

Aufgabe 1: Bohr'sche Quantisierung (4 Punkte)

Im Rutherford'schen Atommodell bewegen sich Elektronen auf der Kreisbahn mit Radius r um den Atomkern. Wir wollen hier annehmen, dass das Potential des Kerns, in dem sich das Elektron bewegt, durch

$$V(r) = V_0 \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^k$$

gegeben ist.

- Wenden Sie die Bohr'sche Quantisierungsregel ($pr = n\hbar$) an und berechnen Sie die möglichen Bahnradien r_n des Elektrons (sie sollten $r_n = \tilde{c} \cdot n^{2/(k+2)}$ erhalten mit einer Konstante \tilde{c}) und die mit diesen Bahnen verbundenen Energien $E(n)$ (Energie=Kinetische Energie + Potentielle Energie) unter der Annahme, dass für jede mögliche Bahn die vom Potential $V(r)$ ausgeübte Kraft die Zentrifugalkraft kompensiert. (3 Punkte)
- Zeigen Sie, dass sich die Energie der Bahnen für $k \gg 1$ wie $E(n) \approx c \cdot n^2$ verhält und dass für den harmonischen ($k = 2$) Fall $E(n) = c' \cdot n$ gilt (c und c' sind Konstanten). (1 Punkt)

Aufgabe 2: Wellenpaket mit spezieller Dispersion (2 Punkte)

Wir wollen hier ein Wellenpaket mit der k -Verteilung $g(k) = \exp(-\frac{k^2}{2\Delta^2})$ betrachten mit Dispersionsgesetz $\omega(k) = -\omega_0 \cos(\chi k)$, welches in Festkörpern im sogenannten *tight-binding*-Regime gilt.

- Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes. (0.5 Punkte)
- Nehmen Sie an, dass $\Delta \ll 1/\chi$ gilt, dass also das Wellenpaket im k -Raum stark lokalisiert ist verglichen mit $1/\chi$. Betrachten Sie für diesen Fall das Verhalten von $\omega(k)$ und berechnen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$. Sie können wie in der Vorlesung vorgehen. (1.5 Punkte)

Aufgabe 3: Compton-Streuung (4 Punkte)

Betrachten Sie den Stoß eines Elektrons mit Impuls \vec{P} mit einem Photon mit Impuls \vec{p} . Das Photon bewege sich in positive und das Elektron in negative x -Richtung. Nach dem Stoß hat das Photon den Impuls \vec{p}' . Der Winkel zwischen \vec{p}' und der x -Achse sei θ .

- Berechnen Sie die Frequenz ω' des Photons nach dem Stoß als Funktion von $|\vec{p}|$, $|\vec{P}|$, θ und der Frequenz ω vor dem Stoß aus Impuls- und Energieerhaltung (relativistisch!). Überprüfen Sie, dass für $\vec{P} = 0$ Ihr Ergebnis mit dem aus der Vorlesung bekannten Ergebnis übereinstimmt.