Aufgabe 1: Potentialgraben vs. Deltapotential bei niedrigen Energien (7 Punkte)

Wir wollen hier einen Potentialgraben der Tiefe $-V_0$ im Bereich $[-a, a]$ bei sehr niedrigen positiven Energien E betrachten und schauen, ob man dieselben Wellenfunktionen im Bereich $|x| > a$ erhalten kann, wenn man den Potentialgraben durch ein Delta-Potential ersetzt. Dabei wollen wir nur *symmetrische* Lösungen betrachten.

- Finden Sie die symmetrischen Lösungen des Potentialgrabens mit sehr kleinen $E \gtrsim 0$. (2.5 Punkte)

  Hinweis: Hier sind symmetrische Zustände bezgl. Spiegelung am Ursprung gemeint, nicht ein- und auslaufende Wellen. Sie sollten $\psi(x) \simeq C + Dx$ erhalten für $x > a$ (und analog für $x < -a$) und C/D als Funktion von a und $q = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}$ berechnen.

- Berechnen Sie die symmetrischen Lösungen des Potentials $g\delta(x)$ auch für $E \gtrsim 0$.

  Der Hinweis aus dem ersten Teil sollte auch hier beachtet werden. (1.5 Punkte)

- Zeigen Sie, dass die Bedingung an g dafür, in beiden Fällen die gleichen Wellenfunktionen für $|x| > a$ zu erhalten, durch

$$g = -\frac{\hbar^2}{ma}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{qa\tan(qa)}}\right)$$

  gegeben ist. (1.5 Punkte)

- Zeigen Sie, dass sich g, falls die Energie eines gebundenen Zustandes des Potentialgrabens gegen 0 geht (wenn wir a oder V_0 verändern), wie $g \approx -\frac{\hbar^2}{2ma} qa \tan qa$ verhält. Was passiert hier? (1.5 Punkte)

  Hinweis: In der Vorlesung wurde die Bedingung für gebundene Zustände behandelt.

Aufgabe 2: Tunneln mit WKB (3 Punkte)

Hier sollen Sie das Absolutquadrat des Transmissionskoeffizienten T berechnen für ein Potential, welches im Bereich $[-b, b]$ den Wert $V(x) = \cos(\frac{\pi}{2b}x)^2$ und 0 sonst annimmt. Sie können dabei die WKB-Näherungsformel aus der Vorlesung benutzen. Es gelte $E = V(R)$, $R \leq b$.

- Berechnen Sie $|T|^2$ für $R \ll b$ und für $R \lesssim b$. (2 Punkte)
- Vergleichen Sie die Ergebnisse. (1 Punkt)

Hinweis: Die Substitution $y = \cos(\phi)$ könnte bei der Berechnung eines Integrals helfen.