
Aufgabe 1: Kastenpotential (3 Punkte)

In dieser Aufgabe sei folgendes eindimensionales Potential gegeben: $V(x) = 0$ für $x \in [-a, 0]$ und $V(x) \to \infty$ sonst. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die rechte unendlich hohe Potentialbarriere instantan nach $x = a$ verschoben.

- Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenenergien des Potentials für $t < 0$ an. (0.5 Punkte)
- Für $t < 0$ sei das System im Grundzustand präpariert. Entwickeln Sie diese Wellenfunktion für $t \geq 0$ in der Basis des erweiterten Potentials. (2.5 Punkte)

Nützliche Relationen: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \pm (-\sin(\alpha)\sin(\beta))$, $\sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\theta))$.

Aufgabe 2: Zeitentwicklung im Kastenpotential (4 Punkte)

Betrachten Sie wieder das Kastenpotential wie aus Aufgabe 1 mit den Barrieren bei $\pm a$. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\Big(\sin(\frac{\pi}{a}x) + \cos(\frac{\pi}{2a}x)\Big).$$

- Schreiben Sie den zeitentwickelten Zustand $\psi(x, t)$ hin. (0.5 Punkte)

  Hinweis: Dazu ist es hilfreich, den Zustand in der Eigenbasis hinzuschreiben.
- Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$. (1.5 Punkte)

  Hinweis: Diese sollten zeitabhängig sein.
- Berechnen Sie analog $\langle \hat{x}^2 \rangle$ und $\langle \hat{p}^2 \rangle$. (1.5 Punkte)

  Hinweis: Diese sollten nicht zeitabhängig sein.
- Mit den Ergebnissen können Sie nun (grob/numerisch) abschätzen, ob die Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ für alle Zeiten gilt. (0.5 Punkte)

Nützliche Relationen: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy\, y \sin(2y)\cos(y) = 8/9$, $\int_{-\pi}^{\pi} dy\, y^2 \sin(y) = \pi^3/3 - \pi/2$ und $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy\, y^2 \cos(y) = \pi^3/24 - \pi/4$.

Aufgabe 3: Kastenpotential mit periodischen Randbedingungen (3 Punkte)

Betrachten Sie wieder ein Kastenpotential mit Wänden bei $x = 0$ und $x = L$. Gegeben seien die sogenannten *periodischen Randbedingungen*:

$$\psi(0) = \psi(L) \quad \text{and} \quad \psi'(0) = \psi'(L),$$

wobei ψ' für $d\psi/dt$ steht. Berechnen Sie die Eigenfunktionen und Eigenenergien, und vergleichen Sie diese mit denen aus der Vorlesung ohne periodische Randbedingungen (bis hier 1.5 Punkte). Finden Sie die passenden (normierten) Kombinationen der Eigenfunktionen, die symmetrische/antisymmetrisch bezüglich der Transformation $\psi(x - L/2) \leftrightarrow \psi(x + L/2)$ sind.