiv \frac{\gamma}{\sqrt{2}\beta}$ bis zur Ordnung ϵ^2 und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus dem ersten Teil der Aufgabe. (0.5 Punkte)

Aufgabe 11-3: Anharmonischer Oszillator (4 Punkte)

Der Hamilton Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}x^2.$$

Betrachten Sie die Störung $\hat{H}_1 = \mu(x^3 + x^4)$ mit kleinem μ.

1. Berechnen Sie die Korrekturen der Energieniveaus bis zur ersten Ordnung. (1.5 Punkte)
2. Geben Sie $\langle \hat{x} \rangle_n$ in erster Näherung an, d.h. sie müssen die Erwartungswerte mit den gestörten $n-$ten Eigenzuständen des harmonischen Oszillators berechnen. (2.5 Punkte)